



GET it digital

Grundlagen der Elektrotechnik

Ein Kooperationsvorhaben
empfohlen durch die



gefördert durch

Ministerium für
Kultur und Wissenschaft
des Landes Nordrhein-Westfalen



Die einzelnen Module wurden erstellt von:

- Modul 1 und 4: Universität Paderborn, Henrik Bode
- Modul 2 und 3: Fachhochschule Aachen, Michael Hillgärtner, Sven Micun, Filimon Stergianos
- Modul 5: Fachhochschule Dortmund, Martin Kiel, Torben Meibeck
- Modul 6 und 11: Bergische Universität Wuppertal, Ralf Wegener, Grzegorz Lisicki, Josef Kirschner
- Modul 7: Fachhochschule Dortmund, Stefan Kempen, Torben Meibeck
- Modul 8 und 12: Fachhochschule Südwestfalen, Matthias Werle
- Modul 9 und 10: Hochschule Ruhr West, Marvin Kaminski, Kerstin Siebert, Jonas Brodmann, Dominik Thiem

Stand: 27. Oktober 2025



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß [TULLU-Regel](#) bitte wie folgt: „GET it digital“ von verschiedenen Autoren
Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Das Werk ist online verfügbar unter:

<https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/komplett/Skript.pdf>

Inhaltsverzeichnis

Verwendete Größen und Formelzeichen	x
1 Elektrische Grundgrößen	1
1.1 Motivation	1
1.2 Physikalische Größen - Definitionen und Maßeinheiten	2
1.2.1 Das SI-Einheitensystem	2
1.2.2 Zehnerpotenzen	4
1.3 Die elektrische Ladung	4
1.3.1 Der Atomaufbau	4
1.3.2 Ladungsdichten	6
1.3.3 Elektrische Leiter - Metalle	8
1.3.4 Das Coulombsche Gesetz	9
1.4 Das elektrische Feld	10
1.4.1 Charakterisierung des elektrischen Feldes	10
1.4.2 Elektrische Leiter und elektrostatische Felder I	11
1.4.3 Beispiele elektrischer Felder	12
1.5 Das elektrische Potential	14
1.5.1 Arbeit im elektrischen Feld	14
1.5.2 Definition des elektrischen Potentials	17
1.5.3 Zusammenhang zwischen Arbeit und Potential	18
1.5.4 Definition der elektrischen Spannung	20
1.6 Die elektrische Stromstärke	23
1.6.1 Das elektrische Strömungsfeld	23
1.6.2 Der elektrische Strom	23
1.6.3 Definition der elektrischen Stromstärke	25
2 Energie und Leistung	27
2.1 Einleitung	27
2.2 Die Energie	29
2.2.1 Der Energieerhaltungssatz	29
2.2.2 Die verschiedenen Energieformen	30
2.2.3 Die elektrische Energie	31
2.2.4 Elektrische Energiespeicher	32
2.3 Die Arbeit	33
2.3.1 Die elektrische Arbeit	34
2.3.2 Wegintegral der elektrischen Arbeit	35
2.4 Die Leistung	36
2.4.1 Die elektrische Leistung	36
2.4.2 Die verschiedenen Leistungsarten	36
2.5 Der Wirkungsgrad	37
2.5.1 Berechnung des Wirkungsgrades	37
2.5.2 Verlustmechanismen eines Leuchtmittels	38

3	Elektrische Bauelemente	41
3.1	Einleitung	41
3.2	Leitfähigkeit und Widerstand	42
3.2.1	Die elektrische Leitfähigkeit	43
3.2.2	Die elektrische Leitfähigkeit	43
3.2.3	Die elektrische Leitfähigkeit	43
3.2.4	Die elektrische Leitfähigkeit	44
3.2.5	Driftverhalten von Elektronen in Leitern	45
3.2.6	Mathematische Zusammenhänge der Leitfähigkeit	46
3.2.7	Widerstand als Bauelement	48
3.2.8	PTC und NTC	51
3.3	Spannungs- und Stromquelle	54
3.3.1	Spannungsquellen	54
3.3.2	Modellierung realer Spannungsquellen	55
3.3.3	Stromquellen	56
3.3.4	Modellierung realer Stromquellen	56
3.3.5	Umrechnung von Spannungs und Stromquelle	57
3.3.6	Verschiedene Spannungs- und Stromquellen	58
3.4	Kapazität und Kondensator	59
3.4.1	Die elektrische Kapazität C	59
3.4.2	Der Kondensator als Bauelement	61
3.4.3	Das Dielektrikum	62
3.4.4	Die elektrische Flussdichte	63
3.4.5	Schaltverhalten eines Kondensators	65
3.5	Induktivität und Spule	67
3.5.1	Die Induktivität L	67
3.5.2	Die Spule als Bauelement	69
3.5.3	Die Permeabilität	71
3.5.4	Die magnetische Feldstärke	72
3.5.5	Schaltverhalten einer Spule	72
4	Grundlegende Gleichstromnetzwerke	75
4.1	Einleitung	75
4.2	Zweipole und Zählpeilsysteme	76
4.2.1	Zweipole	76
4.2.2	Zählpeilsysteme	77
4.2.3	Der Grundstromkreis	78
4.3	Kirchhoffsche Sätze	79
4.3.1	Knotenregel (1. Kirchhoffsche Regel)	79
4.3.2	Anwendungsfall Knotenregel: Parallelschaltung von Widerständen	81
4.3.3	Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)	82
4.3.4	Anwendungsfall Maschenregel: Reihenschaltung von Widerständen	83
4.4	Einfache Widerstandsnetzwerke	85
4.4.1	Reihenschaltung von Widerständen	85
4.4.2	Parallelschaltung von Widerständen	86
4.4.3	Spannungsteiler an Widerständen	88
4.4.4	Stromteiler in Widerstandsnetzwerken	91
4.4.5	Besondere Betriebszustände aktiver Zweipole	92
4.5	Einfache Kondensatornetzwerke	99
4.5.1	Parallelschaltung von Kapazitäten	99
4.5.2	Reihenschaltung von Kapazitäten	100
4.5.3	Spannungsteiler an Kapazitäten	101
4.6	Messen von Strom und Spannung	102
4.6.1	Spannungsmessung im Gleichstromkreis	102

4.6.2	Strommessung im Gleichstromkreis	103
4.6.3	Strom- und spannungsrichtiges Messen	104
5	Erweiterte Gleichstromnetzwerke	107
5.1	Einleitung	107
5.2	Knoten- und Maschenanalyse	108
5.2.1	Stromdichte im freien Raum	108
5.2.2	Stromdichte im strukturierten Raum	108
5.2.3	Exkurs: Graphentheorie	109
5.2.4	Knoten, Zweig, Masche	111
5.2.5	Der vollständige Baum	112
5.2.6	Knotenregel	113
5.2.7	Maschenregel	114
5.2.8	Knoten- und Maschenanalyse	115
5.3	Superpositionsprinzip	119
5.3.1	Exkurs Systemtheorie	119
5.3.2	Überlagerungssatz	121
5.4	Knotenpotentialverfahren	126
5.4.1	Vorbereitung des Netzwerkes	126
5.4.2	Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale	127
5.4.3	Zuordnung der Quellströme	128
5.4.4	Leitwertmatrix	128
5.4.5	Gleichungssystem aufstellen	129
5.5	Maschenstromverfahren	132
5.5.1	Vorbereitung des Netzwerkes	132
5.5.2	Maschen definieren	133
5.5.3	Widerstandsmatrix bestimmen	134
5.5.4	Quellenspannungen zuordnen	135
5.5.5	Gleichungssystem aufstellen	135
6	Magnetische Größen	139
6.1	Einleitung	139
6.1.1	Magnetismus	139
6.1.2	Magnetisches Feld	140
6.2	Elektromagnetismus	141
6.2.1	Durchflutung	142
6.2.2	Magnetischer Fluss und Flussdichte	144
6.3	Magnetischer Fluss und Flussdichte	147
6.4	Der magnetische Widerstand	149
6.4.1	Der magnetische Kreis	150
6.5	Lorentzkraft	150
6.6	Induktion	155
6.7	Induktivität	156
6.8	Energie im magnetischen Feld	159
6.9	Skin-Effekt	160
6.10	Hall-Effekt	162
7	Periodische Größen	165
7.1	Einleitung	165
7.2	Grundlagen Komplexe Zahlen	166
7.2.1	Komplexe Zahlenebene	166
7.2.2	Graphische Darstellung und Rechnungen mit komplexen Zahlen	169
7.3	Zeigerdiagramme in der Wechselstromtechnik	171
7.3.1	Periodische Wechselspannung	171

7.3.2	Komplexer Drehzeiger der Amplitude	172
7.4	Komplexe Wechselstromrechnung	175
7.4.1	Impedanz und Admittanz in der komplexen Ebene	175
7.4.2	Komplexer Widerstand	177
7.4.3	Kapazität	178
7.4.4	Induktivität	179
7.4.5	Quellen von Wechselgrößen	181
7.4.6	Komplexer Spannungsteiler und komplexer Stromteiler	184
7.5	Effektivwert	189
7.5.1	Grundlagen: Quadratischer Mittelwert und Additionstheorem	189
7.5.2	Amplitude	189
7.5.3	Kurvenform	190
7.5.4	Effektivwert	191
7.6	Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung	193
7.6.1	Grundlagen: Additionstheorem und Arithmetischer Mittelwert	193
7.6.2	Wirkleistung und Blindleistung	194
7.6.3	Scheinleistung	198
7.6.4	Leistung und elektrische Energie	200
7.7	Drehstrom	202
7.7.1	Symmetrische Komponenten	202
7.7.2	Unsymmetrische Komponenten	210
7.8	Mehrphasensysteme - Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem	214
7.8.1	Mit-, Gegen- und Nullsystem	214
7.8.2	Drehstromleistung	217
7.8.3	Ersatzschaltbilder	218
8	Schaltungen variabler Frequenz	223
8.1	Wiederholung	223
8.1.1	Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente	223
8.1.2	Zweitore (Vierpole)	225
8.2	Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang	227
8.2.1	Definitionen	227
8.2.2	Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters	228
8.2.3	Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters	230
8.2.4	Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters	232
8.2.5	Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters	233
8.2.6	Vergleich passive Filter 1. Ordnung mit L und R	234
8.2.7	Beispiel Filterschaltung; Aufgabe	235
8.3	Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz	237
8.3.1	Logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen	240
8.3.2	Definition Dezibel	240
8.3.3	Grenzfrequenz einfacher Filterschaltungen	242
8.3.4	Tiefpass 1. Ordnung	243
8.3.5	Bandpass, Bandsperre	246
8.3.6	Ordnung von Filtern, Beispielfilter höherer Ordnung	248
8.4	Ortskurven	250
8.4.1	Definition Ortskurve	250
8.4.2	Zusammenhang Zeigerdiagramm und Ortskurve	251
8.4.3	Impedanzortskurve	252
8.4.4	Admittanzortskurve - Inversion von Ortskurven	253
8.4.5	Ortskurven von Grundsaltungen	254
8.5	Resonanzkreise	256
8.5.1	Resonanzerscheinung	256
8.5.2	Definitionen	258

8.5.3	Resonanzfrequenz am Beispiel idealer LC-Schwingkreise	259
8.5.4	RLC-Reihenschwingkreis - Resonanzverhalten	260
8.5.5	RLC-Parallelschwingkreis - Resonanzverhalten	271
8.6	Nebenrechnungen	279
9	Halbleiterbauelemente	281
9.1	Einführung	281
9.1.1	Bändermodell	282
9.1.2	Halbleitermaterialien	284
9.1.3	Ladungsträgertransport	286
9.1.4	pn-Übergang	290
9.2	Bauelemente	292
9.2.1	Diode	292
9.2.2	Bipolartransistor	300
9.2.3	Feldeffekttransistor	312
10	Operationsverstärker	321
10.1	Einführung, Aufbau und Funktionsweise von Operationsverstärkern	321
10.1.1	Aufbau und Funktionsweise	321
10.2	Modellierung und charakteristische Größen	324
10.3	Prinzip der Gegenkopplung	327
10.4	Stabilität von Verstärkerschaltungen	334
10.5	Operationsverstärker als Analogrechner	337
11	Elektrische Maschinen	341
11.1	Klassifizierung elektrischer Maschinen	341
11.2	Der Transformator	342
11.2.1	Prinzip des Transformators	345
11.2.2	Aufbau des Transformators	346
11.2.3	Ersatzschaltbild	348
11.3	Gleichstrommaschine	350
11.3.1	Exkurs Prinzip des Elektromotors	350
11.3.2	Aufbau und Gehäusekonstruktion	351
11.3.3	Magnetische Felder	353
11.3.4	Berechnung des Drehmoments	354
11.3.5	Fremderregte Gleichstrommaschine	354
11.3.6	Reihenschlussmaschine	355
11.4	Synchronmaschine	356
11.4.1	Aufbau	357
11.4.2	Feldverläufe	358
11.4.3	Ersatzschaltbild	359
11.5	Asynchronmaschine	359
11.5.1	Aufbau	360
11.5.2	Käfigläufer	360
11.5.3	Anlauf der ASM	361
11.5.4	Betrieb der ASM	361
11.5.5	Drehzahl/Drehmomenten-Kennlinie	361
12	Schaltvorgänge	365
12.1	Einführung	365
12.1.1	Ausgleichsvorgänge	365
12.1.2	Schaltvorgänge	366
12.1.3	Beispiele für Schaltvorgänge	367
12.1.4	Vergleich idealer und realer Schalter	367
12.2	Grundlagen	369

12.2.1	Definitionen	369
12.2.2	Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge	371
12.2.3	Differentialgleichungen	372
12.2.4	Berechnungsverfahren im Zeitbereich	376
12.3	Berechnung im Zeitbereich	380
12.3.1	bei Gleichspannung	380
12.3.2	bei sinusförmiger Anregung	388
12.3.3	bei RLC-Serienschwingkreisen	393
12.3.4	Exkurse zu Serienschwingkreisen	396
	Literaturverzeichnis	401
	Index	401

Verwendete Größen und Formelzeichen

Konstanten

μ_0 magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 1,256\,637\,062 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

Einheiten

A Ampere - elektrischer Strom

H Henry - Induktivität $H = \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2\cdot\text{A}^2}$

kg Kilogramm - Masse

m Meter - Länge

N Newton - Kraft $N = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$

s Sekunde - Zeit

T Tesla - magnetische Flussdichte $T = \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2\cdot\text{A}}$

V Volt - Spannung $V = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{A}\cdot\text{s}} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3\cdot\text{A}}$

W Watt - Wirkleistung $W = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{A} \cdot \text{V} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3}$

Wb Weber - magnetischer Fluss $\text{Wb} = \text{V} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2\cdot\text{A}}$

Formelzeichen

ω_r Drehfrequenz des Rotors $\frac{1}{\text{s}}$

ω_s Synchrone Drehfrequenz des speisenden Netzes $\frac{1}{\text{s}}$

ϑ Polradwinkel der Synchronmaschine $^\circ$

L_h Hauptinduktivität eines Transformators

L_σ Streuinduktivität eines Transformators

M_K Kippmoment der Asynchronmaschine Nm

n Drehzahl $\frac{1}{\text{min}}$

p Polpaarzahl

s Schlupf der Asynchronmaschine

s_K Kippschlupf der Asynchronmaschine

δ	Eindringtiefe in den Leiter durch den Skin-Effekt (Skin-Tiefe)	m
ρ_R	spezifischer Widerstand	$\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$
Φ	magnetischer Fluss	Wb
Θ	magnetische Durchflutung	A
A	Fläche	m ²
B	magnetische Flussdichte	T
d	Abstand im magnetischen Leitkörper	m
F	Kraft	N
f	Frequenz	Hz
H	magnetische Feldstärke	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$
I	elektrischer Strom (zeitlich konstant)	A
\vec{J}	Stromdichte	$\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$
ℓ	Länge	m
ℓ_m	mittlere Feldlinienlänge einer Spule	m
L	Induktivität	H
M	Drehmoment	Nm
m	Masse	kg
N	abstrakte Anzahl (z. B. Anzahl der Wicklungen einer Spule)	1
P	Wirkleistung	W
R_m	magnetischer Widerstand	$\frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}}$
t	Zeit	s
U	Spannung (zeitlich konstant)	V
u	Spannung (zeitlich variabel)	V
v	Geschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
W	Arbeit	J
W	Energie	J

Modul 1

Elektrische Grundgrößen

1.1 Motivation

Die Elektrotechnik durchdringt nahezu jeden Bereich unseres modernen Lebens. Die Spanne reicht von der Energieversorgung über die Steuerungstechnik bis hin zur IT-Technik. Egal ob Smartphone, Auto oder moderne Haushaltsgeräte, tagtäglich werden zahlreiche Gegenstände genutzt, die ohne diese Disziplin nicht denkbar wären. Die Elektrotechnik hat in den letzten Jahrzehnten bahnbrechende Innovationen ermöglicht und ist der Treiber für zahlreiche Entwicklungen. Im Bereich der erneuerbaren Energien basieren Photovoltaikanlagen, Windkraftwerke und intelligente Stromnetze auf fortschrittlichen elektrotechnischen Konzepten. Für das Internet der Dinge (IoT) erfordert die Vernetzung von Alltagsgegenständen miniaturisierte Sensoren, Mikrocontroller und Kommunikationsmodule und die Entwicklung leistungsfähiger KI-Systeme wäre ohne spezialisierte Hardwarekomponenten wie GPUs oder CPUs nicht möglich. Fachwissen aus diesem Bereich ist jedoch nicht nur für Studierende der Elektrotechnik relevant. Auch steigt die Relevanz der grundlegenden Inhalte für Studierende sämtlicher weiterer ingenieurtechnischer sowie verwandter Studiengänge stetig an. Die moderne Produktentwicklung wird mit interdisziplinären Projektteams umgesetzt.

- **Maschinenbau:** Auch wenn die Maschinenbauingenieur*innen nicht unmittelbar an der Entwicklung elektrisch/elektronischer Komponenten beteiligt sind, brauchen sie ein grundlegendes Verständnis für die am Entwicklungsprojekt beteiligten Kolleg*innen. Beispielsweise bei der Entwicklung von Robotersystemen oder automatisierten Fertigungsanlagen ist eine enge Zusammenarbeit zwischen Maschinenbau und Elektrotechnik unerlässlich.
- **Informatik:** Die Schnittstelle zwischen Hardware und Software wird immer wichtiger. Informatiker*innen müssen verstehen, wie ihre Programme mit der zugrundeliegenden Elektronik interagieren.
- **Medizintechnik:** Moderne medizinische Geräte wie MRT-Scanner oder Herzschrittmacher sind ohne fundierte elektrotechnische Kenntnisse nicht denkbar.

Dieses Skript unterstützt bei dem Erlernen der benötigten Grundlagen. Es vermittelt nicht nur theoretisches Wissen, sondern zeigt auch praktische Anwendungen und interdisziplinäre Verknüpfungen auf. Ziel ist es, ein solides Fundament zu schaffen, auf dem Studierende verschiedener Ingenieurdisziplinen aufbauen können. Die hier erlernten Konzepte bilden die Basis für das Verständnis komplexerer Systeme und bereiten auf die Herausforderungen einer zunehmend digitalisierten und vernetzten Welt vor. Von den Grundlagen der Elektrizität bis hin zu fortgeschrittenen Themen wie Signalverarbeitung oder Regelungstechnik - dieses Skript legt den Grundstein für eine erfolgreiche Karriere in einer Welt, die maßgeblich von der Elektrotechnik geprägt ist.

1.2 Physikalische Größen - Definitionen und Maßeinheiten

Lernziele: Beschreibung physikalischer Größen

Die Studierenden können

- physikalische Größen mit Maßzahl und Maßeinheit angeben
- die sieben SI-Basiseinheiten sowie die davon abgeleiteten Einheiten nutzen sowie ihren jeweiligen Größen zuordnen
- Zahlenwerte mit Hilfe von Zehnerpotenzen sowie deren Bezeichnung angeben und ineinander umrechnen

1.2.1 Das SI-Einheitensystem

Jede physikalische Größe wird immer als Kombination von Zahlenwert (Maßzahl) und ihrer Maßeinheit (auch Dimension genannt) beschrieben. Wenige einheitenlose Größen bilden hier eine Ausnahme, die Maßeinheit von diesen ist "1". Vor der Einheit kann - falls erforderlich - das Kürzel einer Zehnerpotenz stehen, die den Zahlenwert skaliert (siehe Abschnitt *Zehnerpotenzen*). Der Zahlenwert und die Einheit werden durch ein Leerzeichen getrennt. Beispiel: 1000 m = 1 km.

Diese Einheiten sind im internationalen Einheitensystem, dem SI-System (Système International), definiert und bilden die Grundlage aller physikalischen Größen. Es gibt sieben SI-Basisgrößen, welche mit Hilfe von fundamentalen physikalischen Konstanten definiert werden können. Diese Konstanten können experimentell mit ausreichend hoher Genauigkeit bestimmt werden, um eine zuverlässige Grundlage unseres gesamten Einheitensystems zu bilden. Neben den so definierten Grundeinheiten gibt es noch weitere, sogenannte abgeleitete Einheiten, die sich auf die Grundeinheiten zurückführen lassen.

Abseits des SI-Systems und seiner abgeleiteten Größen gibt es eine Vielzahl weiterer Einheiten, wie beispielsweise die angelsächsischen Größen Pfund, Inch oder die Meile, die an dieser Stelle nicht weiter verwendet werden.

SI-Größe	Formelzeichen	Einheit	Basis
Zeit	t	Sekunde, s	$\Delta\nu$
Länge	ℓ	Meter, m	c, s
Masse	m	Kilogramm, kg	h, s, m
Stromstärke	I	Ampere, A	e, s
Temperatur	T	Kelvin, K	k_B, s, m, kg
Stoffmenge	n	Mol, mol	N_A
Lichtstärke	I_v	Candela, cd	K_{cd}, s, m, kg

Tabelle 1.1: SI-Einheiten und ihre Basisgrößen

Die aktuell gültigen Definitionen der in obiger Tabelle aufgeführten Einheiten sind:

- Eine Sekunde ist das 9.192.631.770-fache der Periodendauer des Hyperfeinstrukturübergangs $\Delta\nu$ im Cäsium-Atom ^{133}Cs .
- Ein Meter ist die Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von $t = \frac{1}{299.792.458}$ s zurücklegt.

- Das Kilogramm ist seit Mai 2019 vom genau definierten Planckschen Wirkungsquantum abhängig:
 $1\text{ kg} = \frac{h}{6,62607015 \cdot 10^{-34} \frac{\text{s}}{\text{m}^2}}$
- Das Ampere ist seit 2019 durch die Elementarladung definiert. Ein Ampere ist der Stromfluss von $\frac{e}{1,602176634} \cdot 10^{-19} \frac{1}{\text{s}}$ Elementarladungen pro Sekunde.
- Ein Kelvin entspricht einer Änderung der thermodynamischen Temperatur, die mit einer Änderung der thermischen Energie (kT) um $1,380649 \cdot 10^{-23} \text{ J}$ einhergeht.
- Ein Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das $6,02214076 \cdot 10^{23}$ eines bestimmten Einzelteilchens enthält.
- Eine Candela ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, die mit einer Frequenz von 540 THz emittiert und die eine Strahlungsintensität in dieser Richtung von $\frac{1}{683} \frac{\text{W}}{\text{sr}}$ hat.

Die zur Definition des SI-Systems verwendeten Naturkonstanten sind:

- Hyperfeinstrukturübergang: $^{133}\text{Cs}\Delta\nu = 9.192.631.770 \text{ Hz}$
- Lichtgeschwindigkeit: $c = 299.792.458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
- Elementarladung: $e = 1,602176634 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
- Boltzmann-Konstante: $k_B = 1,38064910^{-23} \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2\cdot\text{K}}$
- Avogadro-Konstante: $N_A = 6,02214076 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$
- Photometrisches Strahlungsäquivalent einer monochromatischen Strahlung der Frequenz 540 THz:
 $K_{\text{cd}}(540 \text{ THz}) = 683 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$

Abgeleitete SI-Einheiten

Aus diesen sieben Grundeinheiten werden weitere 22 Größen mit eigener Bezeichnung hergeleitet. Einige für die Elektrotechnik wichtige Beispiele sind nachfolgend aufgeführt:

Größe	Formel	Einheit	Basiseinheit
Kraft	F	Newton, N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$
Energie	E	Joule, J	$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$
Leistung	P	Watt, W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3$
Spannung	U	Volt, V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W/A} = 1 \text{ Nm/As} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3\text{A}$
Ladung	Q	Coulomb, C	$1 \text{ C} = 1 \text{ As}$
Widerstand	R	Ohm, Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V/A} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^3\text{A}^2$
Kapazität	C	Farad, F	$1 \text{ F} = 1 \text{ As/V} = 1 \text{ s}^4\text{A}^2/\text{kg m}^2$
Induktivität	L	Henry, H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2\text{A}^2$
magn. Fluss	Φ	Weber, Wb	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2\text{A}$
Flussdichte	B	Tesla, T	$1 \text{ T} = 1 \text{ Vs/m}^2 = 1 \text{ kg/s}^2\text{A}$

Tabelle 1.2: Größen und ihre Basiseinheiten

Wichtig: In Gleichungen mit physikalischen Größen treten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens sowohl Maßzahlen als auch Maßeinheiten auf. Eine Überprüfung der Einheiten auf Gleichheit (im Zweifel heruntergebrochen auf die SI-Basiseinheiten) liefert oft eine gute Kontrolle hinsichtlich der Plausibilität der Rechnung.

1.2.2 Zehnerpotenzen

Zur besseren Lesbarkeit sehr kleiner oder großer Zahlenwerte können Einheiten mit Zehnerpotenzen skaliert werden. Dazu wird die Bezeichnung der Zehnerpotenz ohne Leerzeichen direkt vor die Einheit geschrieben. Oft wird dabei diejenige Zehnerpotenz gewählt, bei der die Zahl vor dem Komma möglichst wenige Stellen hat.

Eine andere Möglichkeit zur Verbesserung der Lesbarkeit ist die sogenannte Exponentialdarstellung. Dabei wird die Maßzahl mit der entsprechenden Zehnerpotenz direkt multipliziert. Die Anzahl der verwendeten Nachkommastellen muss physikalisch sinnvoll sein. Ist dazu nichts weiter bekannt, werden meist zwei Nachkommastellen verwendet.

Bezeichnung	Potenz	Potenz	Bezeichnung
Dezi, d	10^{-1}	10^1	Deka, da
Zenti, c	10^{-2}	10^2	Hekto, h
Milli, m	10^{-3}	10^3	Kilo, k
Mikro, μ	10^{-6}	10^6	Mega, M
Nano, n	10^{-9}	10^9	Giga, G
Piko, p	10^{-12}	10^{12}	Tera, T
Femto, f	10^{-15}	10^{15}	Peta, P
Atto, a	10^{-18}	10^{18}	Exa, E

Achtung: Bei Gewichtsangaben werden Präfixe nicht auf die SI-Basiseinheit Kilogramm (kg), sondern auf die Einheit Gramm (g) angewendet.

Bei potenzierten Einheiten, wie zum Beispiel Flächen oder Volumeneinheiten, bezieht sich der Skalierungspräfix immer auf die Grundeinheit, er muss also auch potenziert werden.

$$1 \text{ m}^1 = 100^1 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m}^2 = 100^2 \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 = 10.000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ m}^3 = 100^3 \cdot (10^{-2} \text{ m})^3 = 1.000.000 \text{ cm}^3$$

1.3 Die elektrische Ladung



Lernziele: Die Elektrische Ladung

Die Studierenden können

- die Eigenschaften elektrischer Ladungen sowie im Zusammenhang stehende physikalische Phänomene beschreiben
- elektrische Felder beschreiben und für einfache Ladungsanordnungen berechnen
- mit dem Coulomb'schen Gesetz Kräfte auf Ladungen berechnen

1.3.1 Der Atomaufbau

Viele physikalische Prozesse sind nur durch klassische Phänomene aus der Mechanik nicht zu erklären. Bereits etwa 600 v. Chr. entdeckte der griechische Philosoph Thales von Milet, dass Bernstein, wenn er an einem Fell gerieben wird, leichte Objekte wie Federn anzieht. In weiteren Experimenten konnte bedeutend später nachgewiesen werden, dass es neben der Gravitationskraft eine weitere, sogenannte

elektrische Kraft gibt. Diese kann sowohl anziehend als auch abstoßend wirken. Als Ursache dieser Kraftwirkungen werden **elektrische Ladungen** postuliert und als (historisch willkürlich) **positiv** und **negativ** festgelegt. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen hingegen ziehen sich an.

Eine einfache, den beobachteten Effekten zu Grunde liegende Modellvorstellung entwickelte Nils Bohr 1913. Laut diesem in Abbildung 1.1 dargestellten Atommodell besteht jedes Atom aus einem Atomkern und einer Elektronenhülle. Der Atomkern wiederum besteht aus dicht gepackten Protonen (positive Ladungsträger) und Neutronen (elektrisch neutral). Die Hülle besteht aus Elektronen (negative Ladungsträger), die den Atomkern auf konzentrischen Bahnen mit unterschiedlichen Radien umkreisen.

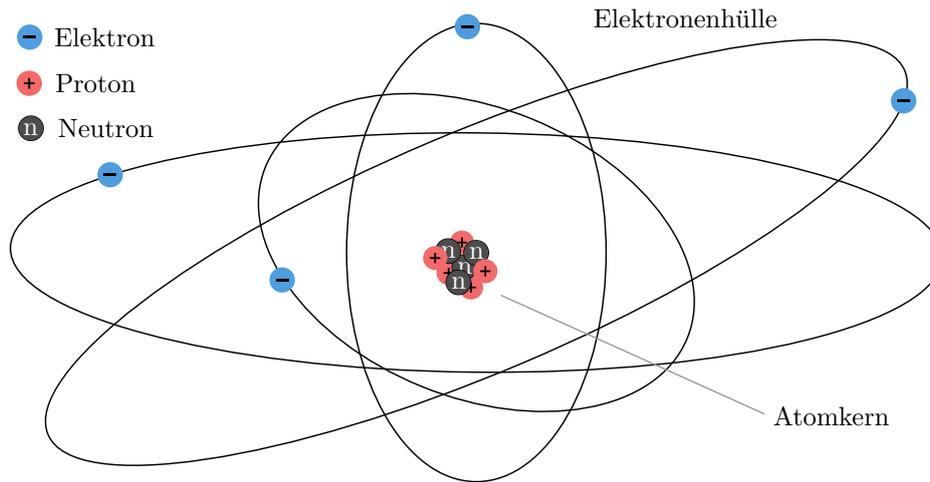


Abbildung 1.1: Illustration des Bohr'schen Atommodells

Die **Ladung** Q eines Protons und eines Elektrons ist betragsmäßig gleich und wird als Elementarladung e bezeichnet. Ihr experimentell bestimmter Wert beträgt $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Das Proton ist positiv und das Elektron negativ geladen. Ein Atom hat im Regelfall die identische Anzahl Protonen wie Elektronen und ist daher von außen gesehen elektrisch neutral.

Das Coulomb ist die Einheit der elektrischen Ladung und wird wie folgt beschrieben:

$$[Q] = 1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ C} = 1 \text{ As}$$

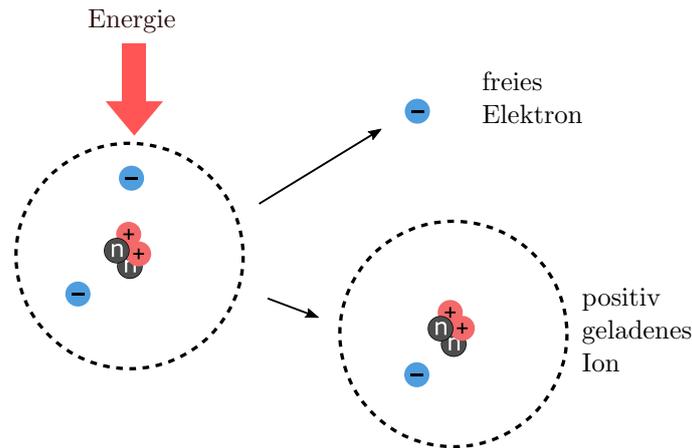


Abbildung 1.2: Trennen eines Atoms in ein positiv geladenes Ion und ein freies Elektron durch Energiezufuhr

Durch Zufuhr von Energie oder durch Wechselwirkung mit anderen Teilchen (beispielsweise durch Reibung eines Plastikstabes an einem Stück Stoff, Reibung von Kleidung an einer Kunststofffrucht, UV-Strahlung) kann sich die Elektronenanzahl eines Atoms verändern. Bekommt ein Atom ein oder mehrere zusätzliche Elektronen, liegt also ein **Elektronenüberschuss** vor, wird es negativ geladen. Verliert es Elektronen, also bei einem **Elektronenmangel**, wird es positiv geladen. In beiden Fällen wird es als Ion bezeichnet. Da jeweils nur ganze Elektronen dem Ion hinzugefügt oder abgezogen werden können, ist die entsprechende Ladung Q eines Ions (und damit auch jedes anderen Objektes) immer ein Vielfaches der Elementarladung e .

Merke:

$$Q = \pm n \cdot e$$

Die Masse der sich im Kern befindenden Protonen und Neutronen ist um viele Größenordnungen höher als die der Elektronen. Folglich sind die aus dem Atomverband befreiten Elektronen als kleinste, leichteste und beweglichste Ladungsträger für die Elektrotechnik von großer Bedeutung.

1.3.2 Ladungsdichten

Nicht nur die Anzahl, sondern auch die Verteilung der elektrischen Ladungsträger spielt in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle. So ist es beispielsweise für die Gestaltung und Funktionsweise von elektrischen Bauelemente (wie Widerständen, Kondensatoren oder Halbleiterbauelementen) entscheidend zu wissen, wie sich die Ladungen entlang von Linien, auf Oberflächen oder innerhalb von Volumina verteilen. Dabei wird in diesem Modul von einer gleichmäßigen Ladungsträgerverteilung ausgegangen.

Die **Punktladung** dient als idealisiertes Modell einer Ladungsverteilung auf einen Punkt ohne räumliche Ausdehnung. Ist die reale räumliche Verteilung an der entsprechenden Stelle nicht weiter relevant, werden Ladungen meist als Punktladungen betrachtet.

Die **Linienladungsdichte** λ (lambda), angegeben in C/m, beschreibt die Verteilung der elektrischen Ladung entlang einer Linie, wie sie beispielsweise in einem sehr dünnen Draht vorkommt, der nur in einer Dimension ausgedehnt ist (siehe Abbildung 1.3).

Da die Ladungsträger sowie ihre atomaren Strukturen im Vergleich zu den in Bauteilen verwendeten Strukturen vernachlässigbar klein sind, kann statt der diskreten eine kontinuierliche Verteilung ange-

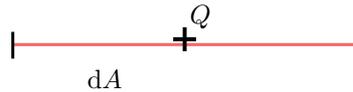


Abbildung 1.3: Linienladungsdichte: Eine Ladung Q gleichmäßig verteilt auf einem eindimensionalen Pfad mit der Länge dl

nommen werden. Folglich lässt sich die Linienladungsdichte als Ableitung der Ladung pro Linienlänge beschreiben.

$$\lambda = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$$

Die Ladung Q ist analog dazu das Integral der Linienladungsdichte λ über die Länge l .

$$Q = \int_l \lambda dl$$

Die **Flächenladungsdichte** σ (sigma) in C/m^2 beschreibt die Verteilung der Ladung Q , die pro Flächeneinheit A verteilt ist (siehe Abbildung 1.4). Sie wird beispielsweise bei der Berechnung von Kondensatoren, welche zu einem späteren Zeitpunkt eingeführt werden, benötigt.

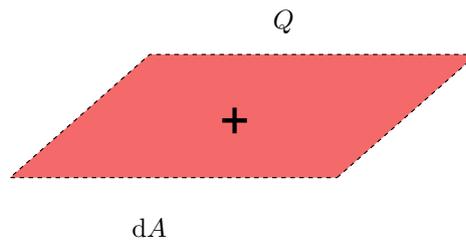


Abbildung 1.4: Flächenladungsdichte: Eine Ladung Q gleichmäßig verteilt auf einer zweidimensionalen Fläche mit der Größe dA .

Vergleichbar zur Linienladungsdichte kann auch σ über eine Grenzwertbetrachtung und damit über eine Ableitung beschrieben werden:

$$\sigma = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}$$

$$Q = \iint_A \sigma dA$$

Die **Raumladungsdichte** ρ (rho) in C/m^3 gibt die Anzahl der freien Ladungsträger im betrachteten Volumen an. Hierbei kann es sich beispielsweise um Elektronen in einem Leiter oder geladene Ionen in einem Gasgemisch handeln.

$$\rho = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

$$Q = \iiint_V \rho dV$$

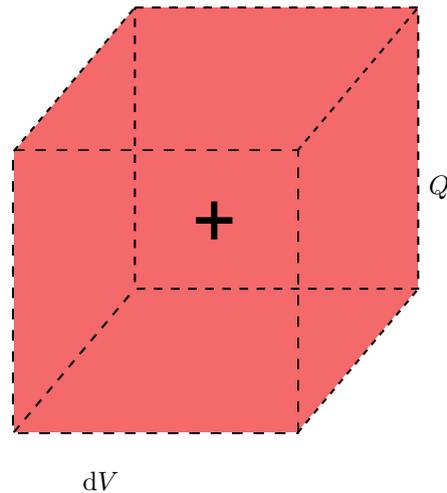


Abbildung 1.5: Raumladungsdichte ρ : Eine Ladung Q gleichmäßig verteilt in einem dreidimensionalen Volumen mit der Größe dV .

1.3.3 Elektrische Leiter - Metalle

Diese Aufteilung der Ladungsträger ist beispielsweise in Metallen gut zu sehen. Viele Metalle weisen einen besonderen Atomverband auf. Die Atome ordnen sich bei ihnen in einer regelmäßigen **Gitterstruktur** an. Dadurch sind die äußersten Elektronen eines jeden Atoms innerhalb des Metallkörpers nahezu frei beweglich. Diese freien Elektronen verleihen Metallen ihre elektrisch leitende Eigenschaft. In Abbildung 1.6 wird diese Struktur dargestellt. Häufig werden Metalle in der Elektrotechnik deshalb kurz als (elektrische) Leiter bezeichnet. Im Allgemeinen sind Leiter elektrisch neutral, da in jedem Atom die Summe aller Elektronen der Summe aller Protonen entspricht.

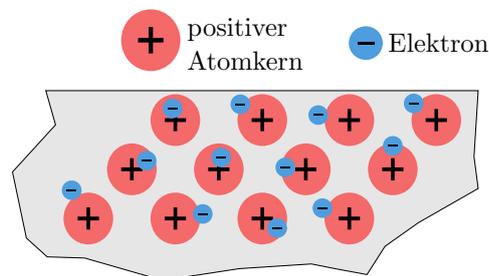


Abbildung 1.6: Ausschnitt aus einem Metallblech. Eingezeichnet sind die positiv geladenen Atomkerne sowie deren frei bewegliche äußeren Elektronen.

Durch das Hinzuführen von Elektronen entsteht ein Elektronenüberschuss, wodurch der Leiter negativ geladen wird. Werden Elektronen entzogen entsteht ein Elektronenmangel und der Leiter wird positiv geladen (Abbildung 1.7).

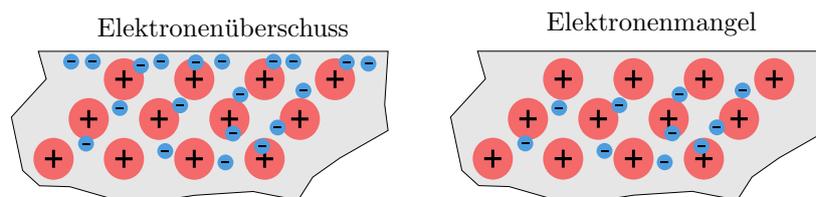


Abbildung 1.7: Leiter, bei denen an der Oberfläche ein Elektronenüberschuss (links) beziehungsweise ein Elektronenmangel (rechts) herrscht.

1.3.4 Das Coulombsche Gesetz

Geladene Teilchen beeinflussen sich gegenseitig, wobei sich Ladungen gleichen Vorzeichens abstoßen und unterschiedlichen Vorzeichens anziehen. Bereits um 1785 konnte Charles Augustin de Coulomb experimentell nachweisen, dass sich der Betrag der Kraft proportional zu jeder der kugelsymmetrischen Ladungen Q_1 und Q_2 , aber antiproportional zum Quadrat des Abstandes r der beiden Ladungen voneinander verhält.

Die proportionale Wechselwirkung zwischen den Ladungen Q_1 sowie Q_2 und dem Abstandsquadrat r^2 führt mit der Proportionalitätskonstante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ zur Kraft zwischen den Ladungen. Dieser proportionale Zusammenhang ist in Abbildung 1.8 dargestellt.

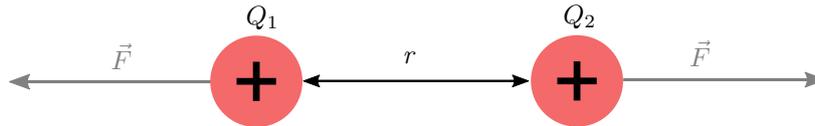


Abbildung 1.8: Anordnung von zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 sowie die auf sie wirkenden Kräfte.

Durch das Einführen eines Proportionalitätstermes kann aus dem zuvor bestimmten proportionalen Zusammenhang die resultierende Kraft F direkt errechnet werden. Die resultierende Gleichung 1.1 wird Coulombsches Gesetz genannt.

$$F \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \rightarrow F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (1.1)$$

Der Faktor ϵ_0 wird als **elektrische Feldkonstante** (auch Dielektrizitätskonstante des Vakuums) bezeichnet, während die 4π ihren Ursprung in geometrischen Betrachtungen der Anordnung haben.

Der Wert der elektrischen Feldkonstante beträgt etwa:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm}$$

Gibt es mehr als zwei Ladungen, kann die resultierende Kraft auf jede der einzelnen Ladungen durch die Addition aller Einzelkräfte errechnet werden, die sich aus jeder Zweierkombination von Ladungen ergibt, an der die Zielladung beteiligt ist. Dieser Effekt wird als Superpositionsprinzip bezeichnet, welches auch im Modul 5 *Erweiterte Gleichstromnetzwerke* zur Berechnung von sich ergebenden Spannungen verwendet wird.

In der Praxis wird dieser Effekt unter anderem beim elektrostatischen Aufspannen von Papier auf Plottern, bei Laserdruckern zur Übertragung des Tonerpulvers auf das Papier, bei Touchscreens zur Bestimmung des Berührungspunktes oder bei Plasmabildschirmen zur kontrollierten Gasentladung von Ionen zur Lichterzeugung genutzt.

1.4 Das elektrische Feld

Lernziele: Das elektrische Feld

Die Studierenden

- entwickeln ein "Gefühl" für elektrische Felder
- elektrische Felder beschreiben und für einfache Ladungsanordnungen berechnen
- das Verhalten elektrischer Felder an Leitern charakterisieren

1.4.1 Charakterisierung des elektrischen Feldes

Wie gezeigt haben elektrische Ladungen einen direkten Einfluss auf andere Ladungen. Dies geschieht dadurch, dass sie die Eigenschaften des Raums um sich herum verändern. Diese Veränderungen können durch ein Feldmodell beschrieben werden. Der Feldbegriff ist in der Physik von fundamentaler Bedeutung. Beispiele hierfür sind das Temperaturfeld, in dem die Temperatur abhängig von seinem Ort durch eine skalare Größe beschrieben wird. Neben solchen skalaren Feldern gibt es auch Vektorfelder, in denen jedem Ort neben einer Größe auch eine Richtung, in die sie wirkt, zugeschrieben wird. Beispiele hierfür sind das Gravitationsfeld oder ein Strömungsfeld, welches beispielsweise die Richtung und Geschwindigkeit von Wasserteilchen beschreibt.

Das **elektrische Feld** wird durch **Größe** (in Newton) sowie die **Richtung** der **Kraft** \vec{F}_E auf eine positive Probeladung Q_2 beschrieben und durch Feldlinien charakterisiert. Dargestellt wird diese Anordnung in Abbildung 1.9.

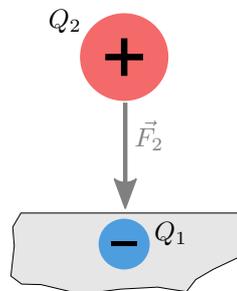


Abbildung 1.9: Anziehende Kraftwirkung F_2 einer Probeladung Q_2 in Richtung ruhender Ladung Q_1

Die elektrische Feldstärke ist also:

Merke:

$$\text{Elektrische Feldstärke} = \frac{\text{Kraft auf Ladung}}{\text{Ladung}}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_2}{Q_2} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (1.2)$$

Nachteilig an dieser Definition erscheint auf den ersten Blick, dass die elektrische Feldstärke von der Probeladung Q_2 abhängig zu sein scheint. Durch Einsetzen des Coulombschen Gesetzes (Gleichung 1.1) in Gleichung 1.2 lässt sich jedoch zeigen, dass die Kraft F_2 immer proportional zur Probeladung Q_2 steigt. Ihr Verhältnis liefert also immer den gleichen Betrag für die elektrische Feldstärke, und diese wird, wie in Abbildung 1.10 gezeigt, unabhängig von der Probeladung:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_2}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \quad (1.3)$$

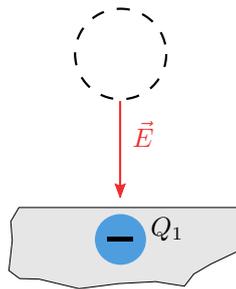


Abbildung 1.10: Das durch Q_1 hervorgerufene elektrische Feld ist unabhängig von jeglicher Probeladung

1.4.2 Elektrische Leiter und elektrostatische Felder I

Im vorherigen Kapitel wird die Wirkung von Punktladungen auf das elektrische Feld untersucht. Da im Alltag elektrische Felder jedoch häufig von geladenen, elektrischen Leitern (wie Metallen) ausgehen, werden sie hier gesondert aufgeführt.

Liegt ein Elektronenüberschuss vor, wird - wie in Abbildung 1.7 dargestellt - die positive Probeladung Q in Richtung der Plattenoberflächen angezogen. Auch die Feldlinien \vec{E} des elektrischen Feldes verlaufen in Richtung der Leiteroberfläche. Im Falle eines Elektronenmangels wird die Probeladung abgestoßen, auch die Feldlinien führen vom positiven Leiter weg.

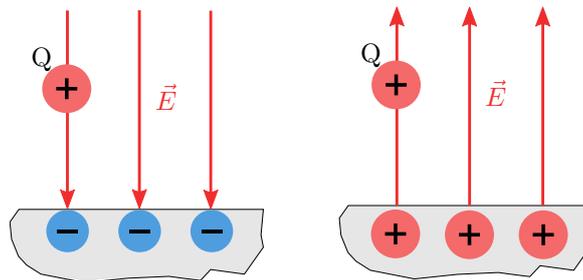


Abbildung 1.11: Richtung der elektrischen Feldstärke \vec{E} von einem negativ (links) sowie positiv (rechts) geladenen Leiter auf eine positive Probeladung

Da die Elektronen innerhalb eines Leiters frei beweglich sind, würden diese im Falle eines elektrischen Feldes innerhalb eines Leiters durch dieses Feld angezogen (oder abgestoßen) werden, bis sich das Feld innerhalb des Leiters ausgeglichen hat (siehe Abbildung 1.12). Folglich kann in diesem Fall kein elektrisches Feld innerhalb eines Leiters existieren

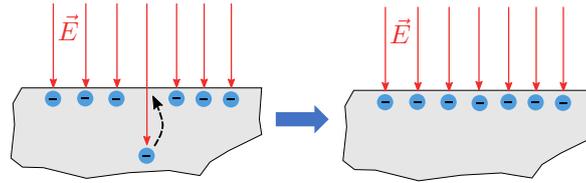


Abbildung 1.12: Freier Ladungsträger wird durch das elektrische Feld augenblicklich an den Leiter- rand gezogen. Innerhalb des Leiters kann deshalb kein elektrostatisches Feld existieren.

Dies führt zu der Erkenntnis, dass die elektrischen Feldlinien zwangsläufig **senkrecht** auf der Oberfläche von Leitern stehen müssen (siehe Abbildung 1.13). Eine schräg stehende Feldlinie ließe sich sonst vektoriell in eine senkrecht und eine horizontal auf der Leiteroberfläche verlaufende Komponente zerlegen. Da diese horizontale Komponente augenblicklich durch die sich bewegenden Ladungsträger ausgleichen wird, kann sie nicht existieren. Dieser Effekt tritt ausschließlich bei elektrisch leitenden Materialien auf, in nicht leitenden Materialien (sogenannten Isolatoren) gibt es keine beweglichen Ladungsträger, welche die horizontale Komponente ausgleichen können.

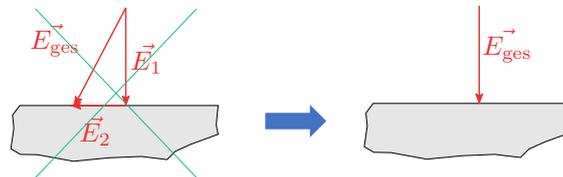


Abbildung 1.13: Durch die Eliminierung der horizontalen Komponente \vec{E}_2 des elektrischen Feldes bleibt ausschließlich die vertikale Komponente \vec{E}_1 bestehen, welche senkrecht auf der Leiteroberfläche steht.

1.4.3 Beispiele elektrischer Felder

Das einfachste elektrische Feld ist das **Homogenfeld**. In diesem Feld sind sowohl der Betrag als auch die Richtung der elektrischen Feldstärke \vec{E} an jedem Punkt konstant. Eine sich in diesem Feld befindliche Probeladung erfährt also an jeder Stelle die gleiche Kraftwirkung. Erzeugen lässt sich ein solches Feld wie in Abbildung 1.14 dargestellt beispielsweise zwischen zwei parallelen Metallplatten, welche mit unterschiedlichen Ladungen Q aufgeladen sind. Die Feldlinien verlaufen grundsätzlich von der positiv aufgeladenen zur negativ aufgeladenen Metallplatte. Häufig wird die Dichte, in der die Feldlinien eingezeichnet sind, als Maß für die Stärke des elektrischen Feldes verwendet. Je dichter die Feldlinien eingezeichnet sind, desto stärker ist das elektrische Feld an dieser Stelle.

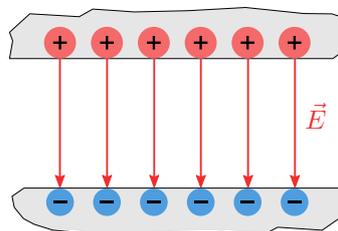


Abbildung 1.14: Ein elektrisches Homogenfeld zwischen zwei unterschiedlich geladenen Metallplatten

Das elektrische Feld einer Punktladung wird auch als **Radialfeld** (siehe Abbildung 1.15) bezeichnet. Unter der idealisierten Annahme, dass sich unendlich weit entfernt eine Hülle mit entgegengesetzter Ladung befindet, breiten sich die Feldlinien geradlinig aus. In ihrer symmetrischen Anordnung zeigen sie bei positiven Punktladungen in Richtung der negativen Hülle, bei negativen Punktladungen in Richtung der Punktladung.

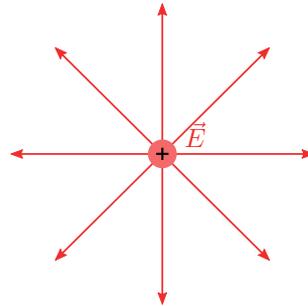


Abbildung 1.15: Radiales elektrische Feld einer positiven Punktladung.

Die elektrische Feldstärke \vec{E} ist direkt proportional zur Ladung Q , verringert sich jedoch mit zunehmendem Abstand r von ihr quadratisch. Errechnet werden kann ihr Betrag über:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (1.4)$$

Die mit zunehmendem Abstand r von der Punktladung schwächer werdende elektrische Feldstärke zeigt sich neben dem mathematischen Zusammenhang auch in dem größer werdenden Abstand zwischen den Feldlinien.

Kompliziertere elektrische Felder ergeben sich schon beim Hinzufügen einer zweiten Punktladung. Im Fall von zwei betragsgleichen Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens (Abbildung 1.16) ergibt sich zwischen den Ladungen ein nahezu gleichmäßiges Feld, während es weiter außen bedeutend schwächer wird.

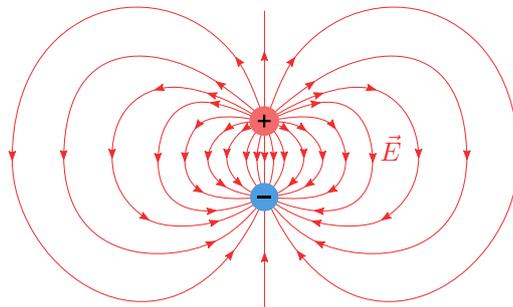


Abbildung 1.16: Das elektrische Feld von zwei betragsgleichen Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens

Der Fall mit zwei identischen Punktladungen zeigt wie in Abbildung 1.17 eine Besonderheit des elektrischen Feldes. Während sich die Feldlinien im Rest des Raumes erwartbar von den positiven Ladungen wegzeigen, gibt es zwischen den Punktladungen einen freien Raum ohne Feldlinien. Dies liegt daran, dass sich die entgegengesetzten Feldlinien in diesem Zwischenraum gegenseitig kompensieren. Im Punkt zwischen beiden Ladungen liegt keine elektrische Feldstärke vor, auf der Ebene zwischen den Ladungen neutralisieren sich die jeweiligen horizontalen Komponenten, und es liegt lediglich ein elektrisches Feld in der jeweiligen vertikalen Richtung vor.

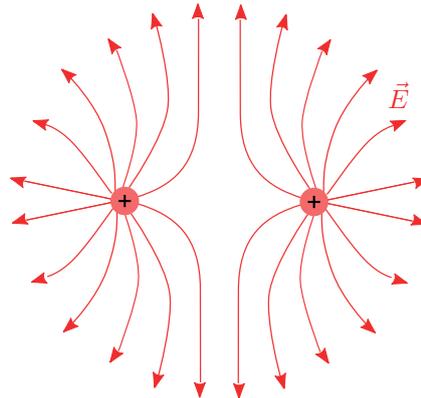


Abbildung 1.17: Das elektrische Feld von zwei betragsgleichen Ladungen gleichen Vorzeichens

1.5 Das elektrische Potential

Lernziele: Das elektrische Potential

Die Studierenden können

- Verschiebearbeit von Ladungen im elektrischen Feld berechnen
- Äquipotentialflächen bestimmen und einzeichnen
- elektrische Spannungen aus gegebenen Feldgrößen bestimmen

1.5.1 Arbeit im elektrischen Feld

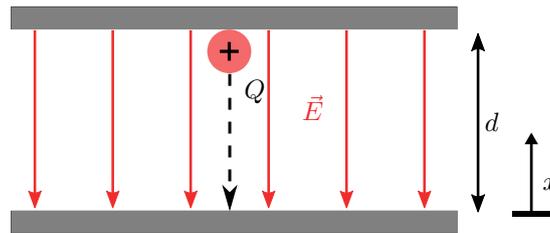
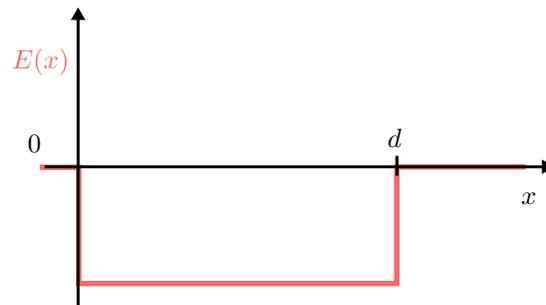
Befindet sich eine Ladung innerhalb eines elektrischen Feldes, so wird eine Kraft auf sie ausgeübt. Wird die Ladung nun innerhalb des Feldes bewegt, muss eine Arbeit verrichtet werden. Analog ist hier das Gravitationsfeld zu sehen, bei dem eine Arbeit verrichtet werden muss, wenn eine Masse angehoben wird, also die potentielle Energie des Objektes erhöht wird. Dieser Abschnitt ist als kurzer Vorgriff auf Modul 2 *Energie und Leistung* zu sehen, in welchem die elektrische Arbeit genau definiert wird.

Das Vorzeichen einer verrichteten Arbeit ist abhängig davon, ob die Arbeit auf das betrachtete System (hier: Potentielle Energie der Probeladung Q im elektrischen Feld \vec{E}) oder auf den Erzeuger dieser Arbeit bezogen wird. In diesem Skript wird sich auf den Erzeuger bezogen. Muss dieser eine Arbeit verrichten, um die potentielle Energie des Systems zu erhöhen, ist die verrichtete Arbeit als negativ anzusehen. Wird eine Arbeit vom System freigesetzt, sprich die potentielle Energie der Probeladung sinkt, ist die Arbeit positiv.

Physikalisch gesehen ist die Arbeit das Produkt aus der Kraft, die benötigt wird, um die Ladung zu bewegen, multipliziert mit der zurückgelegten Wegstrecke. Mit der Erkenntnis aus Kapitel 4.1, dass die elektrische Feldstärke der Quotient aus der Kraft auf eine Ladung pro Ladung ist (siehe Gleichung 1.2), lässt sich die zum Bewegen der Ladung benötigte Arbeit ermitteln.

Nachfolgend soll berechnet werden, welche Arbeit W bei der positiven Probeladung Q aus Abbildung 1.18 freigesetzt wird, wenn sie sich entlang der Feldlinien in Richtung der negativ geladenen Leiterplatte bewegt.

Die Verlauf der elektrischen Feldstärke sowie Richtung von \vec{E} gegenüber dem Weg x lässt sich wie in Abbildung 1.19 gezeigt darstellen.

Abbildung 1.18: Probeladung Q in einem elektrischen Homogenfeld \vec{E} Abbildung 1.19: Feldstärke $E(x)$ im betrachteten Aufbau aus Abbildung 1.18

$$W = \int_d^0 \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Da die Richtung des elektrischen Feldes \vec{E} der Raumrichtung x entgegengesetzt ist, führt ein Eliminieren der Vektorpfeile zu einem negativen Vorzeichen vor dem Integral. Durch Einsetzen der Kraft F in Gleichung 1.2 ergibt sich:

$$W = -Q \int_d^0 E \cdot dx$$

Lösen des Integrals und Einsetzen der Integrationsgrenzen ergibt:

$$W = -Q \cdot E [x]_d^0 = -Q \cdot E(0 - d)$$

$$W = Q \cdot E \cdot d$$

Die Differenz der zu- oder abgeführten Arbeit einer Ladung im elektrischen Feld beträgt also:

$$\Delta W = Q \cdot E \cdot \Delta x \quad (1.5)$$

Beispiel 1.1

Für die in Abbildung 1.18 dargestellte Probeladung soll errechnet werden, wie viel Energie auf ihrem Weg vom Startpunkt zur negativen Platte freigesetzt wird.

Die Probeladung betrage $Q = 1\mu\text{C}$, der Abstand zur Platte betrage $0,1\text{ m}$ und das elektrische Feld sei $E = 200\text{ V/m}$.

Die Arbeit W berechnet sich dann zu

$$W = Q \cdot E \cdot d = 1 \cdot 10^{-6}\text{C} \cdot 200\text{V/m} \cdot 0,1\text{m} = 2 \cdot 10^{-5}\text{J}$$

Analog zu einem Objekt im Gravitationsfeld führt das elektrische Feld einer Ladung Energie zu. Dadurch wird diese beschleunigt, und die potentielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt.

Es ist unmittelbar einsichtig, dass der Betrag der im elektrischen Feld gespeicherten und nutzbaren potentiellen Energie der Probeladung Q vom Ort x der Probeladung linear abhängig ist (siehe Abbildung 1.20). Verfügt die Probeladung bereits im Vorfeld über eine kinetische Energie, oder geht das elektrische Feld über den betrachteten Abschnitt hinaus, lässt sich die Gleichung um den zusätzlichen Term W_0 erweitern:

$$W(x) = Q \cdot E \cdot x + W_0 \quad (1.6)$$

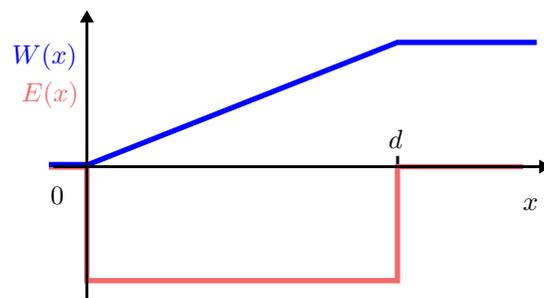


Abbildung 1.20: Linearer Zusammenhang zwischen dem Ort x und der potentiellen Energie $W(x)$ der Probeladung.

Der Übergang zwischen der im elektrischen Feld gespeicherten potentiellen Energie in die kinetische Energie der Probeladung kann über das Schaubild in Abbildung 1.21 dargestellt werden.

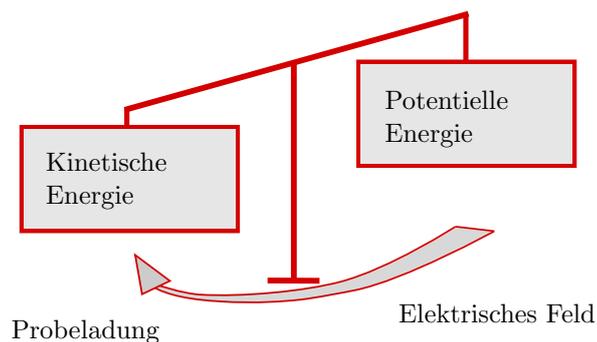


Abbildung 1.21: Übergang von potentieller Energie im elektrischen Feld zu potentieller Energie in der Probeladung

Zur allgemeinen Beschreibung muss die technisch nutzbare Feldenergie unabhängig von der Probeladung Q sein. Dazu wird die potentielle Energie auf ein Arbeitspotential normiert.

$$\frac{W(x)}{Q} = E \cdot x + \frac{W_0}{Q}$$

1.5.2 Definition des elektrischen Potentials

Die potentielle Energie normiert auf die betrachtete Ladung Q ist das **elektrische Potential** φ des elektrischen Feldes. Dieses ist für jeden Punkt im Raum unabhängig von weiteren Einflussfaktoren direkt bestimmbar. Das Potentialfeld ist im Gegensatz zum elektrischen Feld ein Skalarfeld. Das bedeutet, dass jedem Punkt im Raum unabhängig von weiteren Einflussfaktoren ein eindeutiges elektrisches Potential zugeordnet werden kann, jedoch keine Richtung dieser Größe im Raum vorliegt.

$$\varphi = \frac{W}{Q} \quad (1.7)$$

$$[\varphi] = \text{V (Volt)}$$

Abbildung 1.22 zeigt ein elektrisches Homogenfeld, in welches die Potentiallinie eingezeichnet ist, auf welcher sich die Ladung Q gerade befindet. Mit zunehmender Entfernung von der positiven Platte in x -Richtung steigt das Potential an, und kann wie folgt berechnet werden:

$$\varphi(x) = E \cdot x + \varphi_0 \quad (1.8)$$

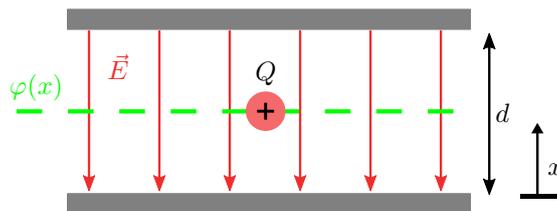


Abbildung 1.22: Elektrisches Homogenfeld mit eingezeichneter Potentiallinie $\varphi(x)$

Die Steigung des Potentials ist durch die elektrische Feldstärke \vec{E} bestimmt. Das elektrische Potential φ und die elektrische Feldstärke hängen durch den negativen Gradienten des Potentials zusammen. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 1.23 verdeutlicht.

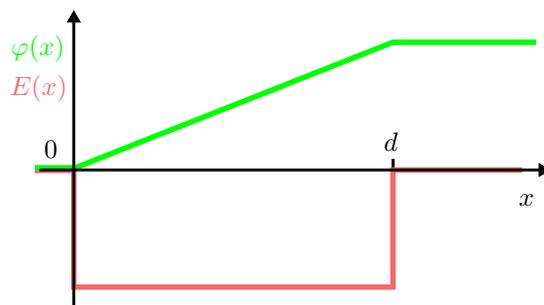


Abbildung 1.23: Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potential φ und der elektrischen Feldstärke E im Homogenfeld

Die Beziehung kann im Homogenfeld durch die folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \quad (1.9)$$

In inhomogenen, dreidimensionalen Feldern gilt die allgemeine Gleichung, bei der der Gradient von φ in jede Raumrichtung errechnet wird:

$$E = -\text{grad } \varphi(x,y,z) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (1.10)$$

Um das elektrische Potential an einem Punkt vollständig zu beschreiben, muss wie in Gleichung 1.8 aufgeführt als notwendige Randbedingung ein Bezugspotential φ_0 gewählt werden, welches eindeutig definiert ist. Prinzipiell ist dieses Potential beliebig wählbar, in der Regel wird jedoch eine Bezugselektrode gewählt, für die das Potential gleich null gesetzt wird. Im Fall des in Abbildung 1.22 gezeigten Aufbaus wäre dies:

$$\varphi_0 = \varphi(x = 0) = 0$$

1.5.3 Zusammenhang zwischen Arbeit und Potential

Im homogenen elektrischen Feld ist das Potential φ wie Formel 1.8 zeigt ausschließlich von der Entfernung x zur Bezugselektrode abhängig. Dies bedeutet, dass alle Flächen, die senkrecht zum Feld stehen, ein konstantes Potential haben. Solche Flächen werden als Äquipotentialflächen bezeichnet, wie sie in Abbildung 1.24 mit Hilfe der grünen Linien dargestellt sind. Es muss keine Arbeit verrichtet werden, um eine Ladung entlang einer solchen Fläche zu bewegen.

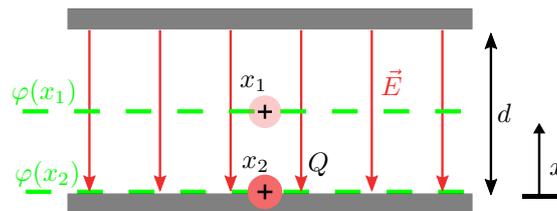


Abbildung 1.24: Elektrisches Homogenfeld, in dem sich eine Probeladung Q von der Äquipotentiallinie $\varphi(x_1)$ auf die Äquipotentiallinie $\varphi(x_2)$ bewegt

Die potentielle Energie W_{12} einer Probeladung Q , die durch das elektrische Feld von einem Punkt x_1 nach x_2 bewegt wird, kann durch die Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten beschrieben werden. Die Reihenfolge der Indizes der Arbeit W_{12} beschreibt dabei die Bewegungsrichtung.

Wird eine Probeladung wie in Abbildung 1.24 gezeigt von der Äquipotentialfläche $\varphi(x_1)$ nach $\varphi(x_2)$ bewegt, nimmt sie dabei die folgende Energie auf:

$$W_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

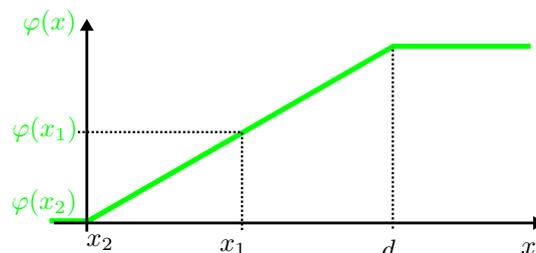


Abbildung 1.25: Darstellung des Potentialverlaufs $\varphi(x)$ innerhalb des elektrischen Homogenfeldes

Bei der in Abbildung 1.25 getroffenen Wahl der Bezugsfläche von $\varphi_2 = 0$ ergibt sich für die zugeführte Arbeit das Ergebnis:

$$W_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - 0) = Q \cdot \varphi_1$$

Mit Hilfe des nachfolgenden Gedankenexperimentes lässt sich eine weitere zentrale Eigenschaft des elektrischen Feldes aufzeigen.

Wie in Abbildung 1.26 gezeigt wird eine Probeladung Q in einem Homogenfeld zwischen den Punkten 1-4 in einem geschlossenem Umlauf bewegt. Die bei diesem Vorgang zu verrichtenden Teilenergien werden betrachtet. So wird bei einer Bewegung vom Punkt 1 zu Punkt 2 eine Arbeit von $W_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$ verrichtet, und von Punkt 4 zu Punkt 1 die Energie $W_{41} = Q \cdot (\varphi_4 - \varphi_1)$.

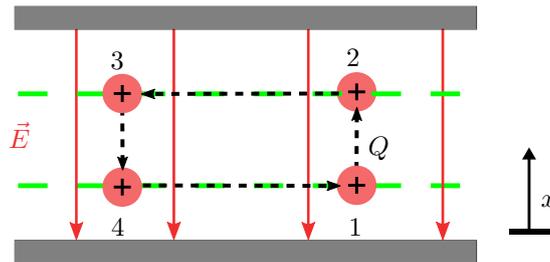


Abbildung 1.26: Darstellung des Potentialverlaufs $\varphi(x)$ innerhalb des elektrischen Homogenfeldes

Die für einen gesamten Umlauf benötigte Energie ergibt sich durch die Aufsummierung der vier Teilenergien:

$$W_{\text{ges}} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + Q \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) + Q \cdot (\varphi_3 - \varphi_4) + Q \cdot (\varphi_4 - \varphi_1)$$

Da die Ladung Q in allen Termen identisch ist, ergibt sich durch das Ausklammern von Q :

$$W_{\text{ges}} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_4 - \varphi_1)$$

$$\rightarrow W_{\text{ges}} = Q \cdot 0 = 0$$

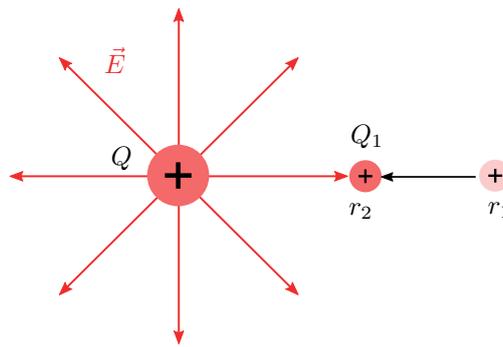
Für einen geschlossenen Umlauf einer Probeladung im Homogenfeld ist also keine Energie erforderlich, da sie ausschließlich vom Anfangs- und Endpunkt der Bewegung, nicht jedoch vom gewählten Weg abhängig ist.

Folglich wird beim elektrischen Feld auch von einem **wirbelfreien Quellenfeld** gesprochen. Dies bedeutet, dass die Feldlinien keine geschlossenen Linien bilden, sondern jeweils einen Anfang (auf positiven Ladungen) und einen Endpunkt (auf negativen Ladungen) haben.

Diese Betrachtung gilt nicht nur für das Homogenfeld, sondern trifft auf jedes elektrostatische Feld zu.

Beispiel 1.2: Arbeit im Radialfeld

In folgendem Beispiel soll die Probeladung Q_1 vom Abstand r_1 auf den Abstand r_2 an die feste Ladung Q herangeführt werden.



Q betrage 1 C, Q_1 1 mC. Welche Arbeit ist erforderlich, wenn $r_1 = 1$ m und $r_2 = 50$ cm seien?

$$W_{12} = Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{12} = Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dr$$

$$W_{12} = Q_1 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{r^2}$ beträgt $-\frac{1}{r}$.

$$W_{12} = Q_1 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} \right) = Q_1 \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right)$$

wobei $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$ dem Potential $\varphi(r)$ entspricht.

$$W_{12} = Q_1 \cdot (\varphi(r_1) - \varphi(r_2))$$

Einsetzen der gegebenen Werte:

$$W_{12} = (1 \cdot 10^{-3} \text{ C}) \cdot \frac{1 \text{ C}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1 \text{ m}} - \frac{1}{0,5 \text{ m}} \right)$$

$$W_{12} = -8,98755 \times 10^6 \text{ J}$$

Folglich müssen etwa 8,99 Megajoule aufgewendet werden, um die Ladung Q_1 zu verschieben.

1.5.4 Definition der elektrischen Spannung

Die aus dem elektrischen Feld für einen technischen Prozess nutzbare Energie ist durch die **Potentialdifferenz** zwischen Anfangs- und Endpunkt des Weges gegeben. Durch ihre fundamentale Bedeutung in der Elektrotechnik wird sie mit einem Namen und Formelbuchstaben bedacht, und wird als **elektrische Spannung** U bezeichnet:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (1.11)$$

$$[U] = \text{V (Volt)}$$

Durch die Reihenfolge der Indizes wird - analog zur Potentialdifferenz - die Zählrichtung des Spannungspfeiles angegeben. In Abbildung 1.27 beschreibt die Spannung U_{12} also die Potentialdifferenz zwischen den Potentials φ_1 und φ_2 . Durch die Eigenschaften der Äquipotentialflächen ist es hierbei vollkommen unerheblich, von welchem Punkt von φ_1 gestartet wird und welcher Punkt auf φ_2 das Ziel darstellt. Auch der Pfad, welcher zwischen den Punkten gewählt wird, ist für die Spannung zwischen den Punkten unerheblich.

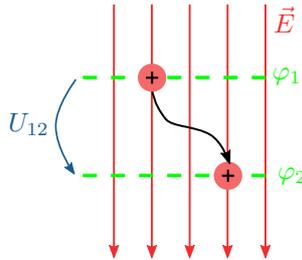


Abbildung 1.27: Spannung U_{12} zwischen den beiden Äquipotentiallinien φ_1 und φ_2

Der Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und dem Potential ist bereits aus Gleichung 1.8 bekannt und wird (bei einem Bezugspotential von $\varphi_0 = 0$) mit $\varphi(x) = E \cdot x$ angegeben.

Eingesetzt in die Definition der Spannung (Gleichung 1.11) ergibt sich:

$$U = \varphi(x = d) - \varphi(x = 0) = E \cdot d - E \cdot 0$$

Die elektrische Spannung U kann in einem wie in Abbildung 1.28 dargestellten Homogenfeld wie folgt berechnet werden, sofern die Wegstrecke d parallel zu den Feldlinien liegt:

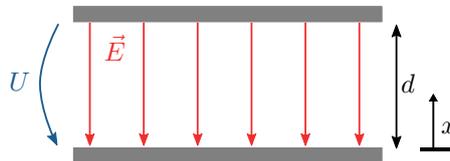


Abbildung 1.28: Elektrische Spannung U im Homogenfeld

$$U = E \cdot d \tag{1.12}$$

Alternativ kann aus einer gegebenen Spannung U bei bekannter Wegstrecke d auch die elektrische Feldstärke berechnet werden:

$$E = \frac{U}{d} \tag{1.13}$$

In Abbildung 1.29 lässt sich erkennen, dass die Spannung nichts anderes als die über die Wegstrecke d aufintegrierte Feldstärke E ist.

Während dieses Integral im Homogenfeld durch eine Multiplikation von elektrischem Feld E und Wegstrecke d ermittelt werden kann, ist dies bei inhomogenen Feldern nur durch das Lösen des Integrals möglich:

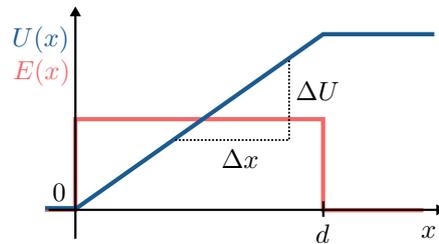


Abbildung 1.29: Zusammenhang zwischen elektrischer Spannung $U(x)$ und elektrischem Homogenfeld $E(x)$.

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.14)$$

Zu beachten ist hierbei, dass es sich bei dem Produkt $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ um Vektoren handelt. Zeigen sie in die gleiche Richtung, dürfen die Vektorpfeile eliminiert werden, andernfalls muss das Skalarprodukt verwendet werden:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds \cdot \cos(\alpha)$$

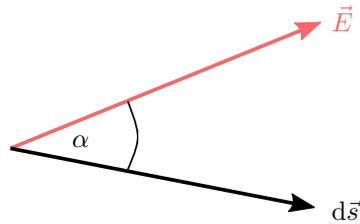


Abbildung 1.30: Skalarprodukt aus Feldstärke \vec{E} und Wegstück $d\vec{s}$

1.6 Die elektrische Stromstärke

Lernziele: Die Elektrische Stromstärke

Die Studierenden können

- die Begriffe der elektrischen Stromstärke und der elektrischen Stromdichte erläutern und anwenden
- die elektrische Stromstärke sowie die elektrische Stromdichte in einfachen Anordnungen berechnen
- die Driftgeschwindigkeit von Elektronen in einfachen Anordnungen bestimmen

1.6.1 Das elektrische Strömungsfeld

Die vorherigen Kapitel beziehen sich ausschließlich auf ruhende Ladungsträger. Folglich wird dieser Teilbereich der Elektrotechnik als Elektrostatik bezeichnet.

Auf molekularer Ebene bewegen sich die freien Elektronen in einem elektrischen Leiter ständig in zufällige Richtungen. Im Mittel gleicht sich die Bewegung der einzelnen Elektronen jedoch aus. Liegt an einem Leiter ein elektrisches Feld \vec{E} an, so werden die frei beweglichen Elektronen in diesem in Richtung der positiv geladenen Elektrode angezogen (siehe Abbildung 1.31). Zusätzlich zur zufälligen, ungerichteten Bewegung wird eine **gerichtete Bewegungskomponente** hinzugefügt. Liegt eine solche gerichtete Bewegung von Teilchen vor, wird von einem **Strömungsfeld** gesprochen.

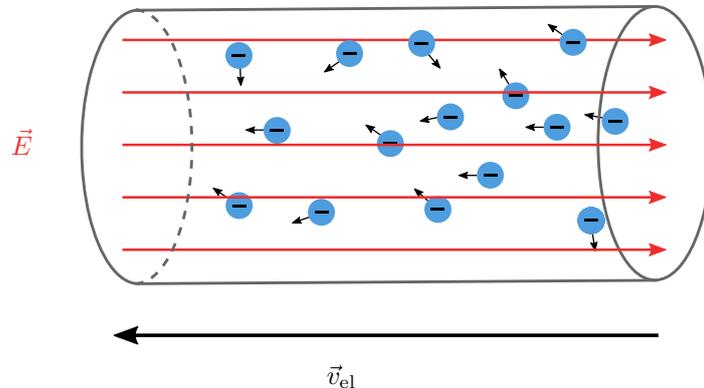


Abbildung 1.31: Elektrischer Leiter mit eingepprägter elektrischer Feldstärke \vec{E} . Die Driftbewegung der Elektronen \vec{v}_{el} verläuft in entgegengesetzter Richtung zur Feldstärke.

Neben Elektronen in Leitern kann ein elektrisches Strömungsfeld auch durch geladene Ionen in Gasen oder Flüssigkeiten hervorgerufen werden.

Im Fall einer im zeitlichen Mittel konstanten Ladungsträgerbewegung, was im abgebildeten Leiter durch ein konstantes elektrisches Feld erreicht wird, liegt ein stationäres elektrisches Strömungsfeld vor.

1.6.2 Der elektrische Strom

Als elektrische Stromstärke I wird die gerichtete Bewegung (Driftbewegung) von elektrischen Ladungsträgern bezeichnet. Die Richtung der elektrischen Stromstärke ist so definiert, dass sie vom höheren Potential (positiv geladene Elektrode) zum niedrigeren Potential verläuft. Damit verläuft

sie in die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke, jedoch in die zur Driftgeschwindigkeit der Elektronen entgegengesetzten Richtung (siehe Abbildung 1.32).

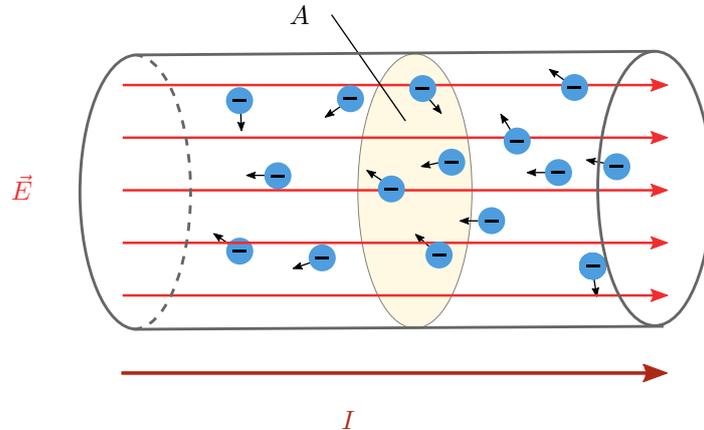


Abbildung 1.32: Elektrischer Leiter mit elektrischer Feldstärke \vec{E} und resultierender elektrischer Stromstärke I .

Die Elektronen erreichen eine feldstärkeabhängige Driftgeschwindigkeit \vec{v}_{el} . Zusammenstöße mit den Metallatomen aus der Gitterstruktur behindern die freie Bewegung der Elektronen, und wirken dieser als eine Art Widerstand entgegen.

$$\vec{v}_{el} = -b_{el} \cdot \vec{E} \quad (1.15)$$

$$[v_{el}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Proportionalitätsfaktor b_{el} zwischen der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_{el} und der elektrischen Feldstärke \vec{E} wird als Elektronenbeweglichkeit bezeichnet.

$$[b_{el}] = \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

Neben der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_{el} ist auch die Anzahl der Elektronen N_{el} sowie deren Ladungsmenge ΔQ zur Ermittlung der elektrischen Stromstärke I relevant.

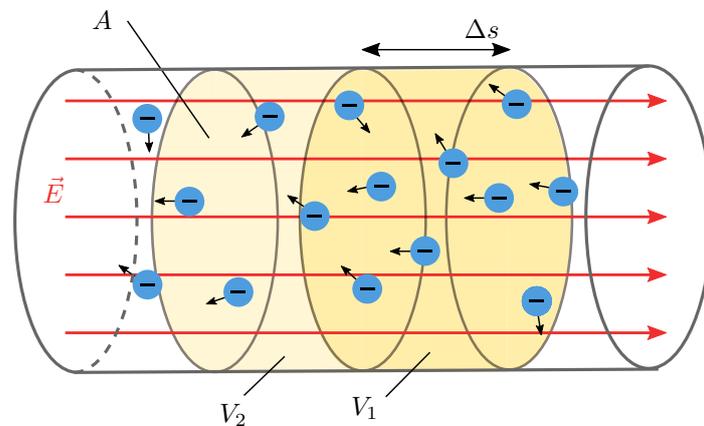


Abbildung 1.33: Illustration der Elektronenbewegung durch einen elektrischen Leiter

Die Ladungsmenge ΔQ entspricht

$$\Delta Q = e \cdot N_{\text{el}} = e \cdot n_{\text{el}} \cdot V_1$$

wobei n_{el} die Dichte der Ladungsträger im Volumen V_1 angibt.

Mit $V_1 = \Delta s \cdot A$ und $\Delta s = v_{\text{el}} \cdot \Delta t$ ergibt sich:

$$\Delta Q = e \cdot n_{\text{el}} \cdot v_{\text{el}} \cdot \Delta t \cdot A$$

Über die Definition der Driftgeschwindigkeit (1.15) führt dies zu:

$$\Delta Q = e \cdot n_{\text{el}} \cdot b_{\text{el}} \cdot E \cdot \Delta t \cdot A,$$

woraus sich die Änderung der Ladungsmenge ΔQ pro Zeiteinheit Δt herleiten lässt:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e \cdot n_{\text{el}} \cdot b_{\text{el}} \cdot E \cdot A$$

1.6.3 Definition der elektrischen Stromstärke

Diese so ermittelte Ladungsänderung über die Zeit wird als **elektrische Stromstärke** I bezeichnet:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (1.16)$$

$$[I] = \text{Ampere} = \text{A}$$

Aus dieser Definition der Stromstärke folgt, dass eine über einen Zeitraum aufaddierte elektrische Stromstärke die in dieser Zeit transportierte Ladungsmenge Q ergibt:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt \quad (1.17)$$

Neben der gesamten elektrischen Stromstärke I ist oft auch der auf den Leiterquerschnitt bezogene Strom von Interesse. Zur Berechnung dieser **Stromdichte** J wird die Stromstärke ΔI durch ein elementar kleines Flächenelement ΔA betrachtet:

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta A} \quad (1.18)$$

Ist die elektrische Stromstärke I über eine Fläche gleichmäßig verteilt, lässt sich dies vereinfachen:

$$J = \frac{I}{A} \quad (1.19)$$

Da die Stromstärke I über den gesamten Leiter hinweg identisch bleibt, ändert sich bei einer Querschnittsverkleinerung des Leiters auch die resultierende elektrische Stromdichte J (siehe Abbildung 1.34).

Hier gilt:

$$J_1 \cdot A_1 = J_2 \cdot A_2 = I$$

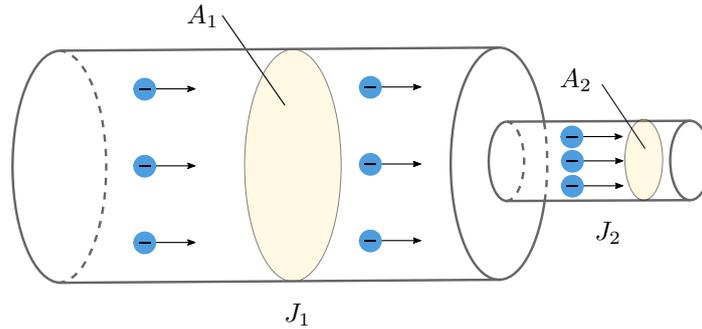


Abbildung 1.34: Zusammenhang zwischen der Stromdichte J_1 bei Querschnitt A_1 und J_2 bei A_2

Beispiel 1.3

Durch eine Kupferleitung mit dem Querschnitt $A = 1\text{ mm}^2$ fließt ein Strom von $I = 8\text{ A}$. Ein mm^3 enthält etwa $8,5 \cdot 10^{19}$ Atome. Jeweils 1 Elektron pro Atom sei am Ladungstransport beteiligt.

Mit welcher Driftgeschwindigkeit bewegen sich die Elektronen im Mittel durch die Leitung?

$$\vec{v}_{\text{el}} = -b_{\text{el}} \cdot \vec{E}$$

Da sich die negativ geladenen Elektronen entgegen der Feldrichtung \vec{E} (und somit auch entgegen der technischen Stromrichtung I) bewegen, ist die Richtung der Driftgeschwindigkeit ausreichend beschrieben, und es genügt, den Betrag v_{el} zu berechnen.

mit dem Zusammenhang

$$I = e \cdot n_{\text{el}} \cdot b_{\text{el}} \cdot E \cdot A \rightarrow E = \frac{I}{e \cdot n_{\text{el}} \cdot b_{\text{el}} \cdot A}$$

ergibt sich:

$$v_{\text{el}} = \cancel{b_{\text{el}}} \cdot \frac{I}{e \cdot n_{\text{el}} \cdot \cancel{b_{\text{el}}} \cdot A}$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$v_{\text{el}} = \frac{8\text{ A}}{1,602 \cdot 10^{-19}\text{ As} \cdot 8,5 \cdot 10^{19}\text{ mm}^{-3} \cdot 1\text{ mm}^2}$$

$$v_{\text{el}} = 0,59 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Die Elektronen bewegen sich im Mittel also mit $0,59\text{ mm/s}$. Da sich innerhalb des Leiters die elektrische Feldstärke jedoch mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegt, setzen sich alle Elektronen des Leiters praktisch gleichzeitig in Bewegung. Vergleichbar ist dies mit einem vollständig mit Murmeln gefüllten Rohr. Im Moment des hereinschiebens einer weiteren Murmel fällt auf der anderen Seite eine Murmel heraus, obwohl sich die einzelnen Murmeln nur langsam bewegen.

Modul 2

Energie und Leistung

2.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden die Konzepte von Energie, elektrischer Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad behandelt. Es ist wichtig, zu Beginn eine klare Unterscheidung zwischen Energie und Arbeit zu treffen, da diese beiden Größen eng miteinander verbunden sind und sich sogar die selbe Einheit teilen, jedoch unterschiedliche Dinge beschreiben.

Lernziele: Energie und Leistung

Die Studierenden

- können Energie, elektrische Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad benennen.
- verstehen, wie Energie in elektrischen Systemen umgewandelt und genutzt wird.
- können die elektrische Arbeit, Leistung und den Wirkungsgrad berechnen.
- können die Effizienz von Energieumwandlungssystemen analysieren.

Am Beispiel eines Pumpspeicherkraftwerks (2.1) werden die unterschiedlichen Größen anschaulich voneinander abgegrenzt. Ein Pumpspeicherkraftwerk dient dazu, elektrische Energie in potentielle Energie umzuwandeln und umgekehrt. Sobald der elektrische Energiebedarf der Verbraucher geringer ist als das verfügbare Angebot, pumpt die elektrische Maschine des Pumpspeicherkraftwerks Wasser von einem niedrigeren auf ein höheres Niveau. Bei diesem Prozess wird die elektrische Maschine als (Pumpen)Motor betrieben. Dieser erzeugt über das magnetische Feld, welches durch einen elektrischen Strom in der Motorwicklung erzeugt wird, eine Drehbewegung, mit deren Hilfe das Wasser ins Oberbecken gepumpt wird. Der elektrische Motor wandelt also elektrische Energie (den Stromfluss durch die Motorwicklung) in mechanische Arbeit um (das Wasser wird in das Oberbecken gepumpt). Sobald das Wasser im Oberbecken angekommen ist, hat es ein höheres Potential als vorher im Unterbecken. Somit speichert das Wasser im Oberbecken potentielle Energie und zwar im Falle einer verlustfreien Pumpe, die mit einem verlustfreien Elektromotor angetrieben wird, genauso viel wie im elektrischen System als elektrische Energie zugeführt wurde. Die Energie innerhalb eines geschlossenen Systems muss nämlich gleich bleiben. In der Physik wird diese grundlegende Eigenschaft als Energieerhaltung bezeichnet.

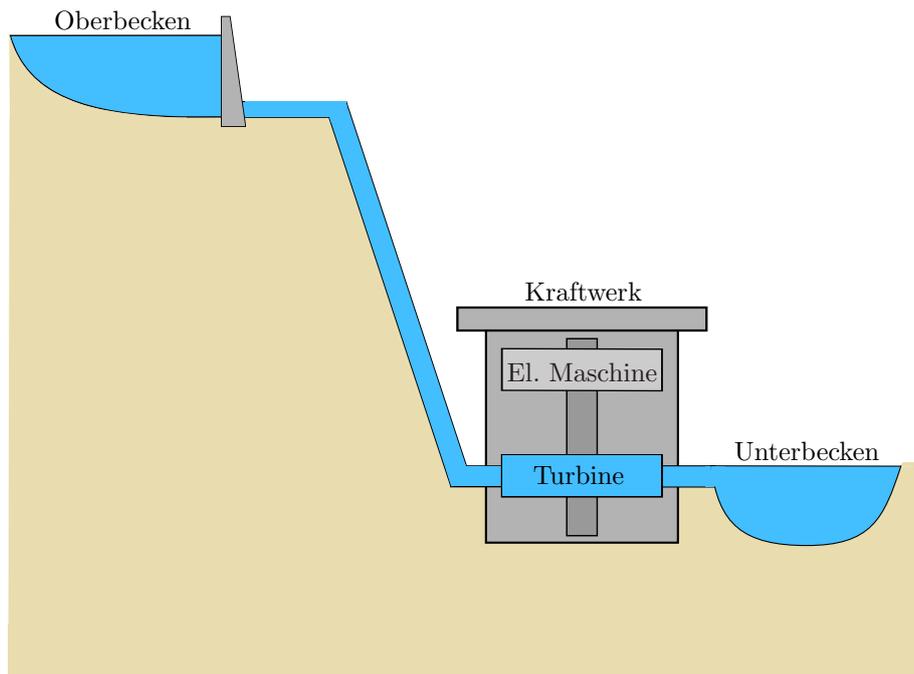


Abbildung 2.1: **Pumpspeicherkraftwerk.** Der Aufbau bestehend aus einem Oberbecken, einem Unterbecken, sowie Turbinen und einer elektrischen Maschine. Es dient der Speicherung von Energie durch das Hochpumpen von Wasser und der Rückgewinnung durch die Abgabe von Wasserkraft zur Stromerzeugung.

Sobald die Nachfrage nach elektrischer Energie das Angebot übersteigt, wird das Wasser aus dem Oberbecken über eine Turbine abgelassen. Die Turbine wandelt also die vorher gespeicherte potentielle Energie des Wassers im Oberbecken in mechanische Arbeit um. Diese Arbeit verrichtet in der elektrischen Maschine eine Drehbewegung. Da die Maschine nun als Generator arbeitet, wandelt diese die an ihr verrichtete mechanische Arbeit in elektrische Energie um. Bei diesem Prozess kann über ein Schleusenventil im Oberbecken die Wassermenge, welche innerhalb einer gewissen Zeit durch die Turbine fließt, reduziert werden. Somit wird weniger potentielle Energie in mechanische Arbeit und somit elektrische Energie pro Zeit gewandelt. Die verrichtete Arbeit pro Zeit wird als Leistung bezeichnet. Die Leistung eines Systems gibt also an, wie viel Arbeit pro Zeit verrichtet werden kann. Sie ist eine wichtige Kenngröße elektrischer Systeme. Innerhalb der elektrischen Maschine wird ein Teil der zugeführten Energie im Leitungswiderstand in Wärme umgewandelt, welche in die Umgebung abgegeben wird. Ferner treten auch in den mechanischen Elementen (Pumpe, Turbine) sowie an den Wänden der Rohrleitungen Reibungsverluste auf, welche letztlich ebenfalls als Wärme in die Umgebung abgegeben werden. Folglich ist die Menge an elektrischer Energie, die dem System zugeführt wird immer größer als die Menge an elektrischer Energie, die dem System entnommen werden kann. Das Verhältnis der entnommenen zur zugeführten Energie wird als Wirkungsgrad beschrieben.

Im Folgenden werden die Begriffe der Energie, Leistung, elektrischer Arbeit und Wirkungsgrad detaillierter erläutert. Für das Verständnis werden hier die Grundlagen aus dem vorherigen Kapitel zu Ladung, elektrischem Potential und elektrischer Stromstärke vorausgesetzt.

Merke:

Energie kann gespeichert werden, Arbeit wird verrichtet.

2.2 Die Energie

Die gespeicherte Arbeitsleistung wird nach aufgewendeter Arbeit als Energie bezeichnet. Wenn beispielsweise ein Objekt erwärmt wird, liegt diese gespeicherte Wärme als thermische Energie vor. Bei der Abgabe der Energie an die Umwelt wird nun wieder Arbeit verrichtet. Energie ist also die Fähigkeit eines Objektes, Arbeit zu verrichten. Sie ist, wie oben beschrieben, eine Erhaltungsgröße, was bedeutet, dass Energie weder erschaffen noch zerstört werden kann. Dieses Kapitel beschäftigt sich eingehend mit den Konzepten der Energieerhaltung, der Vorstellung verschiedener Energieformen und Methoden ihrer Speicherung.

2.2.1 Der Energieerhaltungssatz

Der Energieerhaltungssatz besagt, dass die Gesamtmenge der Energie in einem abgeschlossenen System konstant bleibt, auch wenn Energie zwischen verschiedenen Formen umgewandelt werden kann. Das bedeutet, dass Energie weder erschaffen noch zerstört werden kann, sondern nur von einer Form in eine andere übergehen kann.

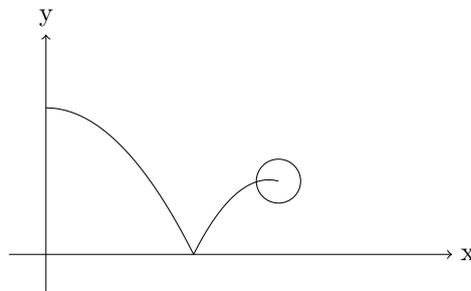


Abbildung 2.2: **Energieerhaltungssatz.** Die potentielle Energie des Balls wird in kinetische Energie umgewandelt, während der Gesamtenergiegehalt konstant bleibt.

Ein anschauliches Beispiel: Wenn ein Ball von einer Höhe fallen gelassen wird, wird seine potenzielle Energie (die Energie, die er aufgrund seiner Position hat) in kinetische Energie (die Energie der Bewegung) umgewandelt, während er fällt. Am Boden angelangt, kann ein Teil dieser kinetischen Energie in andere Energieformen wie Wärme oder Schall umgewandelt werden, aber die Summe all dieser Energieformen bleibt gleich der ursprünglichen potenziellen Energie des Balls. Dies stellt dar, wie Energie erhalten bleibt, auch wenn sie ihre Form ändert.

Merke:

- Energie ist eine Erhaltungsgröße.
- Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden.
- Energie kann lediglich die Energieform ändern.

$$E = F \cdot s$$

Lernziele: Die Elektrische Ladung

Die Studierenden können

- die Eigenschaften elektrischer Ladungen sowie im Zusammenhang stehende physikalische Phänomene beschreiben
- elektrische Felder beschreiben und für einfache Ladungsanordnungen berechnen
- mit dem Coulomb'schen Gesetz Kräfte auf Ladungen berechnen

2.2.2 Die verschiedenen Energieformen

In der Physik beschreibt Energie die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten, und tritt in verschiedenen Formen auf, die jeweils spezifische Eigenschaften und Anwendungen haben.

Kinetische Energie wird durch die Bewegung eines Objekts bestimmt. Die Energie hängt von der Masse und der Geschwindigkeit des Objekts ab und ist wichtig in der Mechanik. **Potenzielle Energie** bezieht sich auf die Position eines Objekts in einem Kraftfeld, wie z.B. dem Gravitationsfeld der Erde. Ein hochgehobener Ball verwandelt seine potenzielle Energie in kinetische, wenn er fällt. **Thermische Energie**, oder Wärme, ist die Energie, die aus der Bewegung der Teilchen eines Objekts resultiert. Sie ist in Wärmekraftmaschinen und anderen thermodynamischen Prozessen von entscheidender Bedeutung. **Elektrische Energie** entsteht durch die Bewegung von Elektronen in einem elektrischen Feld und ist fundamental für den Betrieb technologischer Geräte. **Chemische Energie** ist in den Bindungen von Molekülen gespeichert und wird bei chemischen Reaktionen freigesetzt. Sie wird zur Bereitstellung von nutzbarer Energie und in der Medizin genutzt. **Kernenergie** entsteht durch Veränderungen im Atomkern, zum Beispiel durch Kernspaltung oder -fusion. Sie wird zur Bereitstellung von nutzbarer Energie und in der Medizin genutzt.

Merke: Die Energieformen auf einen Blick

- Kinetische Energie (Bewegungsenergie)
- Potenzielle Energie (Lageenergie)
- Thermische Energie (Wärmeenergie)
- Elektrische Energie
- Chemische Energie
- Kernenergie
- Strahlungsenergie

2.2.3 Die elektrische Energie

Die Energie ist das Potential Arbeit leisten zu können, also beispielsweise eine bestimmte Zeit lang Ladungsträger zu beschleunigen. Eine Energiequelle kann nur so viel Energie abgeben, wie ihr zuvor zugeführt worden ist. Dies entspricht der Zeit, in der eine Arbeit geleistet wurde, also ein Energieaustausch stattgefunden hat. Da es keine Energie ohne zuvor aufgebrauchte Arbeit geben kann und keine Arbeit verrichtet werden kann, wenn keine Energie zur Verfügung steht, ist die Kausalität komplex und wechselseitig abhängig. Aus dem Grund wird im Folgenden von einer vorhandenen Energiequelle ausgegangen, welche dann eine Arbeit verrichten kann.

Die Energie E wird im allgemeinen über die aufintegrierte Strecke zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 über eine Kraft \vec{F} definiert.

$$E = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad [E] = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} \quad (2.1)$$

Eine elektrische Kraft \vec{F}_{el} liegt vor, wenn eine Ladung Q einem elektrischen Feld \vec{E} ausgesetzt ist. Aus der Multiplikation beider Größen ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\vec{F}_{\text{el}} = Q \cdot \vec{E} \quad (2.2)$$

Eingesetzt in die Formel 2.1 ergibt die Integration über die elektrische Feldstärke \vec{E} die elektrische Energie E_{el} . Da die Ladungsmenge Q nicht von der Strecke abhängig ist, kann diese vor das Integral gezogen werden.

$$E_{\text{el}} = Q \cdot \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

Aus Modul 1 ist bekannt, dass das Integral über ein elektrisches Feld bei konstanten Bedingungen die Spannung U ist. Eingesetzt ergibt dies die folgende vereinfachte Darstellung.

$$[E_{\text{el}}] = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$$

$$E_{\text{el}} = Q \cdot U \quad (2.4)$$

2.2.4 Elektrische Energiespeicher

Elektrische Energiespeicher zeichnen sich dadurch aus, dass sie die Energie in elektrischen bzw. magnetischen Feldern speichern. Die grundlegenden Speicher dieser Art sind Kondensatoren und Spulen. Die Vorteile dieser Energiespeicher sind schnelle Energieabgaben und eine hohe Effizienz. In der Praxis haben sie jedoch eine begrenzte Speicherkapazität und verursachen hohe Kosten. Kondensatoren können viele Ladezyklen durchlaufen, haben jedoch eine niedrige Energiedichte. Um die Energie in einer Spule zu speichern, muss durchgehend Strom durch diese fließen, was technisch herausfordernd und nur in Spezialfällen möglich ist.

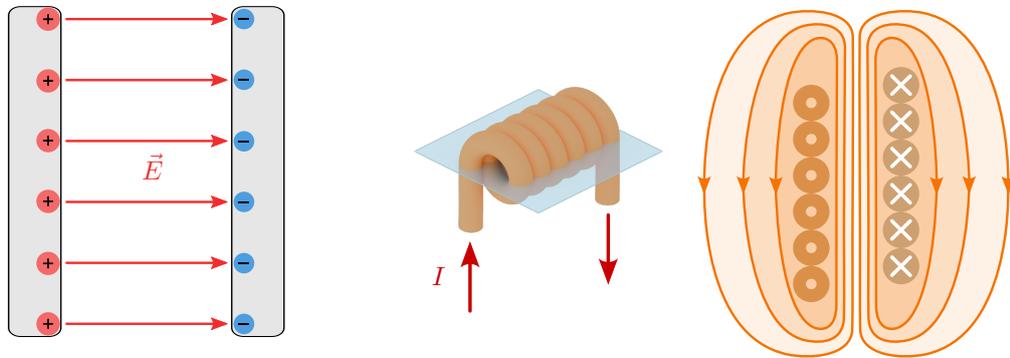


Abbildung 2.3: **Elektrische Energiespeicher.** Idealer Plattenkondensator (links) speichert die Energie im elektrischen Feld sowie ideale Spule (rechts) speichert die Energie im magnetischen Feld.

In Abbildung 2.3 sind die beiden grundlegenden elektrischen Energiespeicher dargestellt. Dabei wird links die Energie in einem elektrischen Feld gespeichert. Dies geschieht, indem eine Ladungsmenge mit unterschiedlichen Vorzeichen auf den Kondensatorplatten vorliegen. Auf der rechten Seite ist eine Spule dargestellt, welche nach der Lenzschen Regel aufgrund eines Stromflusses ein Magnetfeld erzeugt. Die Themen Spule und Kondensator werden ausführlicher in Modul 3 behandelt. Da zur Aufrechterhaltung des Magnetfeldes ein Stromfluss benötigt wird, stellt eine Spule keinen Speicher da, in dem elektrische Energie außerhalb eines stromdurchflossenen Stromkreises gespeichert werden kann. Ein Kondensator kann hingegen auch ohne angeschlossenen Stromkreis über lange Zeit elektrische Energie speichern. So kann ein Kondensator auch lange nach dem Ausschalten einer elektrischen Schaltung noch Energie abgeben. Zum Beispiel kann so die Rückleuchte eines Fahrrads auch bei stehendem Dynamo an einer roten Ampel weiter mit elektrischer Energie versorgt werden. Ungewünscht ist dieser Effekt zum Beispiel in Schaltungen mit höheren Spannungen, da die in den Kondensatoren vorhandene elektrische Energie ohne entsprechende Schutzschaltungen auch nach dem Ausschalten der Systeme zu einer Gefährdung von Personen beitragen kann.

Für mittelfristige Speicherungen größerer Energiemengen wird daher oft auf Batterien zurückgegriffen (siehe Abbildung 2.4). Batterien speichern Energie chemisch, können größere Mengen über längere Zeiträume speichern und sind vielseitig einsetzbar, was sie ideal für die Energieversorgung in mobilen Anwendungen macht.

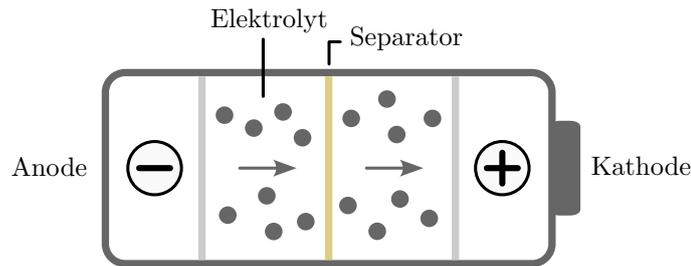


Abbildung 2.4: **Chemischer Energiespeicher.** Einfacher Aufbau einer Batterie.

Batterien sind zwar vielseitig, haben aber auch einige Nachteile: Sie sind oft teuer in Anschaffung und Wartung, besitzen eine begrenzte Lebensdauer, und ihre Herstellung sowie Entsorgung können aufgrund der verwendeten Rohstoffe erhebliche Umweltbelastungen verursachen.

2.3 Die Arbeit

In diesem Kapitel wird zur Unterscheidung zwischen Arbeit und Energie das Symbol E für Energie (ohne Vektorpfeil) und W für Arbeit (vom englischen Wort "work") verwendet. Obwohl das Formelzeichen W umgangssprachlich häufig sowohl für Arbeit als auch für Energie benutzt wird, ist Arbeit im Wesentlichen eine Veränderung der Energie. Beide Größen, Arbeit und Energie, werden in der Einheit Joule (J) gemessen. Wie im Abschnitt über die Energieerhaltung beschrieben, besagt der Energieerhaltungssatz, dass Energie weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Sie ändert lediglich ihre Form. Diesen Zusammenhang beschreibt die folgende Formel:

$$W = \Delta E \quad [W] = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} \quad (2.5)$$

Diese Änderung der Energiemenge kann durch verschiedene physikalische Aktionen hervorgerufen werden, einschließlich der Verschiebung eines Objekts in einem Kraftfeld. Um diese Konzepte weiter zu veranschaulichen, ist im Folgenden die allgemeine Formel 2.6 für die Arbeit dargestellt:

$$W = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (2.6)$$

Die Gleichung berechnet Arbeit durch Integration der Kraft entlang eines Weges, wobei die Kraftausrichtung zur Bewegungsrichtung des Objekts entscheidend ist. Ein Vorzeichenwechsel in der Formel deutet darauf hin, dass Energie aus einem Energiespeicher für Arbeit verwendet wird. Dieses Vorzeichen ist kontextabhängig und ändert sich je nach Perspektive. Wird Energie entnommen, gilt die Arbeit als negativ, da sie von der gespeicherten Gesamtenergie abgezogen wird, was eine Verringerung der Systemenergie signalisiert.

Merke:

Das Vorzeichen der Arbeit ist kontextabhängig: Die Arbeit ist positiv, wenn Energie einem System hinzugefügt wird und negativ, wenn Energie einem System entnommen wird.

2.3.1 Die elektrische Arbeit

In der Elektrostatik sind die Kräfte \vec{F}_{el} , die zwischen Ladungsträgern Q und elektrischen Feldern \vec{E} wirken, zentral. Diese Kräfte entstehen, wenn elektrische Felder auf Ladungsträger wirken. Das elektrische Feld \vec{E} wird als Kraft pro Ladung definiert und beschreibt, wie groß die Kraft \vec{F}_{el} im Verhältnis zur eingebrachten Ladung Q ist.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{\text{el}}}{Q} \Rightarrow \vec{F}_{\text{el}} = Q \cdot \vec{E} \quad (2.7)$$

Wenn nun die Formel für die elektrische Kraft \vec{F}_{el} in die Formel 2.6 für die allgemeine Arbeit eingesetzt wird, ergibt das die elektrische Arbeit W_{el} . Da sich die Ladung Q über die Strecke s nicht verändert, kann diese vor das Integral gezogen werden. Da das elektrische Feld \vec{E} ein Vektor ist und somit einen Betrag und eine Richtung hat, ist das Produkt aus \vec{E} und $d\vec{s}$ in jedem Fall von der gewählten Strecke s abhängig. Daher muss über das Produkt \vec{E} und $d\vec{s}$ ein Linienintegral gebildet werden.

$$W_{\text{el}} = \int_{P_1}^{P_2} -Q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow W_{\text{el}} = -Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.8)$$

Aus Modul 1 ist bekannt, dass das Integral über $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ im konstanten Fall die Spannung U ergibt. Für eine verbraucherunabhängige Darstellung wird in der folgenden Formel das negative Vorzeichen weggelassen, sowie für den konstanten Fall durch Einsetzen der Spannung U vereinfacht dargestellt.

$$W_{\text{el}} = Q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow W_{\text{el}} = Q \cdot U \quad (2.9)$$

Da für einen elektrischen Energietransport eine elektrische Stromstärke notwendig ist, kann nun der aus Modul 1 bekannte Zusammenhang zwischen elektrischer Stromstärke I und der Ladung Q verwendet und umgestellt werden, um die Ladung Q in der Formel 2.9 auszutauschen. Ein konstanter Stromfluss I ergibt sich aus einer gleichmäßigen Bewegung der Ladungsträger Q über die Zeit t . In diesem Fall kann auf den Differentialoperator (d) verzichtet werden. Durch Umstellung nach Q ergibt sich folgende Formel:

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = I \cdot t \quad (2.10)$$

Eingesetzt ergibt dies nun folgenden Ausdruck, welcher verdeutlicht, dass das Verrichten oder Aufbringen von Arbeit einen Stromfluss voraussetzt.

$$W_{\text{el}} = U \cdot I \cdot t \quad [W_{\text{el}}] = 1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws} \quad (2.11)$$

Merke:

- Für das Verrichten einer Arbeit wird immer eine Zeitdauer benötigt.
- Ein Momentanzustand ist immer der Ist-Zustand der Energieverteilung.
- Das Verrichten elektrischer Arbeit bedarf immer eines Stromflusses.

2.3.2 Wegintegral der elektrischen Arbeit

Die Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld ist lediglich abhängig von der Positionsänderung entlang der elektrischen Feldlinien. Abhängig von der Bewegungsrichtung entlang oder entgegen der Feldlinien ergibt das entsprechende Vorzeichen. Bewegungen entlang einer Äquipotentialfläche (Fläche mit identischem elektrischen Potential) haben keinen Einfluss auf die elektrische Arbeit. In Abbildung 2.5 sind die Punkte P_1 und P_2 auf je unterschiedlichen Potentialen dargestellt, welche jeweils durch zwei unterschiedliche Strecken s_1 und s_2 verbunden sind.

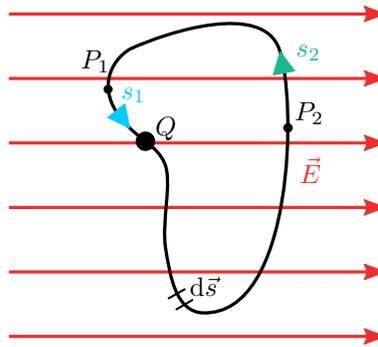


Abbildung 2.5: **Bewegung einer Punktladung.** Zeigt die Bewegung einer Punktladung entlang zwei Strecken. Die Arbeit die verrichtet wird entlang einer geschlossenen Strecke in einem statischen elektrischen Feld ist Null.

Die Beträge zweier äquidistanter Positionsänderungen in entgegengesetzten Richtungen entlang der elektrischen Feldlinien sind identisch. Diese Eigenschaften führen dazu, dass die Positionsänderung einer Ladung Q von einem Punkt P_1 zu einem Punkt P_2 betragsmäßig gleich einer beliebig anderen Strecke von P_2 zu P_1 entspricht.

$$|W_{\text{el}}| = \left| -Q \cdot \int_{s_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right| = \left| -Q \cdot \int_{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right| \quad (2.12)$$

Dieses Verhalten spiegelt wider, dass die Arbeit gleich groß ist, jedoch in einem Fall Arbeit aufgewendet und im anderen Fall Arbeit verrichtet wird. Dies führt zu entgegengesetzten Vorzeichen, was dazu führt, dass sich die Summe beider Arbeiten aufhebt. Mathematisch kann dies auch so ausgedrückt werden, dass das Ringintegral entlang einer beliebigen Kontur zurück zum Ausgangspunkt Null ergibt. Da sich die Ladung Q außerhalb des Umlaufintegral befindet, ist das Ergebnis somit unabhängig von der Ladungsmenge.

$$W_{\text{el}} = -Q \cdot \int_{s_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} - Q \cdot \int_{s_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q \cdot \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2.13)$$

Das Ergebnis des Ringintegrals verdeutlicht ein fundamentales Prinzip der Physik: In einem statischen Feld ist die über einen geschlossenen Weg verrichtete Arbeit immer Null. Dies bestätigt die Wegunabhängigkeit der Arbeit in diesen Feldern und zeigt, dass die verrichtete Arbeit ausschließlich von den Anfangs- und Endpunkten abhängt und nicht vom spezifischen Weg zwischen diesen Punkten.

Merke:

Das Ringintegral einer Ladung in einem statischen elektrischen Feld ist unabhängig von der Ladungsmenge immer gleich Null.

2.4 Die Leistung

Die Leistung gibt an, wie schnell Arbeit verrichtet oder Energie übertragen wird. Sie wird definiert als eine Menge an Energie, die pro Zeiteinheit umgesetzt wird. Die SI-Einheit der Leistung ist das Watt (W), wobei ein Watt einem Joule pro Sekunde entspricht. Anders gesagt ist die zuvor beschriebene Arbeit das Integral der Leistung über die Zeit.

$$W = \int P \cdot dt \quad (2.14)$$

Durch Umstellung der Formel ergibt sich, dass die Leistung P die Änderung der Arbeit über die Zeit ist.

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (2.15)$$

2.4.1 Die elektrische Leistung

Im Fall der elektrischen Leistung ergibt sich bei gleichbleibender Arbeit über die Zeit nach Einsetzen der elektrischen Arbeit W_{el} aus Formel 2.11 der folgende Ausdruck:

$$P = \frac{W_{\text{el}}}{t} = \frac{U \cdot I \cdot \cancel{t}}{\cancel{t}} = U \cdot I \quad [P] = 1 \text{ Watt} = 1 \text{ W} \quad (2.16)$$

2.4.2 Die verschiedenen Leistungsarten

Neben der elektrischen Leistung gibt es noch weitere Leistungsgrößen, welche sich aus den verschiedenen Energieformen ergeben. Ergänzend zu den in Abschnitt 2.2.2 erörterten Energieformen, sind in der folgenden Tabelle die entsprechenden Leistungen aufgelistet. Dabei wird jeweils die Potentialgröße mit der Flussgröße multipliziert. Die Tabelle gilt nur für Gleichspannung.

Arten	Potentialgröße	Flussgröße	Formel
elektrisch	Spannung (U)	Strom (I)	$P_{\text{el}} = U \cdot I$
translatorisch	Kraft (F)	Geschwindigkeit (v)	$P_{\text{tr}} = F \cdot v$
rotatorisch	Moment (M)	Winkelgeschw. (ω)	$P_{\text{rot}} = M \cdot \omega$
thermisch	Temperaturdiff. (ΔT)	Wärmedurchgang ($k \cdot A$)	$P_{\text{th}} = \Delta T \cdot k \cdot A$
fluidisch	Druck (p)	Volumenstrom (\dot{V})	$P_{\text{f}} = p \cdot \dot{V}$

Tabelle 2.1: **Arten von Leistung.** Zeigt die verschiedenen Arten von Leistung in verschiedenen physikalischen Systemen.

Merke:

Elektrische Arbeit misst die übertragene Energie, während elektrische Leistung die Übertragungsgeschwindigkeit angibt.

Die verschiedenen Leistungsarten sind relevant für die Effizienz eines Systems. Im Regelfall treten neben der erwünschte auch unerwünschte Leistungsgröße auf, welche nach Möglichkeit vermieden werden sollten. Dies wird im folgenden Abschnitt über den Wirkungsgrad behandelt.

2.5 Der Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad beschreibt das Verhältnis von abgegebener Leistung (Nutzleistung) zu aufgenommener Leistung (zugeführte Energie) in einem System und ist ein Maß für die Effizienz, mit der ein System Energie umwandelt. Am Beispiel eines Elektromotors zeigt Abbildung 2.6 wie sich dessen Leistungsbilanz zusammensetzt.

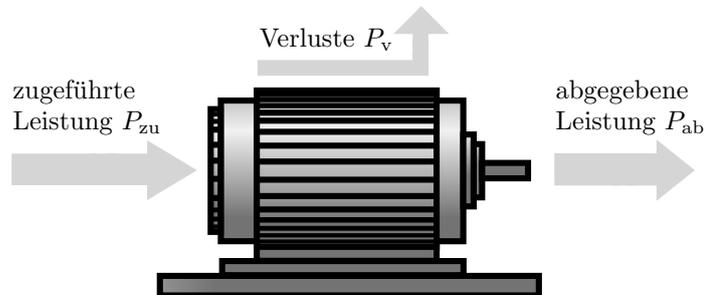


Abbildung 2.6: **Wirkungsgrad eines Elektromotors.** Zeigt das Verhältnis der abgegebenen Leistung zur zugeführten Leistung. Der Wirkungsgrad beschreibt die Effizienz des Motors bei der Umwandlung von Energie.

Der Elektromotor wird am Eingang mit elektrischer Energie versorgt, welche er in einer Eingangsleistung P_{zu} aufnimmt. Die gewünschte Leistung am Ausgang P_{ab} ist in diesem Fall rotatorischer Natur. Die durch den Motor verursachte Abwärme, aber auch die verursachten Geräusche oder Reibung, ergeben zusammen die Verlustleistung P_v .

2.5.1 Berechnung des Wirkungsgrades

Der Wirkungsgrad wird typischerweise als Prozentsatz ausgedrückt. Ein Wirkungsgrad von 100 % bedeutet, dass die gesamte zugeführte Energie effektiv in Nutzenergie umgewandelt wird. Dies ist jedoch in der Praxis aufgrund von Verlusten, meist in Form von Wärme, Reibung oder Schall, nicht erreichbar. Mathematisch wird der Wirkungsgrad η (eta) wie folgt definiert:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \cdot 100\% \quad (2.17)$$

Im realen Fall wird der Wirkungsgrad nie 100 % betragen, da eine Energiewandlung grundsätzlich mit Verlusten behaftet ist. Um die Verluste möglichst gering zu halten ist es wichtig sich der Ver-

lustmechanismen bewusst zu werden und diese nach Möglichkeit zu reduzieren. Der nachfolgende Abschnitt erläutert das Prinzip der Verlustmechanismen anhand eines Leuchtmittels.

2.5.2 Verlustmechanismen eines Leuchtmittels

Ein Paradebeispiel für die Relevanz des Wirkungsgrades ist die klassische Glühlampe. Sie erzeugt Licht, indem Strom durch einen Draht fließt, der sich dabei so stark erhitzt, dass er zu leuchten beginnt. Dabei werden weniger als 5 % der eingesetzten Energie in Licht umgewandelt. Mehr als 95 % der Energie werden in Wärme umgewandelt. Aufgrund der schlechten Effizienz wurden Glühlampen seit 2009 in der EU schrittweise verboten. Abbildung 2.7 zeigt links eine klassische Glühlampe und rechts eine Energiesparlampe.

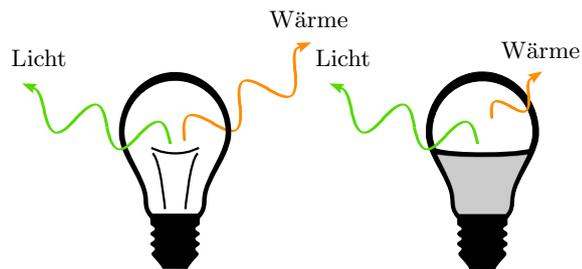


Abbildung 2.7: **Energieumwandlung in Glühlampe und Energiesparlampe.** Zeigt das eine Glühlampe den Großteil der aufgenommenen elektrischen Energie in Wärme und nur einen kleinen Teil in Licht umwandelt, wandelt die Energiesparlampe einen deutlich höheren Anteil der elektrischen Energie in Licht um.

Ein hoher Wirkungsgrad ist in vielen Anwendungen erstrebenswert, da dies bedeutet, dass weniger Energie in i.d.R. nicht gewünschte Energieformen gewandelt wird, sondern dem System als Nutzenergie zur Verfügung steht. In der Praxis sind jedoch viele Faktoren wie Materialbeschaffenheit, Bauweise und Betriebsbedingungen entscheidend für die Maximierung des Wirkungsgrades. In der Umwelt- und Energietechnik spielt der Wirkungsgrad eine entscheidende Rolle, da er direkt mit dem Energieverbrauch und den Umweltauswirkungen zusammenhängt. Effizientere Systeme können dazu beitragen, den Energiebedarf zu reduzieren und Treibhausgasemissionen zu verringern.

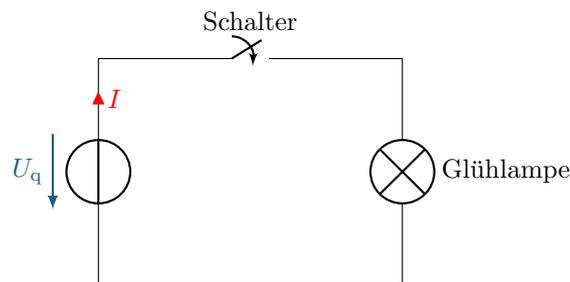


Abbildung 2.8: Beispiel Schaltung Wirkungsgrad

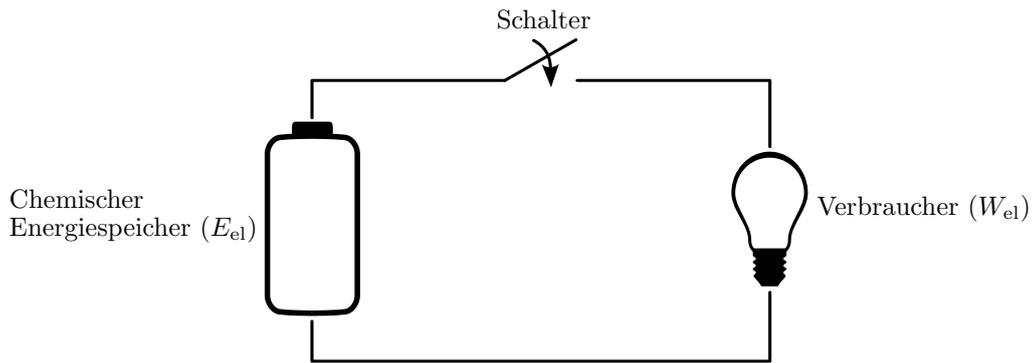


Abbildung 2.9: **Einfache Schaltung.** zeigt eine einfache elektrische Schaltung, die aus einer Batterie, einem Schalter und einer Glühlampe besteht. Durch das Schließen des Schalters wird der Stromkreis geschlossen, wodurch die Glühlampe leuchtet, indem elektrische Energie in Licht und Wärme umgewandelt wird.

Beispiel 2.1: Berechnung des Wirkungsgrades

Eine Wärmekraftmaschine entnimmt einer Wärmequelle eine Energie von $Q_{\text{zu}} = 5000 \text{ J}$ und verrichtet dabei eine mechanische Arbeit von $W = 1200 \text{ J}$.

Gesucht: Wirkungsgrad η

Formel:

$$\eta = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Zugeführte Wärmeenergie}} \cdot 100\% = \frac{W}{Q_{\text{zu}}} \cdot 100\%$$

Einsetzen:

$$\eta = \frac{1200 \text{ J}}{5000 \text{ J}} \cdot 100\% = 24\%$$

Der Wirkungsgrad beträgt $\eta = 24\%$.

Der Übergang von den grundlegenden physikalischen Konzepten zu den elektrischen Bauelementen ist also ein Schritt von der Theorie zur Praxis, der es uns ermöglicht, unser theoretisches Wissen in realen Anwendungen umzusetzen. Dieses Kapitel führt die drei grundlegenden elektrischen Eigenschaften von Bauelementen, sowie die Spannungs- und Stromquellen, ein.

3.2 Leitfähigkeit und Widerstand

Die Leitfähigkeit oder auch der Leitwert G beschreibt, wie der Name schon impliziert, die Fähigkeit eines Materials elektrischen Strom zu leiten. Je größer der Wert, desto besser leitet ein Material, sprich, umso einfacher können sich die Ladungsträger im Material bewegen. Diese Eigenschaft basiert auf den Experimenten eines deutschen Experimentalphysikers Georg Simon Ohm anfang des 19. Jahrhunderts, in welchen er herausfand, dass sich der Strom proportional zur angelegten Spannung verhält. Der Kehrwert des Leitwertes ist der heute gebräuchlichere ohm'sche Widerstand R . Der Leitwert G hat die Einheit Siemens (S), der ohmsche Widerstand die Einheit Ohm (Ω).

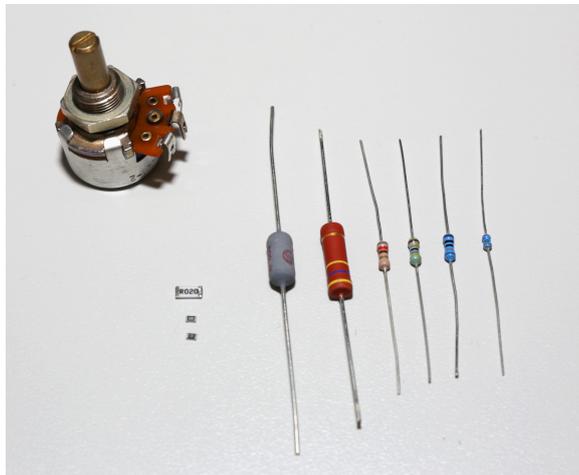


Abbildung 3.2: **Unterschiedliche ausföhrungen von Widerständen.** Darunter Drahtwiderstände, Potentiometer und SMD-Widerstände. Die Bauweise und das Material bestimmen die elektrischen Eigenschaften, wie Widerstandswert, Belastbarkeit und Temperaturkoeffizient.

In der Schaltungsentwicklung wird die physikalische Eigenschaft des ohm'schen Widerstandes genutzt, um die gewünschten Funktionen zu realisieren. Die Abbildung 3.2 zeigt verschiedene Ausführungen des Bauelements elektrischer Widerstand. Unabhängig von der Ausführung, basieren alle ohm'schen Widerstände auf den grundlegenden Prinzipien der Physik, auf welche im Folgenden näher eingegangen wird.

Lernziele: Leitfähigkeit und Widerstand

Die Studierenden

- kennen das elektrische Bauelement Widerstand.
- können die unterschiedlichen Bauteilausführungen von Widerständen erklären.
- können anhand des spezifischen Widerstand ρ oder des spezifischen Leitwertes κ Berechnungen durchführen.
- können die Unterschiede in der Leitfähigkeit verschiedener Materialien basierend auf deren atomarer Struktur und Temperatur analysieren.

3.2.1 Die elektrische Leitfähigkeit

Aus Modul 1 ist die Definition der Stromdichte J und des Stromes I bekannt. Durch Einsetzen der Formeln 2 und 3 in Formel 1 ergibt sich die Formel 4:

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta A} \quad (3.1)$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (3.2)$$

$$\Delta V = \Delta A \cdot \Delta x \Leftrightarrow \Delta A = \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad (3.3)$$

$$J = \frac{\Delta Q \cdot \Delta x}{\Delta t \cdot \Delta V} \quad (3.4)$$

3.2.2 Die elektrische Leitfähigkeit

Durch Einsetzen der aus Modul 1 bekannten Driftgeschwindigkeit v_{el} und der Raumladungsdichte ρ in die Formel 4, ergibt sich die Formel 7 für die Stromdichte.

$$v_{el} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.5)$$

$$\rho = \frac{\Delta x}{\Delta V} \quad (3.6)$$

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}_{el} \quad (3.7)$$

Da die Geschwindigkeit immer einen Betrag und eine Richtung hat, ist die Stromdichte ebenfalls ein Vektor.

3.2.3 Die elektrische Leitfähigkeit

Die Driftgeschwindigkeit \vec{v}_{el} der freien Ladungsträger verhält sich proportional zum elektrischen Feld \vec{E} , jedoch in entgegengesetzter Richtung. Der Proportionalitätsfaktor wird auch als Elektronenbeweglichkeit μ_e bezeichnet.

$$\vec{v}_{el} = -\mu_e \cdot \vec{E} \quad (3.8)$$

Die Raumladungsdichte ρ setzt sich aus der Elementarladung e^- und der Ladungsträgerdichte n_e , zusammen. Aufgrund der negativen Ladung von Elektronen, ergibt sich ein negatives Vorzeichen.

$$\rho = -n_e \cdot e^- \quad (3.9)$$

Das Einsetzen von $v_{el}^{\vec{}}$ und ρ in die Formel 7 ergibt den folgenden Ausdruck:

$$\vec{J} = (-n_e \cdot e^-) \cdot (-\mu_e \cdot \vec{E}) \quad (3.10)$$

3.2.4 Die elektrische Leitfähigkeit

Die Minuszeichen heben sich auf und es ergibt sich folgende Formel für die Stromdichte \vec{J} :

$$\vec{J} = n_e \cdot \mu_e \cdot e^- \vec{E} \quad (3.11)$$

Die materialabhängigen Komponenten n_e und μ_e sowie die Naturkonstante e^- ergeben multipliziert die spezifische Leitfähigkeit κ :

$$\kappa = n_e \cdot \mu_e \cdot e^- \quad (3.12)$$

Zusammengefasst ergibt diese Darstellung die Beschreibung des ohmschen Gesetzes:

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} \quad (3.13)$$

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} \quad (3.14)$$

Da das elektrische Feld parallel zur Leitungslänge verläuft, ergibt sich das Skalarprodukt:

$$U_{12} = \int_{x=0}^{x=l} \vec{E} d\vec{x} \quad (3.15)$$

Durch Einsetzen der umgestellten Formel 13 nach \vec{E} , folgt:

$$U_{12} = \int_0^l \frac{J}{\kappa} dx \quad (3.16)$$

Da es sich um ein homogenes Material handelt ist das κ konstant.

$$U_{12} = \frac{1}{\kappa} \cdot \int_0^l J dx \quad (3.17)$$

Die folgende Formel für die Stromdichte J ist aus Modul 1 bekannt:

$$J = \frac{I}{A} \quad (3.18)$$

Durch Einsetzen der Formel ergibt sich folgender Ausdruck:

$$U_{12} = \frac{1}{\kappa} \cdot \int_0^l \frac{I}{A} dx \quad (3.19)$$

Die elektrische Leitfähigkeit sagt aus, wie gut ein Material Ladungsträger transportieren kann, also wie gut elektrischer Strom durch sie fließt. Sehr gut leitfähige Materialien werden Leiter (im Extremfall auch Supraleiter) genannt, während sehr schlecht leitende Materialien als Isolatoren bezeichnet werden. Zu den leitfähigen Medien zählen Metalle wie Kupfer, Silber, Aluminium und Gold, welche in der Elektrotechnik am häufigsten verwendet werden. Als Isolatoren werden zum Beispiel Kunststoffe (Polyethylen (PE), Polytetrafluorethylen (PTFE oder Teflon), Polyvinylchlorid (PVC) etc.), speziell für die Anwendung als Isolator hergestellte Mineralöle, Silikone und Epoxidharz (z.B. als Vergussmasse) oder auch Papier verwendet. Des Weiteren gibt es Halbleiter wie Silizium und Germanium, deren Leitfähigkeit zwischen denen von Leitern und Isolatoren einzuordnen sind. Ihre Leitfähigkeit kann durch Dotierung und äußere Einflüsse wie Temperatur und Licht verändert werden. Diese Eigenschaften werden bei Bauteilen wie Dioden oder Transistoren genutzt, um bestimmte Funktionen zu realisieren. Die verschiedenen Arten und Eigenschaften von Halbleiter sind sehr umfangreich und werden in späteren Modulen behandelt. Vollständigkeitshalber sei noch erwähnt, dass flüssige Medien wie Säuren oder Salzlösungen leitfähig sind und als Elektrolyt bezeichnet werden. Außerdem gibt es auch ionisierte Gase, die frei bewegliche Ladungsträger enthalten und elektrische Ströme leiten können. Diese leitfähigen Gase werden Plasmen genannt, welche in diesem Modul ebenfalls nicht behandelt werden.

3.2.5 Driftverhalten von Elektronen in Leitern

In Modul 1 wurde bereits vermittelt, dass der elektrische Stromfluss die gerichtete Bewegung von freien Ladungsträgern ist. Im Fall eines Leiters sind dies die negativen Ladungsträger, also die Elektronen, welche sich frei im Material bewegen können. Die Struktur eines solchen Materials besteht aus einem festen Gitter von Atomrümpfen und frei beweglichen Elektronen. Sowohl die Beweglichkeit der Elektronen μ_e , als deren Anzahl, ist materialabhängig. Im feldfreien Raum bewegen sich diese Elektronen zufällig in alle Richtungen, was zu einem neutralen Zustand führt. Da es sich hierbei um keine gerichtete sondern um eine in alle Richtungen gleichverteilte Bewegung handelt, ist kein Stromfluss feststellbar. Dennoch führt diese ungerichtet, von der Temperatur abhängige, Bewegung der Ladungsträger zu elektrotechnischen Effekten: In empfindlichen Schaltungen wird sie als Rauschen wahrgenommen. Die freien Ladungsträger sind sehr viel leichter als die im Gitter verankerten Atomrümpfe, so dass es bei einem Aufprall eines in Bewegung befindlichen Elektrons auf einen Atomrumpf zu einem unelastischen Stoß kommt und sich die Bewegungsrichtung des Elektrons ändert. Dieses Verhalten ist in Abbildung 3.3 zu sehen.

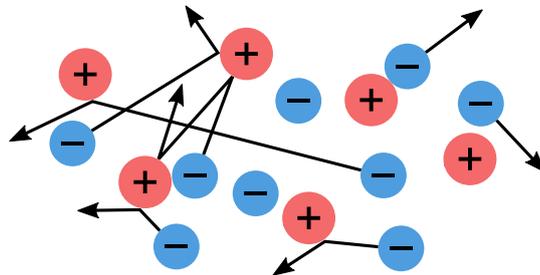


Abbildung 3.3: **Ungerichtete Bewegung freier Elektronen.** Zeigt die freien Elektronen (blau) zwischen positiv geladenen Atomrümpfen (rot). Solche Bewegungen sind charakteristisch für Metalle im Ruhezustand, wo die Elektronen sich zufällig bewegen, ohne eine bevorzugte Richtung, solange kein äußeres elektrisches Feld anliegt.

Sobald sich ein Leiter in einem elektrischen Feld befindet, wirkt auf die Elektronen die Coulomb-Kraft, so dass sich ihre zufällige Bewegungsrichtung in eine gerichtete Bewegung ändert, welche entgegengesetzt zur Feldrichtung zeigt (Abb.3.4). Diese gerichtete Bewegung der Ladungsträger wird als Stromfluss bezeichnet (vgl. Modul 1). Allerdings kommt es auch weiterhin zu Stößen mit den Atomrümpfen. Diese führen letztlich zu einer Abschwächung der gerichteten Bewegung und somit des Stroms (vgl. Abb.3.4). Da sich die Atomrümpfe mit steigender Temperatur stärker bewegen, nimmt die Stoßwahrscheinlichkeit der Elektronen bei steigender Temperatur zu.

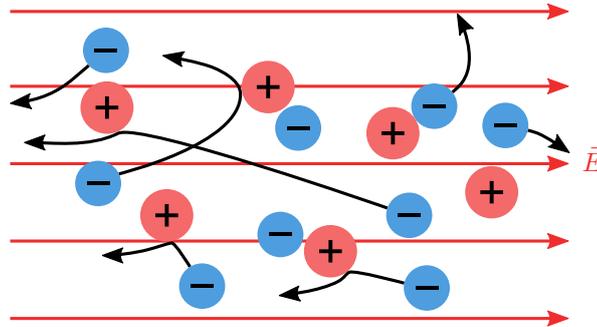


Abbildung 3.4: **Gerichtete Bewegung von Elektronen.** Unter Einfluss eines elektrischen Feldes \vec{E} bewegen sich die freien Elektronen in einem Leiter entgegen der Feldrichtung, was den elektrischen Stromfluss I erklärt.

Dieses Verhalten der Elektronen wird auch Driftverhalten genannt, welches stark vom Material anhängt. Da die atomare Zusammensetzung materialabhängig ist, unterscheidet sich auch die Anzahl der freien Elektronen, sowie deren Beweglichkeit μ_e . Diese beiden Eigenschaften werden unter dem Begriff der spezifischen Leitfähigkeit κ zusammengefasst. Mit der spezifischen Leitfähigkeit kann somit die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in der Gitterstruktur des Leiters ermittelt werden. Der folgende Abschnitt befasst sich mit eben diesen Eigenschaften.

3.2.6 Mathematische Zusammenhänge der Leitfähigkeit

Die unterschiedlichen atomaren Zusammensetzungen der Materialien führen zu einer materialabhängigen, elektrischen Leitfähigkeit. Die materialspezifische Eigenschaft bestehen aus der spezifischen Leitfähigkeit κ (Kappa), bzw. dem spezifischen Widerstand ρ_R (rho) welche antiproportional zueinander stehen, sowie dem jeweiligen Temperaturkoeffizient α , welcher sich je nach Material unterscheidet.

$$[\kappa] = 1 \frac{\text{Siemens}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{S}}{\text{m}} = 1 \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho_R} \quad (3.20)$$

$$\rho_R = \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot (1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ\text{C})) \quad (3.21)$$

Für ϑ (Theta) wird die Temperatur des Leiters eingetragen. Daraus ergibt sich durch $(\vartheta - 20^\circ\text{C})$ die Temperaturdifferenz des Leiters zwischen der vorhandenen Temperatur des Leiters und den 20°C , bei welchen der Referenzwert ermittelt wurde. Werden 20°C für ϑ (Theta) eingesetzt, fällt auch das α weg und es bleibt der Referenzwert $\rho_{20^\circ\text{C}}$ übrig. In der folgenden Tabelle sind beispielhaft einige Materialien mit deren spezifischen Eigenschaften dargestellt:

Material	Spezifische Leitfähigkeit $[\kappa] = \text{S/m}$	Temperaturkoeffizient $[\alpha] = 1/\text{K}$
Silber	$6.1 \cdot 10^7$	0.0038
Kupfer	$5.8 \cdot 10^7$	0.0038
Gold	$4.5 \cdot 10^7$	0.0034
Aluminium	$3.7 \cdot 10^7$	0.004
Eisen	$1.0 \cdot 10^7$	0.0065
Graphit	$3 \cdot 10^6$	-0.0002
Silizium (dotiert)	$1 \cdot 10^6$	-0.075
Leitungswasser	$5.0 \cdot 10^{-3}$	-
Luft	$4.0 \cdot 10^{-15}$	-

Tabelle 3.1: **Spezifische Leitfähigkeiten und Temperaturkoeffizienten verschiedener Materialien.** Metalle wie Silber und Kupfer haben hohe Leitfähigkeiten, während isolierende Materialien wie Luft eine sehr geringe Leitfähigkeit besitzen.

Äquivalent zur spezifischen Leitfähigkeit κ und zum spezifischen Widerstand ρ_R , kann der entsprechende Widerstand R , bzw. Leitwert G eines Körpers bestimmt werden.

$$[G] = 1 \text{ Siemens} = 1 \text{ S} = 1 \frac{1}{\Omega}$$

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.22)$$

Der Wert der elektrischen Leitfähigkeit bzw. des Widerstandes eines Leiters, ergibt sich darüber hinaus aus den geometrischen Eigenschaften. Sowohl die Länge l als auch die Querschnittsfläche A tragen zum Leitwert bzw. Widerstandswert bei. Abbildung 3.5 zeigt einen solchen Leiter mit seinen Eigenschaften.

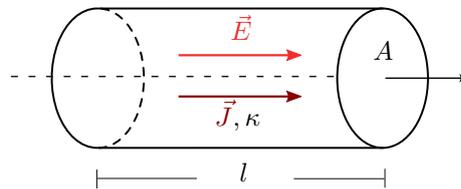


Abbildung 3.5: **Geometrische Darstellung eines Widerstands.** Das elektrische Feld \vec{E} erzeugt eine Stromdichte \vec{J} durch den Widerstand. Die Beziehung zwischen der Stromdichte und dem elektrischen Feld wird durch das Ohmsche Gesetz $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$ beschrieben.

Die Stromdichte \vec{J} ergibt sich dabei aus dem elektrischen Feld \vec{E} und der spezifischen Leitfähigkeit κ . Die Stromdichte ist dabei geometrieunabhängig. Erst zur Berechnung des Stromes I müssen die Länge und die Querschnittsfläche mit einbezogen werden. Mit der folgenden Formel lässt sich der Widerstandswert berechnen:

$$[R] = 1 \text{ Ohm} = 1 \Omega$$

$$R = \rho_R \cdot \frac{l}{A} \quad (3.23)$$

ρ_R : spezifischer Widerstand des Materials (Ωm)
 l : Länge des Materials (m)
 A : Querschnittsfläche des Materials (m^2)

Einführung in die Darstellung von Schaltkreisen

In der Elektrotechnik werden zur Darstellung von elektrischen Netzwerken sogenannte Schaltbilder verwendet. Inhalt dieser Schaltbilder sind Schaltsymbole, welche für die elektrischen Eigenschaften bzw. ganze Bauelemente, verwendet werden. Abbildung 3.6 zeigt beispielhaft ein solches Schaltbild.

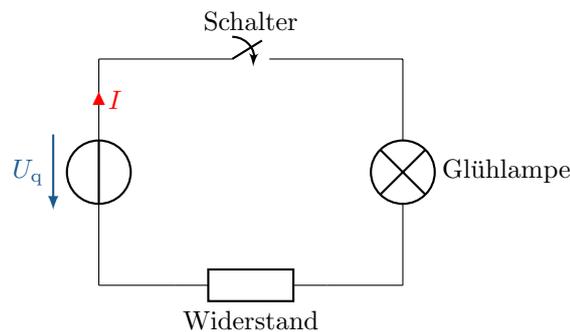


Abbildung 3.6: **Schaltplan einer Reihenschaltung.** Die aus einer Gleichspannungsquelle einem Schalter, einem Verbraucher und einem Widerstand besteht.

Das Schaltbild besteht aus vier Elementen, welche mit Linien verbunden sind. Es stellt eine Reihenschaltung bestehend aus einer Spannungsquelle, einem Schalter, einer Glühlampe und einem Widerstand, dar. Der Widerstand stellt den Leitungswiderstand der gesamten Leitung dar, während die Verbindungslinien per Definition ideale Verbindungen ohne weitere Eigenschaften darstellen.

Des Weiteren ist eine Spannung U_q , sowie der Strom I eingezeichnet, welcher jedoch erst fließen kann, wenn der Schalter geschlossen wird. Im Folgenden werden die drei grundlegenden elektrischen Eigenschaften, sowie deren Schaltsymbole tiefer behandelt.

3.2.7 Widerstand als Bauelement

Mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt kennengelernten Methode zu Berechnung des Widerstandes, kann der Widerstandswert elektrischer Leitungen, oder auch anderer leitender Objekte, ermittelt werden. Sobald ein Widerstandswert bekannt ist, wird dieser in elektrischen Schaltbildern einem Schaltsymbol zugeordnet. So können verschiedene Komponenten und deren Eigenschaften miteinander verbunden werden, um deren Verhalten zu ermitteln. Abbildung 3.7 zeigt zwei gängige Schaltzeichen für den Widerstand.



Abbildung 3.7: **Schaltungselement für Widerstand.** Europäisches (links) und amerikanisches (rechts).

Sobald eine Gleichspannungsquelle an einen Widerstand R angeschlossen wird, verhalten sich Strome

und Spannungen linear. Abbildung 3.8 zeigt den durch den Widerstand fließenden Strom I_R , sowie die abfallende Spannung U_R .

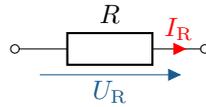


Abbildung 3.8: **Idealer Widerstand.** Zeigt den Spannungsabfall über den Widerstand und den Stromfluss durch ihn.

Das Schaltsymbol des Widerstandes wird in Schaltungen immer als idealer Widerstand berücksichtigt. Unter Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit trifft dies im Gleichspannungsfall auch weitestgehend zu (Schaltvorgänge ausgenommen). In der Realität gibt es viele Situationen, in denen ein realer Widerstand kein lineares Verhalten aufweisen kann. Verschiedene Quellenarten werden im Abschnitt 1.2 zu Spannungs- und Stromquellen behandelt. Zum Verständnis der Abbildung 3.9 ist es ratsam, zuvor die Abschnitte 1.3 und 1.4 gelesen zu haben.

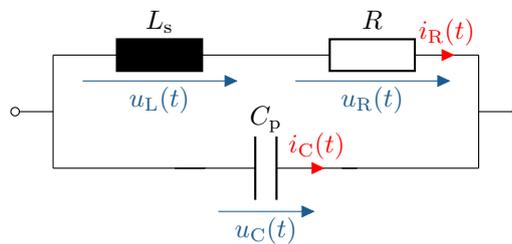
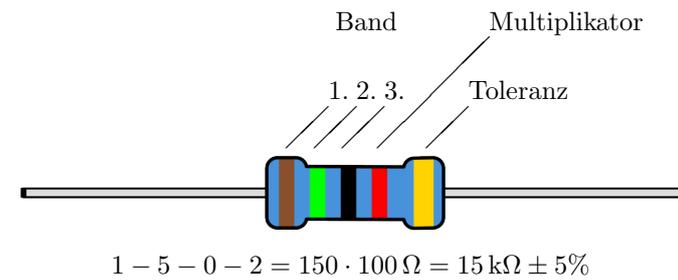


Abbildung 3.9: **Ersatzschaltbild eines realen Widerstands.** Der ideale Widerstand R wird durch eine Serien-Induktivität L_s und einen parallelen Kondensator C_p ergänzt, um parasitäre Effekte zu berücksichtigen.

Ausgehend von der Ausführung eines Widerstandes und der Frequenz, bei welcher er betrieben wird, machen sich sogenannte parasitäre Effekte bemerkbar. In Abbildung 3.9 ist das Ersatzschaltbild eines realen Widerstandes dargestellt. Wird dieser bei höheren Frequenzen betrieben, können die parasitären Eigenschaften (parasitics) überwiegen und zu einem völlig anderen Verhalten führen. Mehr dazu in späteren Modulen.

Im Folgenden werden aber immer vollständige Ersatzschaltbilder angenommen. Wird ein Widerstand nur mit seinem Schaltungssymbol dargestellt, soll dieser als damit vollständig beschrieben angenommen werden. Dies gilt auch für alle im Weiteren hergeleiteten Bauelemente.

In der Elektrotechnik werden Widerstände, auch Festwiderstände genannt, in der Schaltungsentwicklung verwendet. Eine der bekanntesten Ausführungen sind die THT-Widerstände (Through-Hole Technology). Obwohl diese Art in vielen Anwendungen von SMD-Bauteilen (Surface-Mount Device) abgelöst worden sind, gibt es immer noch Anwendungsfälle in denen sie Sinn machen. Beispiele sind Prototyping, DIY-Projekte, Leistungsanwendungen oder Leiterplatten mit hohen mechanischen Anforderungen. Die THT-Widerstände sind durch farbige Ringe gekennzeichnet, welche Aufschluss über den Widerstandswert und die Toleranz liefern. Abbildung 3.10 zeigt einen THT-Widerstand mit dem dazugehörigen Ableseschema und einer Tabelle zum Ablesen der Werte:



Farbe	1. 2. 3. Band	Multiplikator	Toleranz
Schwarz	0	1 Ω	-
Braun	1	10 Ω	± 1 %
Rot	2	100 Ω	± 2 %
Orange	3	1 kΩ	-
Gelb	4	10 kΩ	-
Grün	5	100 kΩ	± 0.5 %
Blau	6	1 MΩ	± 0.25 %
Violett	7	10 MΩ	± 0.1 %
Grau	8	-	± 0.05 %
Weiß	9	-	-
Gold	-	0.1 Ω	± 5 %
Silber	-	0.01 Ω	± 10 %

Abbildung 3.10: **Widerstandsfarbcodierung.** Zeigt die Farbcodes zur Bestimmung des Widerstandswerts und der Toleranz eines Widerstands.

Die THT-Widerstände gibt es in verschiedenen Ausführungen, welche alle ihre Vor- und Nachteile mit sich bringen. Die Abbildung 3.11 zeigt vier Arten, wie diese umgesetzt werden können.

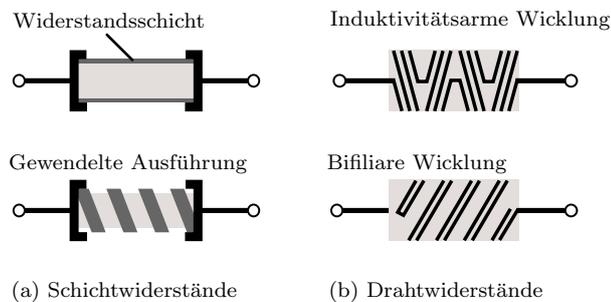


Abbildung 3.11: **Verschiedene Ausführungen von bedrahteten (THT) Widerständen.**

Merke:

Der Widerstandswert eines Materials ist abhängig von dessen geometrischen und spezifischen Eigenschaften.

3.2.8 PTC und NTC

In diesem Abschnitt geht es um eine spezielle Kategorie von Widerständen, die besonders in temperaturabhängigen Anwendungen Gebrauch finden: die PTC- und NTC-Widerständen. Die Namen bezieht sich auf deren positiven bzw. negativen Temperaturkoeffizienten α , welcher bereits in Abschnitt 1.1.3 eingeführt wurde. Diese speziellen Widerstände, auch als Thermistoren bekannt, unterscheiden sich von herkömmlichen Widerständen dadurch, dass ihr Widerstandswert stark von der Temperatur abhängt. Abbildung 3.12 zeigt das entgegengesetzte Verhalten beider Widerstandsarten.

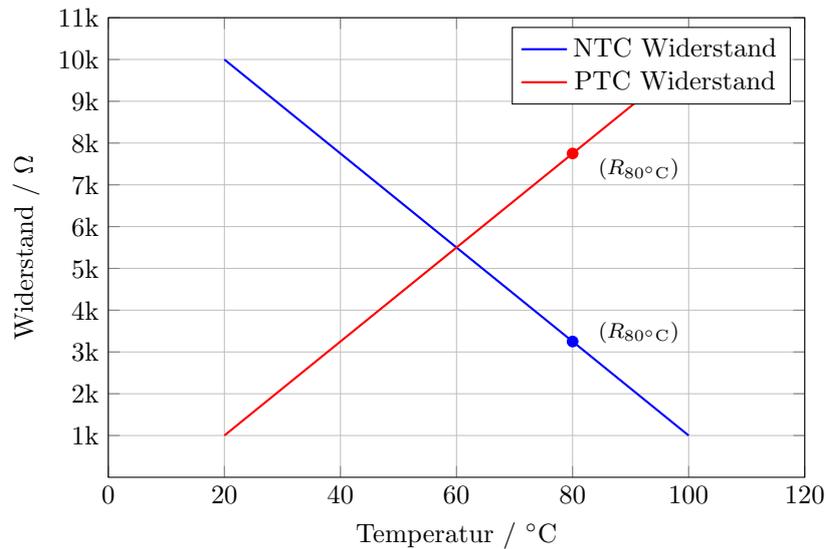


Abbildung 3.12: **Diagramm eines linearen NTC- und eines PTC-Widerstands über die Temperatur.** Bei einem NTC sinkt der Widerstand mit steigender Temperatur, während bei einem PTC der Widerstandswert mit steigender Temperatur ansteigt.

Die PTC-Widerstände haben einen positiven Temperaturkoeffizienten α , welcher in Tabelle 1 im Abschnitt 1.1.3 abgelesen werden kann. Gut leitfähige Materialien haben ein positives α , was bedeutet, dass deren Widerstand bei höheren Temperaturen zunimmt. Somit sind sie im kalten Betrieb leitfähiger, wodurch sie auch "Kaltleiter" genannt werden. In Abbildung 3.13 ist der gleiche PTC-Widerstand bei jeweils unterschiedlichen Temperaturen dargestellt.

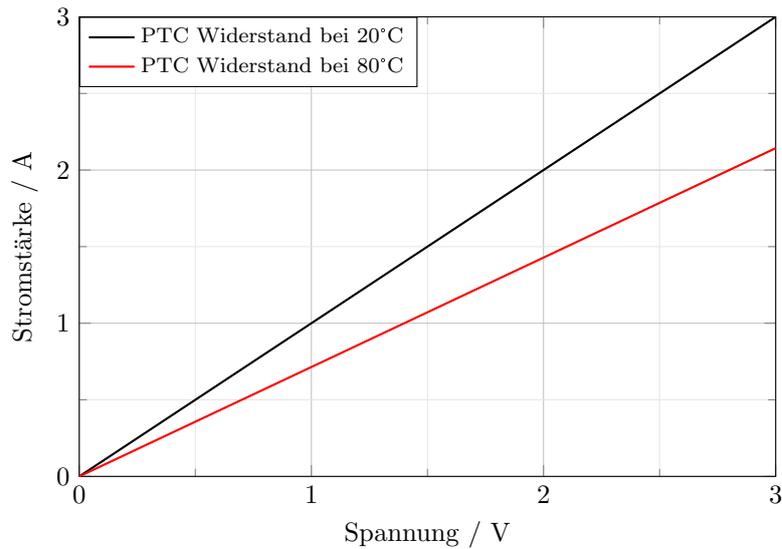


Abbildung 3.13: Diagramm eines PTC Widerstandes bei 20°C und bei 80°C

Das folgende Diagramm zeigt die Erwärmung eines PTC-Widerstandes bei Erhöhung des Stromflusses. Je mehr Strom also durch einen PTC-Widerstand fließt, desto stärker erwärmt er sich.

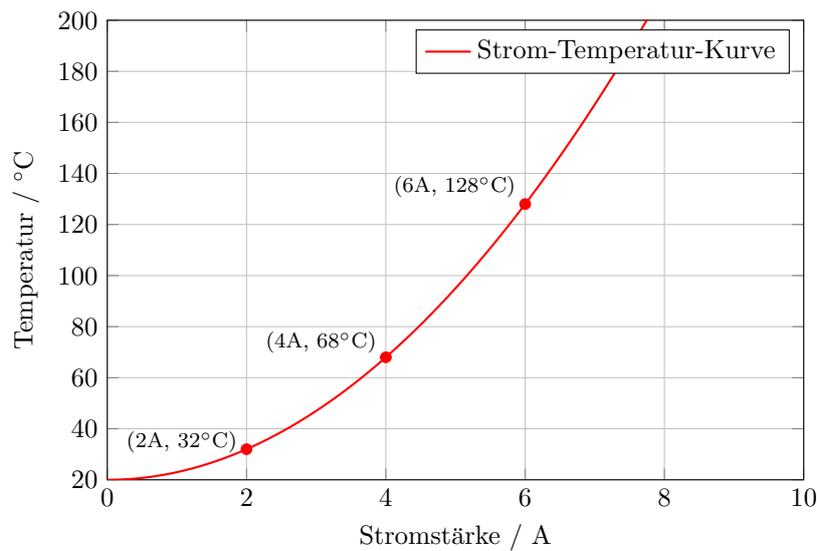


Abbildung 3.14: **Diagramm der Temperatur eines Widerstands in Abhängigkeit von der Stromstärke.** Zeigt wie die Temperatur eines Widerstands mit zunehmender Stromstärke ansteigt. Der Widerstandswert kann sich dabei ebenfalls ändern, abhängig von der Temperaturabhängigkeit des Widerstands.

Das genau entgegengesetzte Verhalten weist ein NTC-Widerstand aufgrund seines negativen Temperaturkoeffizienten auf. Typische Materialien mit einem solchen Verhalten sind Graphit oder Silizium. Da diese Widerstände bei zunehmender Temperatur besser leiten, nennt man sie auch Heißleiter. In Abbildung 3.15 ist zu erkennen, dass der Widerstand bei einer höheren Temperatur einen geringeren Widerstandswert aufweist.

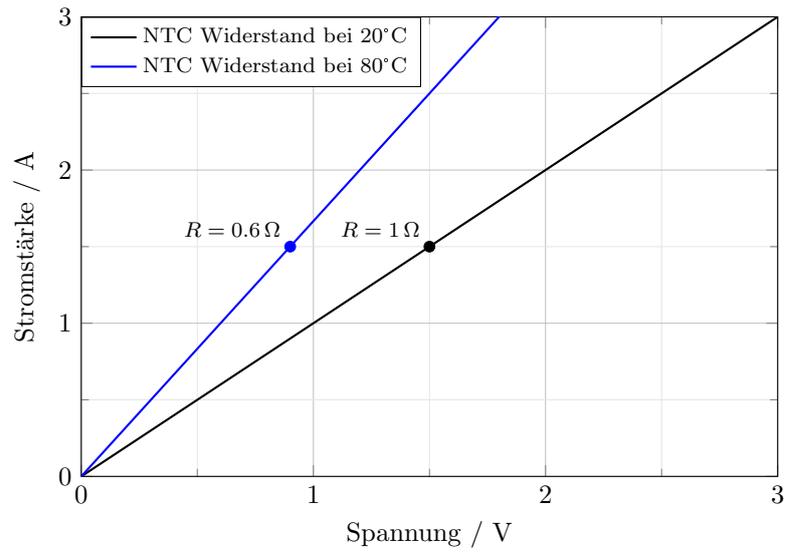


Abbildung 3.15: Diagramm eines NTC Widerstandes bei 20 °C und bei 80 °C

3.3 Spannungs- und Stromquelle

Der Betrieb elektrischer Geräte ist im Regelfall mit der Umsetzung von elektrischer Leistung verbunden. Im Modul 2 zum Thema Energie und Leistung wurde bereits vermittelt, dass Leistung der Verrichtung von Arbeit pro Zeit entspricht und dass dies einer Energieumwandlung gleichzusetzen ist. Um also elektrische Geräte, in denen ja in jedem Fall Energie umgesetzt wird, betreiben zu können, muss also Energie zugeführt werden. Energie kann nur gewandelt, nicht erzeugt werden. Dennoch wird in der Elektrotechnik das Zuführen von Energie in den zu betrachtenden Stromkreisen mit Hilfe von Strom- bzw. Spannungsquellen beschrieben. Dabei wird nicht berücksichtigt, dass es sich hierbei um eine Umwandlung von z.B. mechanischer oder chemischer in elektrische Energie handelt. Dies spielt für die Betrachtung im Stromkreis jedoch keine Rolle. Im Folgenden werden die Strom- und Spannungsquellen beschrieben und die jeweiligen Unterschiede erläutert.

Lernziele: Spannungs- und Stromquelle

Die Studierenden können

- zwischen Spannungs- und Stromquellen unterscheiden und kennen deren Schaltsymbole.
- reale Spannungs- und Stromquellen modellieren.
- Beispiele für verschiedene Quellen benennen.

3.3.1 Spannungsquellen

Die am häufigsten vorkommende Art der Energiequellen für elektrische Systeme ist die Spannungsquelle. Im idealen Fall zeichnet sich dadurch aus, dass sie unabhängig vom angeschlossenen Verbraucher eine konstante Spannung ausgibt. Abbildung 3.16 zeigt das Schaltsymbol einer idealen Spannungsquelle mit der konstanten Ausgangsspannung U_q .

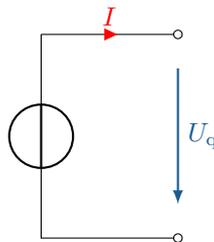


Abbildung 3.16: **Ideale allgemeine Spannungsquelle.** Liefert stets eine konstante Spannung U_q , unabhängig von der Last und passt den Strom automatisch an, um die konstante Spannung aufrechtzuerhalten.

In Abbildung 3.16 führen die Linien ins Leere, was als offene Klemmen bezeichnet wird. Da der Schaltkreis nicht geschlossen ist, fließt auch dementsprechend kein Strom. Würden in dem Fall die Klemmen kurzgeschlossen werden, dann würde die Quelle versuchen die Spannung aufrechtzuerhalten und es würde ein unendlich hoher Strom fließen. Warum dies so gefährlich ist, wird im Abschnitt 3.3.2 anhand einer realen Spannungsquelle deutlich.

3.3.2 Modellierung realer Spannungsquellen

In Schaltbildern, also der graphischen Darstellung von elektrischen Schaltkreisen, werden immer ideale Bauteile verwendet. Um das reale Verhalten von Bauelementen korrekt modellieren zu können und somit das reale Schaltungsverhalten möglichst exakt nachbilden zu können, muss das tatsächliche Verhalten des Bauelements mit Hilfe von idealen Bauteilen nachgebildet werden. Im Folgenden wird beschrieben, wie das Verhalten einer realen Spannungsquelle mit idealen Bauteilen nachgebildet werden kann. Die technische Umsetzung einer beliebigen Spannungsquelle besteht aus physischen Komponenten, welche alle bestimmte Widerstandswerte aufweisen. All diese Eigenschaften ergeben zusammengefasst den sogenannten Innenwiderstand R_i einer Quelle. Im Fall der realen Spannungsquelle befindet sich der Innenwiderstand in Reihe mit der idealen Spannungsquelle. In Abbildung 3.17 ist eine modellierte reale Spannungsquelle zu sehen.

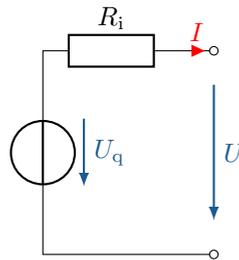


Abbildung 3.17: **Reale Spannungsquelle mit Innenwiderstand.** Die Spannung U_q wird durch den Innenwiderstand R_i beeinflusst und ist an den Ausgangsklemmen dadurch geringer.

Im Schaltbild ist zu erkennen, dass sowohl U_q , als auch U beide nach unten zeigen. Dies liegt am Zählpfeilsystem, welches in Modul 4 näher behandelt wird. An dieser Stelle genügt es zu wissen, dass Generatorzählpfeil und Verbraucherzählpfeil entgegengesetzt sind, da die Summe beider Pfeile Null ergeben muss. Wird nun ein Verbraucher angeschlossen, fließt der Strom über den Innenwiderstand R_i durch den Verbraucher. Es wird also auch Leistung im Innenwiderstand umgesetzt.

Betrachten wir im realen Fall erneut das Verhalten bei kurzgeschlossenen Ausgangsklemmen, so wird die gesamte, von der Quelle abgegebene Leistung, lediglich am Innenwiderstand der Spannungsquelle umgesetzt. Die Leistung kann durch $P = \frac{U_q^2}{R_i}$ berechnet werden. Im Regelfall ist die Quelle dafür nicht ausgelegt, was dazu führen würde, dass sich die Energie in sehr viel Wärmeenergie umwandeln, und zur Zerstörung der Quelle führen würde.

Wird am Ausgang der Spannungsquelle eine Last mit einem Widerstand R_L angeschlossen, so fließt ein Strom I durch die Widerstände R_i und R_L . Dieser kann nach dem ohm'schen Gesetz und der im folgenden Modul vorgestellten Zusammenfassung von Widerständen berechnet werden zu $I = \frac{U_q}{(R_i + R_L)}$. Dieser Strom führt dazu, dass am Innenwiderstand R_i eine Spannung U_{R_i} abfällt. Im Modul 2 wurde bereits hergeleitet, dass die Summe aller Spannungen innerhalb eines geschlossenen Kreises null ergeben muss. Im Modul 4 wird hieraus die so genannte Maschenregel hergeleitet, mit deren Hilfe sich die Ausgangsspannung U berechnen lässt zu

$$U = U_q - U_{R_i} = U_q - I \cdot R_i = U_q - U_q \cdot \frac{R_i}{R_i + R_L} \quad (3.24)$$

Je kleiner also der Innenwiderstand R_i ist, desto weniger unterscheidet sich die Ausgangsspannung U einer belasteten Spannungsquelle von der Quellspannung U_q . Ein im Vergleich zum Lastwiderstand R_L möglichst kleiner Innenwiderstand R_i sollte also für ein möglichst ideales Verhalten angestrebt werden. Dies kann u.a. mit möglichst großen Leiterquerschnitten innerhalb der Quelle realisiert werden.

Wird die reale Spannungsquelle, modelliert mit U_q und R_i , im Leerlauf betrieben, ist die Ausgangsspannung U gleich der Quellspannung U_q , da kein Strom durch den Innenwiderstand fließt und dort

keine Spannung abfallen kann.

Beispiele für reale Spannungsquellen sind u.a. Batterien und Akkumulatoren. Dabei wird, wie weiter oben beschrieben, ein möglichst kleiner Innenwiderstand angestrebt. Eine 12-V-Starterbatterie für Autos hat einen Innenwiderstand von weniger als $10\text{ m}\Omega$. Auch eine Haushaltssteckdose kann als Spannungsquelle mit 230 V Quellspannung und kleinem Innenwiderstand betrachtet werden.

Merke:

- Eine Spannungsquelle darf nie kurzgeschlossen werden!
- Bei Spannungsquellen stellt sich immer der Strom ein.

3.3.3 Stromquellen

Im Vergleich zu den Spannungsquellen sind Stromquellen deutlich weniger vertreten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen konstanten Strom liefern und sich die Spannung entsprechend einstellt. Abbildung 3.18 zeigt das Schaltsymbol einer idealen Stromquelle mit dem konstanten Ausgangsstrom I_q .

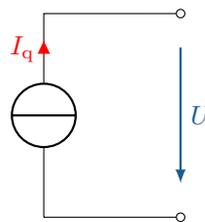


Abbildung 3.18: **Ideale allgemeine Stromquelle.** Liefert stets einen konstanten Strom I_q , unabhängig von der Last und passt die Spannung automatisch an, um den konstanten Strom aufrechtzuerhalten.

Der hier dargestellte Fall einer leerlaufenden Stromquelle führt, vergleichbar mit der kurzgeschlossenen Spannungsquelle, zu einer unendlich hohen Leistungsabgabe der Quelle und muss daher vermieden werden.

3.3.4 Modellierung realer Stromquellen

Genauso wie bei den Spannungsquelle, gibt es in der Realität auch keine idealen Stromquellen. Um das reale Verhalten einer Stromquelle beschreiben zu können, muss auch diese erst modelliert werden. Die Abbildung 3.19 zeigt eine solche modellierte Stromquelle.

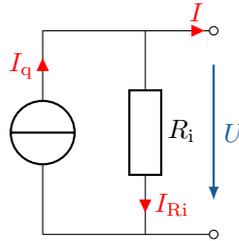


Abbildung 3.19: **Reale Stromquelle mit Innenwiderstand.** Der Strom I_q wird durch den Innenwiderstand R_i beeinflusst und ist an den Ausgangsklemmen geringer.

Das Modell der realen Stromquelle setzt sich dabei ebenfalls aus dem Innenwiderstand R_i und der idealen Stromquelle zusammen, wobei der Unterschied zur Spannungsquelle darin besteht, dass der Innenwiderstand parallel zur idealen Stromquelle platziert ist. Auch hier ist der tatsächliche Ausgangsstrom kleiner als der Quellstrom I_q . Im Modul 4 wird die Knotenregel eingeführt. Diese besagt, dass die Summe aller Ströme in einem Knoten (Verzweigungspunkt) gleich null sein muss, so dass sich der Ausgangsstrom I ergibt zu

$$I = I_q - I_{R_i} = I_q - \frac{U}{R_i} \quad (3.25)$$

Je größer also der Innenwiderstand R_i ist, desto kleiner wird der Strom I_{R_i} und desto kleiner ist die Abweichung zwischen Ausgangsstrom I und dem Quellstrom I_q .

Entgegen des dargestellten Schaltbildes darf eine Stromquelle niemals mit offenen Klemmen betrieben werden, da ähnlich wie im Fall der Spannungsquelle die gesamte Leistung im Innenwiderstand umgesetzt werden würde, was zu einer hohen thermischen Belastung und schlussendlich zur Zerstörung der Stromquelle führen würde. Beispiele für reale Stromquellen sind Solarzellen im entsprechenden Betriebszustand oder ein Labornetzteil in der Strombegrenzung.

Merke:

- Eine Stromquelle darf nie im Leerlauf betrieben werden!
- Bei Stromquellen stellt sich immer die Spannung ein.

3.3.5 Umrechnung von Spannungs- und Stromquelle

Spannungs- und Stromquellen können bezüglich ihres Klemmenverhaltens ineinander umgerechnet werden. Voraussetzung dafür ist, dass sowohl der Kurzschlussstrom I_K als auch die Leerlaufspannung U_L bei beiden Quellen gleich sind. Abbildung 3.20 zeigt die Überführung der Schaltbilder ineinander. Weiterführende Inhalte zur Umrechnung und Leistungsanpassung folgen in Modul 4.

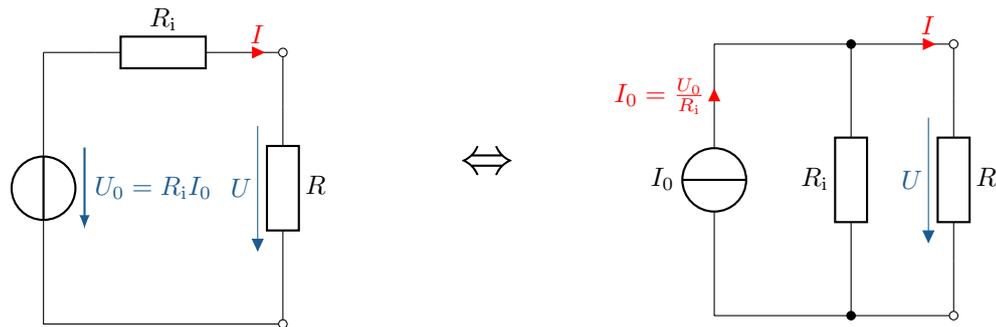


Abbildung 3.20: **Umwandlung einer Gleichspannungsquelle in eine Stromquelle.** Der Innenwiderstand der Spannungsquelle wird dabei zum Parallelwiderstand der Stromquelle, wobei die resultierende Stromquelle einen konstanten Strom liefert, der durch den Widerstand bestimmt wird.

3.3.6 Verschiedene Spannungs- und Stromquellen

Die zuvor eingeführten Schaltsymbole für Spannungs- und Stromquellen sind allgemeingültig und machen keine spezifischen Aussagen über die Signalform der Ausgangsgröße. Grundsätzlich wird neben der Unterscheidung zwischen Spannungs- und Stromquellen auch zwischen Gleich- (DC, Direct Current) und Wechselspannung (AC, Alternating Current) differenziert.

Die gebräuchlichste Form für den Betrieb elektronischer Geräte ist die Gleichspannungsquelle. Sie sorgt kontinuierlich dafür, dass Ladungsträger vom Minus- zum Pluspol fließen, was ein gleichbleibendes elektrisches Feld vom Plus- zum Minuspol erzeugt.

Wechselspannungsquellen (AC) hingegen haben typischerweise eine sinusförmige Ausgangsspannung bzw. einen sinusförmigen Ausgangsstrom. Für den Energietransport über weite Strecken haben sich in der Vergangenheit Hochspannungsleitungen mit Wechselspannung durchgesetzt, da diese technisch einfacher und kostengünstiger zu realisieren waren. Der bedeutendste Vorteil von Wechselspannung ist die einfache Transformation der Spannung. Außerdem ist es praktisch, da beim Anschluss von Verbrauchern nicht auf die Verpolung geachtet werden muss.

Mittlerweile gibt es jedoch auch erste Umsetzungen des Energietransports in Form von Gleichspannung. Der Einsatz von Gleichstrom (DC) für lange Übertragungsstrecken, wie bei den HVDC-Leitungen (High Voltage Direct Current) von der Nordsee nach Süddeutschland, bietet einige Vorteile: Gleichstrom ist effizienter, da er keine Blindleistung erzeugt, was bedeutet, dass keine zusätzlichen Verluste durch die Kabelkapazität auftreten. Dadurch bleibt die Stromamplitude niedriger, was zu geringeren Übertragungsverlusten führt und DC besonders für sehr lange Strecken attraktiv macht. In Abbildung 3.21 sind die Schaltzeichen der verschiedenen Quellen dargestellt.

Es ist zu berücksichtigen, dass Wechselspannungs- und Stromquellen eine sinusförmige Ausgangsspannung bzw. einen sinusförmigen Ausgangsstrom haben, wohingegen die zeitlich beliebig veränderlichen Quellen jede beliebige Form haben können. Ein Beispiel dafür ist das Rechtecksignal, welches aus dem Ein- und Ausschalten einer Gleichspannungsquelle stammen könnte. Genutzt werden solche Quellen beispielsweise in der mobilen Anwendung der weit verbreiteten Bauart von Elektromotoren, welche auch Synchron, bzw. Asynchronmaschinen genannt werden. Diese Motoren werden in mobilen Anwendungen durch eine Gleichspannungsquelle betrieben, dessen Signalform mithilfe einer Leistungselektronik in das gewünschte Rechtecksignal gewandelt (gepulst) werden und im Motor durch über die Spulenwicklungen aus dem gepulsten Spannungssignal ein sinusförmigen Strom entsteht. Mehr dazu im Modul elektrische Maschinen. Ein weiteres Beispiel für zeitlich beliebige Signale ist die digitale Informationsübertragung in der Nachrichtentechnik, wobei eine Eins dem Highsignal und eine Null einem Lowsignal entspricht, was ebenfalls einem Rechtecksignal gleicht.

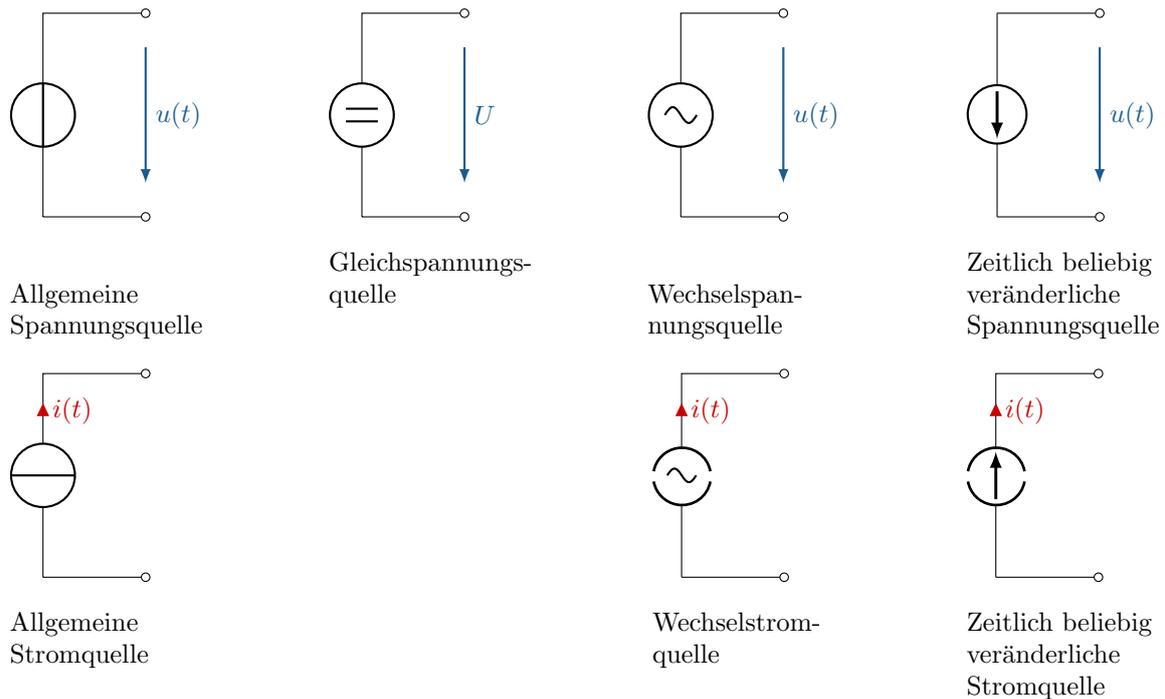


Abbildung 3.21: Verschiedene Spannungs- und Stromquellen.

3.4 Kapazität und Kondensator

In der Elektrotechnik gibt es drei grundlegende Komponenten, mit denen das elektrische Verhalten von Bauteilen beschrieben werden kann. Neben dem zuvor behandelten ohmschen Widerstand, gibt es noch die Kapazität und die Induktivität. In diesem Abschnitt geht es um die Eigenschaft der Kapazität, sowie dem dazugehörigen Bauteil, dem Kondensator. Der darauffolgende Abschnitt behandelt die Induktivität sowie das zugehörige Bauteil, die Spule.

Lernziele: Kapazität und Kondensator

Die Studierenden

- können zwischen Kapazität und Kondensator differenzieren.
- kennen die wichtigsten Parameter rund um den Kondensator und die Kapazität.
- können die Kapazität eines Kondensators berechnen.

3.4.1 Die elektrische Kapazität C

Die elektrische Kapazität ist die Fähigkeit eines Objektes, elektrische Energie in Form eines elektrischen Feldes, zu speichern. Diese Eigenschaft kommt zustande, sobald elektrische Ladungsträger ungleich verteilt sind und sich zwischen den Bereichen ein elektrisches Feld ausbildet. Das Formelzeichen der Kapazität ist C (capacity) während die Einheit in Farad (F) angegeben wird.

Das einfachste und geläufigste Beispiel, an dem die Kapazität erklärt werden kann, ist der Plattenkondensator. Bei dieser Art des Kondensators liegen sich zwei leitfähige Platten gegenüber, welche

jeweils mit einem anderen Potential beaufschlagt werden. In Abbildung 3.22 ist ein Kondensator mit idealisiertem Feldverlauf dargestellt.

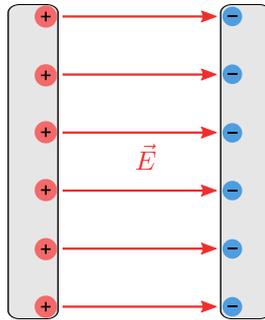


Abbildung 3.22: **Idealer Plattenkondensator mit idealisiertem Feldverlauf.** Der Kondensator speichert elektrische Energie in einem elektrischen Feld, was idealisiert zwischen den Platten dargestellt ist und hat eine konstante Kapazität C , die nur von der Fläche der Platten und dem Abstand zwischen ihnen abhängt.

Aufgrund der unterschiedlichen Potentiale auf den Platten, bildet sich von der höheren zur geringeren geladenen Platte ein elektrisches Feld aus. Im idealen Fall wird angenommen, dass sich außerhalb der Kondensatorplatten kein Feld ausbildet. In der Realität sammeln sich an den seitlichen Rändern der Platten ebenfalls Ladungsträger, welche zu komplizierteren Feldverteilungen führen. In Abbildung 3.23 ist die Grafik eines solchen realen Plattenkondensators dargestellt.

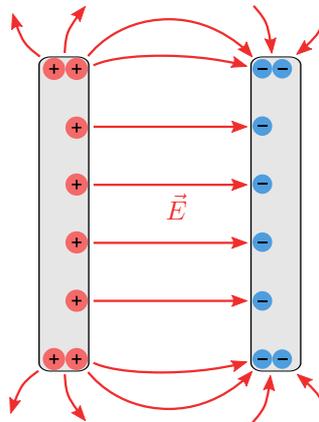


Abbildung 3.23: **Realer Kondensator mit realem Feldverlauf.** Im Gegensatz zum idealen Kondensator treten Randfelder und Verluste auf, die die tatsächliche Kapazität und das elektrische Verhalten beeinflussen.

In vielen Fällen kann das reale Verhalten jedoch vernachlässigt werden, was die Berechnungen deutlich vereinfacht. Aus dem Grund wird im Folgenden nun noch von idealisierten Kondensatoren ausgegangen.

Die Kapazität ist definiert als das Verhältnis der gespeicherten elektrischen Ladung Q zur angelegten Spannung U . Je höher die Kapazität eines Kondensators ist, desto mehr Ladung kann er bei einer gegebenen Spannung speichern.

$$[C] = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

$$C = \frac{Q}{U} \quad (3.26)$$

$$Q = C \cdot U \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon \cdot \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int \vec{E} d\vec{s}} \quad (3.27)$$

3.4.2 Der Kondensator als Bauelement

Die Eigenschaften der Kapazität werden in verschiedenen Bereichen der Elektrotechnik bewusst genutzt. Die Nutzbarmachung dieser Eigenschaften erfolgt mit Hilfe von Kondensatoren. Es gibt sie in verschiedenen Ausführungen. Abbildung 3.24 zeigt einige Beispiele von THT- bis hin zu SMD-Bauteilen.

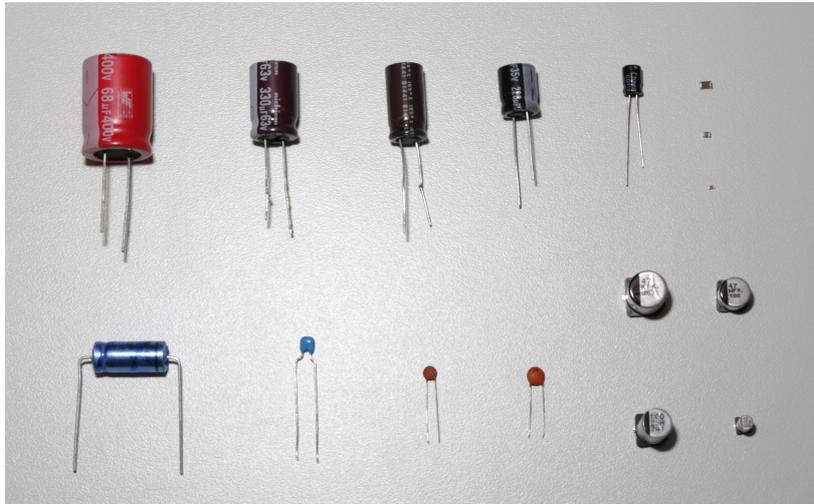


Abbildung 3.24: **Verschiedene Arten und Bauformen von Kondensatoren.** Darunter Keramik- und Elektrolytkondensatoren. Diese variieren in Größe, Kapazität und Spannung, um unterschiedlichen Anwendungen gerecht zu werden.

Darüber hinaus gibt es sie aber auch in deutlich kleineren bzw. deutlich größeren Dimensionen. In der Hochfrequenztechnik werden Kapazitäten beispielsweise lediglich durch das Design der Leiterplatten realisiert, während Kondensatoren für industrielle oder enegietechnische Anwendungen mehrere Zentimeter bis Meter groß werden können.

Was alle Kondensatoren verbindet, ist ihre Fähigkeit, die Eigenschaft der Kapazität nutzbar zu machen, wie es im folgenden Schaltbild ?? dargestellt ist. Dieses Schaltbild repräsentiert jedoch nur die idealisierte, nutzbare Kapazität.

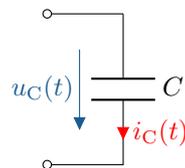


Abbildung 3.25: **Schaltlement eines idealen Kondensators.** Zeigt den Spannungsabfall über dem Kondensator und den Stromfluss durch ihn.

Für eine realitätsgetreue Nachbildung der Schaltung ist es wichtig den Kondensator als Bauteil vollständig zu beschreiben. Dies wird mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes gemacht, welches auch die

ungewollten, also parasitären Eigenschaften des Bauteils, nachbildet. Abbildung ?? zeigt ein solches Ersatzschaltbild.

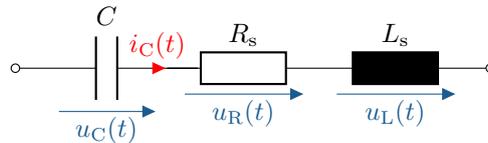


Abbildung 3.26: **Ersatzschaltbild eines realen Kondensators.** Der ideale Kondensator C wird durch eine Serien-Induktivität L_s und einen Serien-Widerstand R_s ergänzt, um parasitäre Effekte zu berücksichtigen.

Im Ersatzschaltbild des Kondensators werden nicht nur die nutzbare Kapazität, sondern auch die parasitären Eigenschaften berücksichtigt, die in realen Kondensatoren auftreten. Diese parasitären Eigenschaften entstehen beispielsweise durch die Induktivität der Anschlüsse und die ohmschen Verluste im Material. Das modellierte Ersatzschaltbild ermöglicht es, diese Effekte im Schaltungsentwurf zu berücksichtigen und das Schaltverhalten besser vorherzusagen.

Merke:

Der Kondensator ist der verzweifelte Versuch eine Kapazität nachzubilden.

3.4.3 Das Dielektrikum

Das Dielektrikum ist, wie der Name bereits impliziert, ein dielektrisches, also elektrisch nicht leitfähiges Material. Da jedes Material aus Atomen besteht und alle Atomrümpfe mit Elektronen versehen sind (Elektronenhülle), wirkt sich entsprechend auch ein elektrisch nicht leitfähiges Material auf das Verhalten des elektrischen Feldes aus. Sobald ein solches Material zwischen die Platten eines Kondensators eingefügt wird, ändern sich demnach auch die Eigenschaften des Kondensators. In Abbildung 3.27 ist anhand der unterbrochenen Pfeilung des elektrischen Feldes das unterschiedliche Verhalten zu erkennen. Die elektrische Flussdichte D ist eine Hilfsgröße, welche materialunabhängig ist, auf welche in Abschnitt 1.3.4 noch eingegangen wird.

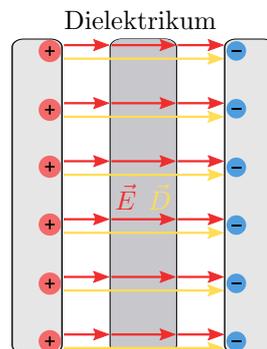


Abbildung 3.27: **Idealer Kondensator mit Dielektrikum.** Der Kondensator besteht aus zwei Platten, zwischen denen sich ein Dielektrikum befindet. Das Dielektrikum ist ein nicht leitendes Material, das die elektrische Feldstärke reduziert und die Kapazität des Kondensators erhöht, indem es die Relative Dielektrizitätskonstante erhöht.

Die Eigenschaften des Dielektrikums sind materialspezifisch und werden durch die Dielektrizitätszahl ϵ_r quantifiziert. In Tabelle 3.2 sind Beispiele einiger Dielektrika und deren ϵ_r , aufgeführt:

Material	ϵ_r
Vakuum	1
Luft (bei STP)	1.0006
Kunststoff (PE)	2.25-2.3
Glas	3-10
Keramik	5-300
Silizium	11.7
Tantaloxid	25-30
Wasser	81

Tabelle 3.2: **Relative Dielektrizitätszahl verschiedener Materialien.** Diese dimensionslose Zahl gibt an, wie stark das elektrische Feld in einem Material im Vergleich zum Vakuum beeinflusst wird. Sie ist ein Maß für die Fähigkeit des Materials, elektrische Ladung zu speichern. Materialien mit einer höheren Dielektrizitätszahl erhöhen die Kapazität eines Kondensators, da sie die elektrische Feldstärke im Inneren verringern.

Zur vollständigen Beschreibung der Materialeigenschaften des Dielektrikums wird neben der Dielektrizitätszahl noch die elektrische Feldkonstante ϵ_0 benötigt. Dabei handelt es sich um das dielektrische Verhalten des elektrischen Feldes im Vakuum. Während die Dielektrizitätszahl ϵ_r einheitslos ist, bringt die elektrische Feldkonstante die Einheit $\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ mit. Sie wird mit der relativen Dielektrizitätszahl multipliziert was zusammen die Dielektrizitätskonstante ϵ ergibt.

$$[\epsilon] = 1 \frac{\text{Farad}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{F}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad (3.28)$$

ϵ : Dielektrizitätskonstante

ϵ_0 : Elektrische Feldkonstante ($8.85421878 \cdot 10^{-12}$)

ϵ_r : Relative Dielektrizitätszahl

Mit Hilfe dieser Materialeigenschaften des Dielektrikums und den Dimensionen sowie der Entfernung der Kondensatorplatten, kann die Kapazität des Kondensators wie folgt berechnet werden:

$$[C] = 1 \text{ F}$$

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d} \quad (3.29)$$

A : Querschnittsfläche des Materials (m^2)

d : Abstand der Elektroden (m)

3.4.4 Die elektrische Flussdichte

Die elektrische Flussdichte \vec{D} , auch Verschiebungsdichte genannt, steht proportional zum elektrischen Feld \vec{E} . Ihr Vorteil besteht darin, dass sie materialunabhängig ist, was mathematische Vorteile mit sich bringt.

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} + P \quad (3.30)$$

Zusätzlich zur Dielektrizitätskonstanten ε wird die Polarisation des Mediums P addiert. Sie beschreibt das Polarisationsverhalten, welches im Einschaltvorgang abläuft. Im statischen Fall kann die Polarisation P oft vernachlässigt werden, was die Gleichung wie folgt vereinfacht.

$$[D] = 1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (3.31)$$

Einführung in die zeitabhängige Vorgänge

Bisher ist bekannt, dass elektrische Felder in leitfähigen Materialien einen Strom I und eine Spannung U verursachen. Der Strom I und die Spannung U beschreiben die Felder jedoch nur integral, sie werden also als zeitlich konstant angesehen. Im Gegensatz zum Widerstand R gibt es jedoch Bauteile (Kondensatoren und Spulen), die ein zeitlich veränderliches Verhalten aufweisen. Der ohm'sche Widerstand R alleine reicht somit nicht aus, um die Verhältnisse bei Netzwerken mit zeitlich veränderlichen Vorgängen zu beschreiben. Zur Beschreibung dieser zeitabhängigen Verhalten werden die zeitabhängigen Größen $u(t)$ und $i(t)$ verwendet.

Die Herleitung der Zeitabhängigkeiten kann mathematisch folgendermaßen gezeigt werden. Aus der Formel 3.4.1 ist bereits die Grundgleichung des Kondensators bekannt:

$$Q = C \cdot U \quad (3.32)$$

Zur Beschreibung des zeitlichen Verhaltens des Kondensators, wird die Änderung der Ladung über die Zeit betrachtet

$$\frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt} \quad (3.33)$$

$\frac{dQ}{dt}$ beschreibt die Änderungsrate der Ladung, welche nach dem Grundgesetz der Elektrotechnik dem Strom $i(t)$ entspricht, der in den Kondensator hinein- oder herausfließt.

$$\frac{dQ}{dt} = i(t) \quad (3.34)$$

Wird nun in der Formel 3.32 die konstante Ladung Q durch die zeitlich veränderliche Größe $i(t)$ ersetzt, erhält auch die Spannung eine zeitliche Abhängigkeit.

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad (3.35)$$

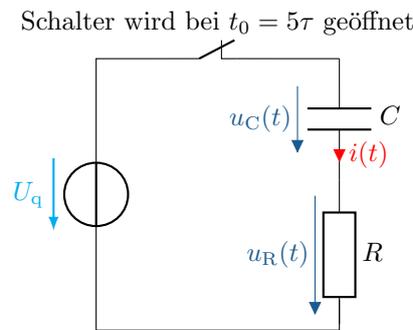
Durch mathematische Umstellung nach $u_c(t)$ kann die Spannung in Abhängigkeit des Stromes und der Kapazität dargestellt werden:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_c(t) dt \quad (3.36)$$

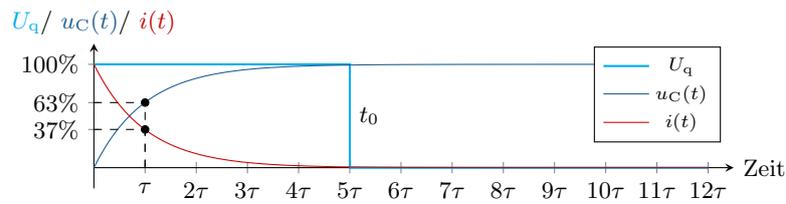
Aus der Gleichung 3.35 folgt unmittelbar, dass sich die Spannung an einer Kapazität nicht schlagartig ändern kann, da dafür ein unendlich hoher Strom erforderlich wäre.

3.4.5 Schaltverhalten eines Kondensators

Das Schaltverhalten beschreibt das Verhalten eines Bauteils bei Änderung der angelegten Spannung. Je nachdem ob eine Spannungsquelle ein- oder ausgeschaltet wird, verhalten sich Strom und Spannung am Bauteil entsprechend seiner Charakteristika. Zur Analyse des zeitlichen Verhaltens von Bauteilen ist zuerst ein Schaltbild notwendig, welches die zu analysierende Schaltung visualisiert. Abbildung 3.28a zeigt ein Schaltbild einer Reihenschaltung einer Kapazität C mit einem Widerstand R , welche über einen Schalter mit einer Spannung U_q versorgt werden können.



(a) Darstellung der Reihenschaltung bestehend aus einer Kapazität C , einem Widerstand R und einem Schalter.



(b) Spannungs- und Stromverlauf über der Kapazität bei einer Gleichspannung die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird und zum Zeitpunkt t_0 abgeschaltet wird.

Abbildung 3.28: **Der Spannungs- und Stromverlauf über der Kapazität.** Das Diagramm zeigt die Reaktion der Kapazität auf die plötzliche Änderung der Spannung und veranschaulicht das typische Ladeverhalten.

Im Diagramm 3.28b ist zu sehen, dass sich trotz angelegter Gleichspannung U_q die Spannung $u_C(t)$ zeitgleich nicht mitändert, sondern eine Trägheit aufweisen. Dieses zeitlich veränderliche Verhalten wird im Schaltbild 3.28a durch die zeitabhängigen Größen $u(t)$ und $i(t)$ ausgedrückt.

In diesem Beispiel ist der Schalter zu Beginn geschlossen und wird bei $t_0 = 5\tau$ geöffnet. Der Kondensator ist anfangs nicht geladen. Im Diagramm ist zu erkennen, dass sich trotz angelegter Spannung U_q die Spannung über der Kapazität $u_C(t)$ nicht sprunghaft ändert.

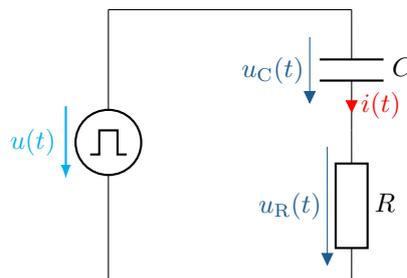
Dieses Einschaltverhalten resultiert aus der Aufladung der Kapazität. Die Ladungsträger müssen sich dafür auf den Kondensatorplatten ansammeln. Dies geschieht so lange, bis die Spannung zwischen den Platten der angelegten Spannung der Spannungsquelle entspricht. Da die zur Aufladung benötigten Ladungsträger in die Kondensatorplatten wandern müssen, fließt während dieses Vorgangs ein entsprechender Strom $i_C(t)$.

Im Fall einer ideal leitenden Schaltung ohne ohm'schen Widerstand, würden sich die Ladungsträger unendlich schnell auf den Kondensatorplatten ansammeln, was einem unendlich hohen Strom entsprechen würde. Im realen Fall hat der Kondensator bzw. die Hinleitung zum Kondensator, einen ohm'schen Widerstand, welcher die Ladungsträger auf dem Weg zu den Kondensatorplatten ausbremst, also die elektrische Stromstärke reduziert. Daraus folgt der maximal mögliche Strom I_{\max} .

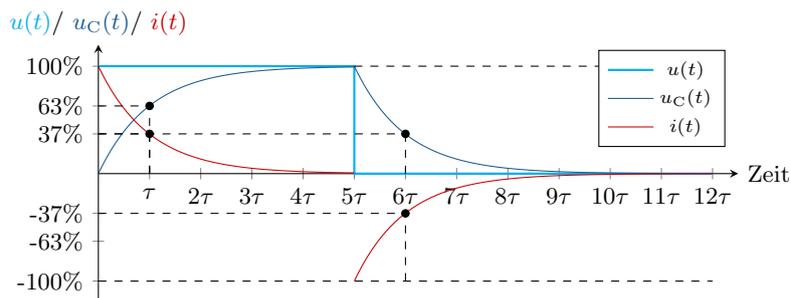
$$I_{\max} = \frac{U_q}{R} \quad (3.37)$$

Sobald der Schalter geöffnet wird, bleibt die Spannung über der Kapazität erhalten. Dies bedeutet, dass die zugeführte Energie in der Kapazität verbleibt und sich im stationären Fall nicht mehr ändert. Dementsprechend fließt bei einer aufgeladenen Kapazität auch kein Strom mehr, was in einem eingeschwungenen Gleichstromnetzwerk einem Leerlauf gleichzusetzen ist.

Mit Hilfe der beiden Formeln 3.35 und 3.36 ist das Verhalten von Strom und Spannung an einer Kapazität vollständig beschrieben, was nun diverse Berechnungen ermöglicht. Ein weiteres Beispiel ist das Schaltverhalten einer Kapazität bei anlegen einer Rechteckspannung. Der Unterschied besteht darin, dass nicht wie in Beispiel 3.28a, eine konstante Spannungsquelle über einen Schalter geschaltet wird, sondern die Spannungsquelle selbst die Eingangsspannung bestimmt.



(a) Darstellung der Reihenschaltung bestehend aus einer Kapazität C und einem Widerstand R an einer rechteckförmigen Spannungsquelle.



(b) Spannungs- und Stromverlauf über der Kapazität bei einer rechteckförmigen Spannung.

Abbildung 3.29: **Spannungs- und Stromverlauf über der Kapazität.** Das Diagramm zeigt die Reaktion der Kapazität auf eine plötzliche Änderung der Spannung und veranschaulicht das typische Lade- und Entladeverhalten des Kondensators.

Im Gegensatz zum Schalter, versucht die Spannungsquelle im Beispiel 3.29a ab dem Zeitpunkt $t_0 = 5\tau$ die Systemspannung auf 0 zu ziehen. Dies führt dazu, dass die Kapazität entladen wird. Dies führt entsprechend zu einem entgegengesetzten Stromfluss $i_C(t)$, da sich die Ladungsträger von den Kondensatorplatten wegbewegen, um wieder einen neutralen Zustand zu erreichen.

Beispiel 3.1: Berechnung der Kapazität

- Ladung auf Platten $Q = \sigma \cdot A = \varepsilon \cdot E \cdot A$
- Kapazität mit $C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$ berechnen
- Gespeicherte Energie $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$

- Kapazität zweier Kondensatoren mit verschiedenen ϵ_r über \vec{D} berechnen

3.5 Induktivität und Spule

Das Gegenstück zum Kondensator ist die Spule, oder genauer gesagt: Das Gegenstück zur Kapazität C ist die Induktivität L . Die Induktivität ist ebenfalls ein Energiespeicher, wobei der Unterschied in der Art der genutzten Felder liegt. Während bei der Kapazität die Energie in Form eines elektrischen Feldes gespeichert wird, geschieht dies bei der Induktivität über das magnetische Feld.

Lernziele: Induktivität und Spule

Die Studierenden

- können zwischen Induktivität und Spule differenzieren.
- kennen die wichtigsten Parameter rund um die Induktivität und die Spule.
- können die Induktivität einer Spule berechnen.

3.5.1 Die Induktivität L

Die Induktivität ist die Fähigkeit eines Objektes, elektrische Energie in Form eines magnetischen Feldes zu speichern. Diese Eigenschaft kommt zustande, sobald ein elektrischer Strom durch einen Leiter fließt um welchen sich entsprechend ein magnetisches Feld ausbildet. Das Formelzeichen der Induktivität ist L (benannt nach dem französischen Physiker Heinrich Lenz), während die Einheit in Henry (H) angegeben wird.

Das einfachste und geläufigste Beispiel, an dem die Induktivität erklärt werden kann, ist die Spule. Obwohl sich das Phänomen der Induktivität bereits bei einem einfachen Leiter ausbildet, wird dieser Effekt durch den Aufbau einer Spule bewusst verstärkt. In Abbildung 3.30 ist ein Zylinderluftspule mit ihrer magnetischen Flussdichte \vec{B} dargestellt.

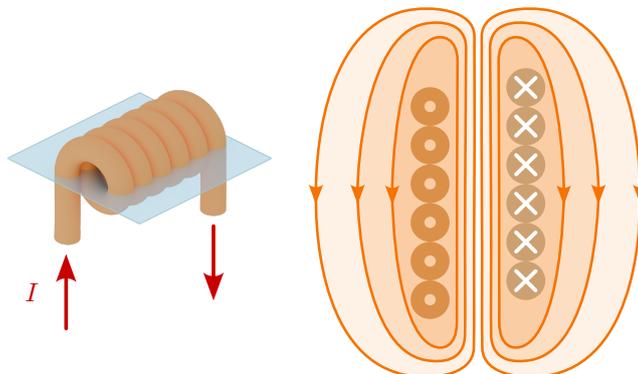


Abbildung 3.30: **Darstellung des magnetischen Feldes einer Zylinderluftspule.** Es illustriert die Feldlinien sowohl innerhalb als auch außerhalb der Spule und veranschaulicht, wie sich das Magnetfeld entlang der Achse der Spule konzentriert und außerhalb der Spule abnimmt.

Das Thema der magnetischen Größen wird ausführlich in Modul 6 behandelt. Zum Verständnis der Funktionsweise einer Spule und der daraus resultierenden Induktivität, soll eine kurze Einführung zur Entstehung von Magnetismus helfen.

Sobald Strom durch einen geraden Leiter fließt, entsteht ein magnetisches Feld konzentrisch um den Leiter herum. Abhängig von Stromstärke und Stromrichtung ändert sich auch das magnetische Feld. Die Rechte-Faust-Regel dient dabei als Gedankenstütze zur Bestimmung der Richtung und Orientierung des Magnetfeldes.

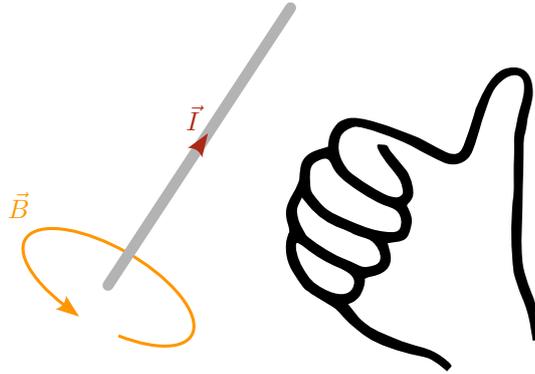


Abbildung 3.31: **Rechte-Hand-Regel zur Bestimmung der Richtung des Magnetfeldes.** Ein stromdurchflossenen Leiter erzeugt ein Magnetfeld das mit Hilfe der Rechten-Hand-Regel bestimmt wird. Wenn der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Stromes zeigt, dann krümmen sich die übrigen Finger in die Richtung der Feldlinien des Magnetfeldes.

Entsprechend der Grafik 3.31 verläuft das Magnetfeld in Richtung der Fingerspitzen konzentrisch um den Leiter herum, sofern man den Daumen in Richtung der technischen Stromrichtung, also entgegen der Fließrichtung der Elektronen, ausrichtet. Das Magnetfeld dreht sich von Süd nach Nord und hat eine Flussdichte \vec{B} , sowie eine Feldstärke \vec{H} . Dabei ist zu beachten, dass sich die magnetische Flussdichte \vec{B} analog zur elektrischen Feldstärke \vec{E} , und die magnetische Feldstärke \vec{H} analog zur elektrischen Flussdichte \vec{D} , verhält. Im Modul 6 wird das Thema Magnetismus ausführlicher behandelt. In diesem Modul geht es primär um das Kennenlernen der Spule und der Induktivität.

Der britische Physiker und Chemiker Michael Faraday führte Mitte des 19. Jahrhunderts Experimente durch, bei denen er eine Spule in der Nähe eines Magneten bewegte oder den Strom in einer benachbarten Spule veränderte. Dabei stellte er fest, dass sich die Größe der induzierten Spannung proportional zur Änderungsrate des Magnetfeldes verhält.

$$U_i \sim \frac{d\phi}{dt} \quad (3.38)$$

Faraday stellte fest, dass der Proportionalitätsfaktor von der Anzahl der Wicklungen der Spule abhängt.

$$U_i = -N \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad (3.39)$$

Etwas zur gleichen Zeit entdeckte der amerikanische Physiker Joseph Henry das Phänomen der Selbstinduktion, wobei ein elektrischer Strom in einer Spule eine Spannung in der Spule selbst induzieren kann, wenn der Strom verändert wird. Auch hier wurde ein proportionales Verhalten festgestellt.

$$U_i \sim \frac{dI}{dt} \quad (3.40)$$

Diese Eigenschaft der Spule die durch das Speichern magnetischer Energie entsteht ist die Induktivität L , deren Einheit dem Physiker zu Ehren als Henry [H] benannt wurde.

$$U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (3.41)$$

Das Minus-Zeichen kommt daher, dass der induzierte Strom nach der Lenz'schen Regel seiner Ursache entgegenwirkt.

Analog zum Kondensator, kann auch das zeitabhängige Verhalten für die Spule folgendermaßen ausgedrückt werden:

Spannung über der Induktivität

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3.42)$$

Strom durch die Induktivität

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) dt \quad (3.43)$$

3.5.2 Die Spule als Bauelement

Mit dem Wissen über das magnetische Feld kann nun der Aufbau und die Funktionsweise der Spule erklärt werden. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Zylinderluftspule. Wird ein Leiter zu einer Leiterschleife geformt, bildet sich das Magnetfeld so aus, dass es durch die Schleifenöffnung hindurchgeht. Werden nun mehrere Leiterschleifen hintereinander gewickelt, wird das Magnetfeld um den Faktor der Windungszahl verstärkt. Diese Anordnung von gewickelten Leiterschleifen ergibt die in Abbildung 3.32 gezeigte Zylinderluftspule.

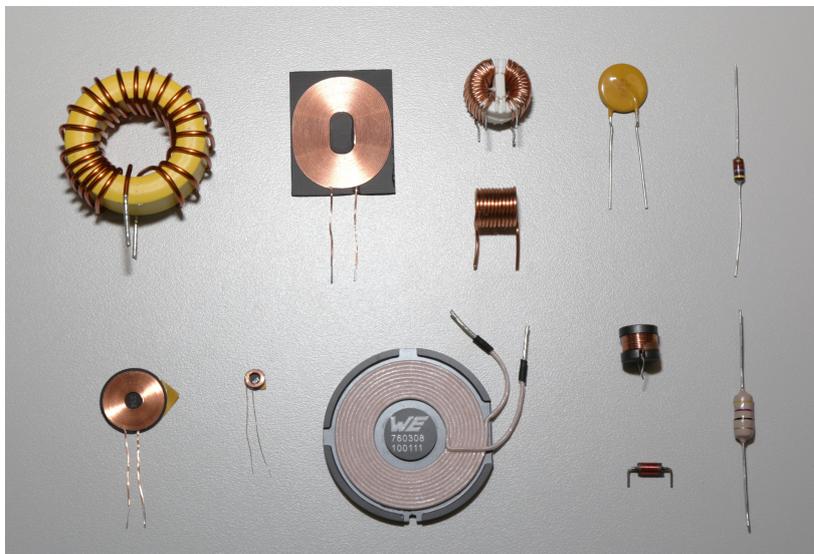


Abbildung 3.32: **Verschiedene Arten und Bauformen von Spulen.** Darunter Zylinderspulen, Ringkernspulen, Eisenkernspulen und Luftspulen. Eine größere Anzahl von Windungen erhöht die Konzentration des Magnetfelds und steigert die Induktivität der Spule. Ein Eisenkern kann zusätzlich verwendet werden, um die Magnetfeldlinien zu bündeln und die Effizienz zu verbessern.

Ihren Namen verdankt diese Spule ihrer zylindrischen Form in Längsrichtung und des Mediums Luft im inneren ihrer Wicklungen. Wenn nun ein Strom durch die Spule fließt, überlagern sich die Magnetfelder der einzelnen Wicklungen zu einem stärkeren Magnetfeld. Die Stärke hängt dabei von

der Windungszahl und der Stromstärke, sowie der Entfernung zum Leiter, ab. Je nach Orientierung des Stromes und der Wicklungen, entsteht bei einer Zylinderluftspule auf der einen Seite ein Nord- und auf der anderen Seite ein Südpol. Der Verlauf der Magnetfeldlinien in einer Zylinderluftspule entspricht der Abbildung 3.30.

Was alle Spulen verbindet, ist ihre Fähigkeit, die Eigenschaft der Induktivität nutzbar zu machen, wie es im folgenden Schaltbild 3.34 dargestellt ist. Dieses Schaltbild repräsentiert jedoch nur die idealisierte, nutzbare Induktivität.

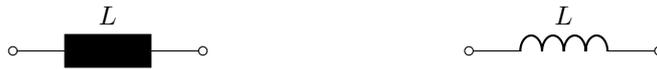


Abbildung 3.33: **Schaltungselement für Spule.** Europäisches (links) und amerikanisches (rechts).

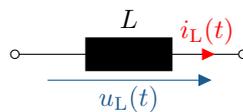


Abbildung 3.34: **Schaltzeichen einer idealen Spule.**

Für eine realitätsgetreue Nachbildung der Schaltung ist es wichtig die Spule als Bauteil vollständig zu beschreiben. Dies wird mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes gemacht, welches auch die ungewollten, also parasitären Eigenschaften des Bauteils, nachbildet. Abbildung 3.35 zeigt ein solches Ersatzschaltbild.

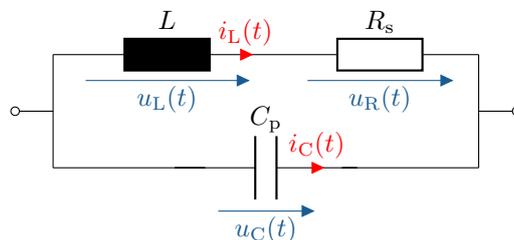


Abbildung 3.35: **Ersatzschaltbild einer realen Spule.** Die ideale Spule L wird durch einen Serienwiderstand R_s und einen parallel geschalteten Kondensator C_p ergänzt, um parasitäre Effekte zu berücksichtigen.

Im Ersatzschaltbild einer Spule werden nicht nur die nutzbare Induktivität, sondern auch die parasitären Eigenschaften berücksichtigt, die in realen Spulen auftreten. Diese parasitären Eigenschaften entstehen beispielsweise durch die Kapazitäten zwischen den Wicklungen und die ohmschen Verluste im Material. Das modellierte Ersatzschaltbild ermöglicht es, diese Effekte im Schaltungsentwurf zu berücksichtigen und das Schaltverhalten besser vorherzusagen.

Merke:

Die Spule ist der verzweifelte Versuch, eine Induktivität nachzubilden.

3.5.3 Die Permeabilität

Ähnlich wie im Fall des Kondensators und der Kapazität, unterscheidet sich auch die Stärke des Magnetfeldes abhängig vom Material. Was beim Kondensator das Dielektrikum und die Permittivität sind, wird bei der Spule als ferromagnetisches Material und Permeabilität bezeichnet. Ein Beispiel einer Spule mit einem ferromagnetischen Material ist die Ringkernspule 3.36.

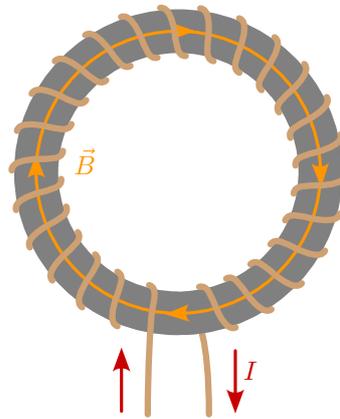


Abbildung 3.36: **Ringkernspule mit Eisenkern.** Der Eisenkern verstärkt das Magnetfeld und erhöht die Induktivität der Spule. Diese Bauweise minimiert Streufelder und verbessert die Effizienz, indem sie das Magnetfeld innerhalb des Kerns konzentriert.

Bei der Ringkernspule handelt es sich um einen mit Draht umwickelten Ferritring. Innerhalb des Materials findet eine Ausrichtung auf atomarer Ebene statt, was zu einer Verstärkung des Magnetfeldes führt. Die Stärke der magnetischen Flussdichte \vec{B} wird dabei neben den Dimensionen und der Stromstärke, von den Materialeigenschaften, insbesondere von der Permeabilität, bestimmt.

Die folgende Tabelle 3.3 zeigt die Permeabilitätszahl einiger gängiger Materialien:

Material	μ_r
Supraleiter 1. Art	0
Vakuum	1
Luft (bei STP)	1.00000037
Kupfer	0.999994
Gold	0.999964
Aluminium	1.000022
Eisen	300 – 10000
Ferrit	4 – 15000

Tabelle 3.3: **Relative Permeabilitätszahl verschiedener Materialien:** Diese dimensionslose Zahl gibt an, wie stark das magnetische Feld in einem Material im Vergleich zum Vakuum beeinflusst wird. Sie ist ein Maß für die Fähigkeit des Materials, magnetische Flüsse zu speichern oder zu leiten. Materialien mit einer höheren Permeabilitätszahl erhöhen die Induktivität von Spulen.

Zur vollständigen Beschreibung der Eigenschaften des ferromagnetischen Materials wird neben der Permeabilitätszahl noch die magnetische Feldkonstante μ_0 benötigt. Dabei handelt es sich um das Verhalten des magnetischen Feldes im Vakuum. Während die Permeabilitätszahl μ_r einheitslos ist, bringt die magnetische Feldkonstante die Einheit H/m mit. Sie wird mit der relativen Permeabilität des Materials multipliziert was zusammen die Permeabilitätskonstante μ ergibt.

$$[\mu] = 1 \frac{\text{Henry}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{H}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad (3.44)$$

μ : Permeabilitätskonstante

μ_0 : Magnetische Feldkonstante ($\approx 4\pi \cdot 10^{-7}$)

μ_r : Relative Permeabilitätszahl

Mit Hilfe der Permeabilität, des Stromes, der Windungszahl und der Länge der Spule, kann die magnetische Flussdichte \vec{B} mit der Einheit Tesla T berechnet werden.

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (3.45)$$

$$[B] = \frac{\text{H/m} \cdot \text{A} \cdot 1}{\text{m}} = \frac{\text{H} \cdot \text{A}}{\text{m}^2} = \frac{(\text{V} \cdot \text{s} / \cancel{\text{A}}) \cdot \cancel{\text{A}}}{\text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{T (Tesla)}$$

$$B = \frac{\mu \cdot I \cdot N}{l} \quad (3.46)$$

μ : Permeabilitätskonstante

I : Elektrische Stromstärke

N : Anzahl der Windungen

l : Länge des Magnetkreises

Die Induktivität selbst hängt ebenfalls von der Bauform und den verwendeten Materialien ab.

$$[L] = 1 \text{ Henry} = 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{l} \quad (3.47)$$

3.5.4 Die magnetische Feldstärke

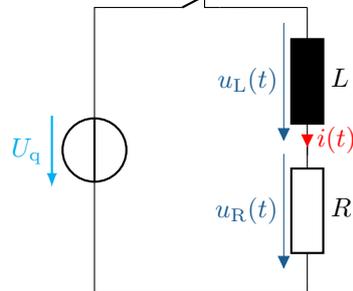
$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (3.48)$$

3.5.5 Schaltverhalten einer Spule

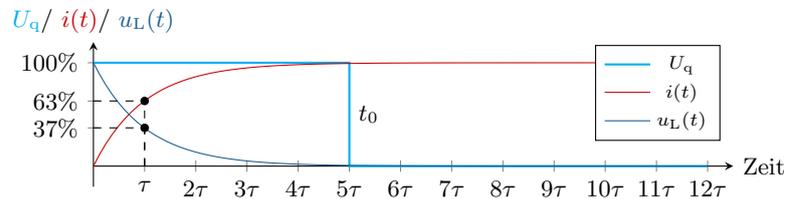
Zum besseren Verständnis der Funktion einer Spule wird nun ein zeitlich veränderliches Signal, hier der Einschalt- und Ausschaltvorgang, betrachtet. Das grundlegende Prinzip der Induktivität basiert darauf, dass ein zeitlich veränderlicher Strom ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt. Dieses

zeitlich veränderliche Magnetfeld induziert wiederum einen Induktionsstrom in die Spule selbst. Aufgrund der Lenz'schen Regel wirkt der Induktionsstrom jedoch entgegen seiner Ursache, was einen sprunghaften Anstieg des Stromes verhindert.

Schalter wird bei $t_0 = 5\tau$ geöffnet

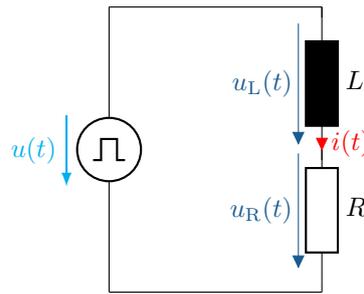


(a) Darstellung der Reihenschaltung bestehend aus einer Induktivität L , einem Widerstand R und einem Schalter.

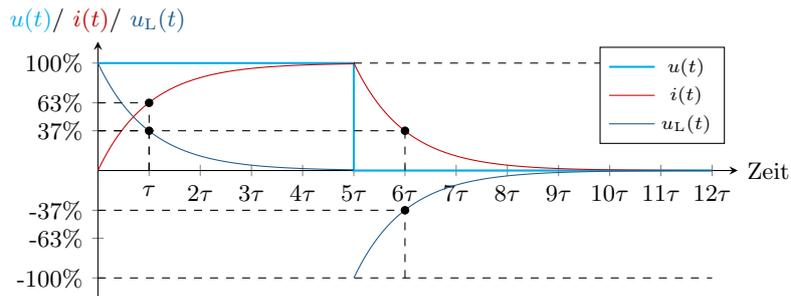


(b) Spannungs- und Stromverlauf über der Induktivität bei einer Gleichspannung die zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird und zum Zeitpunkt t_0 abgeschaltet wird.

Abbildung 3.37: **Der Spannungs- und Stromverlauf über der Induktivität.** Das Diagramm zeigt die Reaktion der Induktivität auf die plötzliche Änderung der Spannung und veranschaulicht das typische Ladeverhalten.



(a) Darstellung der Reihenschaltung bestehend aus einer Induktivität L und einem Widerstand R an einer rechteckförmigen Spannungsquelle.



(b) Spannungs- und Stromverlauf über der Induktivität bei einer rechteckförmigen Spannung.

Abbildung 3.38: **Spannungs- und Stromverlauf über der Induktivität.** Das Diagramm zeigt die Reaktion der Induktivität auf eine plötzliche Änderung der Spannung und veranschaulicht das typische Lade- und Entladeverhalten der Induktivität.

In der praktischen Anwendung ermöglicht die Induktivität die Konstruktion von Komponenten wie Transformatoren, Drosseln und Induktivitäten, die in einer Vielzahl von elektrischen und elektronischen Geräten zu finden sind. Von der Filterung von Signalen über die Energieübertragung bis hin zur Steuerung elektromagnetischer Interferenzen ist die Induktivität ein Schlüsselement in der modernen Elektrotechnik.

Beispiel 3.2: Berechnung der Induktivität

- Berechnung der Induktivität L
- Berechnung der magnetischen Flussdichte \vec{B}
- Gespeicherte Energie im Magnetfeld E_m ?

Modul 4

Grundlegende Gleichstromnetzwerke

4.1 Einleitung

Elektrische Netzwerke sind in der heutigen Welt omnipräsent. Sie bestehen aus Zusammenschaltungen von verschiedenen elektrischen Bauteilen, welche durch Verbindungsleitungen miteinander verknüpft sind. In der Realität kommen sie in den verschiedensten Funktionen und Größenordnungen vor. So kann ein elektrisches Netzwerk sowohl eine kleine elektronische Schaltung innerhalb eines Mikrocontrollers mit einer Größe von einigen Mikrometern darstellen, als auch ein elektrisches Energieverteilungsnetz mit Ausdehnungen von bis zu einigen 1000 Kilometern abbilden, wie sie symbolisch in den Abbildungen 4.1 bzw. 4.2 angedeutet sind.

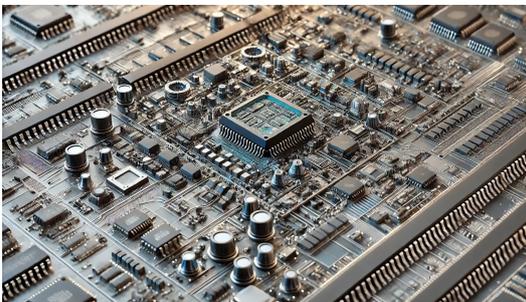


Abbildung 4.1: Symbolbild eines kleinen elektrischen Netzwerkes auf einer Platine



Abbildung 4.2: Symbolbild eines großen elektrischen Netzwerkes

Dieses Kapitel bietet eine Einführung zu grundlegenden Berechnungen in elektrischen Gleichstromnetzwerken. Ziel dieser Berechnung ist es in der Regel, die Spannungen und Ströme in allen Bauteilen des Netzwerkes zu berechnen. Reale Bauteile werden dazu in der Regel vereinfacht als Kombination idealer Zweipole dargestellt (Beispiele: Tabelle 4.1). Aus der Verschaltung dieser Zweipole lässt sich ein vereinfachtes Modell der realen Schaltung aufbauen, welches das grundlegende Verhalten der Schaltung nachbildet. Dieses Modell bildet die Grundlage zur mathematischen Berechnung der Schaltung.

Da in diesem Kapitel ausschließlich lineare Bauteile wie Widerstände oder ideale Gleichspannungsquellen verwendet werden, ist eine analytische Berechnung grundsätzlich immer möglich. In fortgeschrittenen Modulen werden hingegen nichtlineare Bauelemente wie reale Operationsverstärker oder Dioden eingeführt. In diesem Fall ist oft eine iterative bzw. numerische Herangehensweise notwendig.

4.2 Zweipole und Zählfeilsysteme

Lernziele: Zweipole und Zählfeilsysteme

Die Studierenden können

- den Begriff des Zweipols erläutern sowie gängige Zweipole nennen und deren Schaltsymbole verwenden
- das Erzeuger- sowie Verbraucherzählfeilsystem erläutern und entsprechend der Konventionen anwenden
- die zentralen Elemente des Grundstromkreises erläutern und die Zusammenhänge zwischen diesen erkennen

4.2.1 Zweipole

Als Zweipol (Abb. 4.3) wird ein Bauelement mit zwei äußeren Anschlussklemmen bezeichnet. Der innere Aufbau dieser Zweipole kann dabei von gänzlich unterschiedlicher Art und Komplexität sein. Beispielsweise ist ein einfacher elektrischer Widerstand, aber auch eine Spannungsquelle (beispielsweise eine Autobatterie) oder ein Haartrockner (sofern dieser nur zwei Anschlussleitungen besitzt) als Zweipol zu sehen. Bauteile mit mehr Anschlussleitungen werden entsprechend als Dreipol (z.B. Kühlschrank mit Schutzleiter), Vierpol (z.B. Transformator) oder gar Fünfpol (elektrischer Herd mit Drehstromanschluss, Schutzleiter und Neutraleiter) bezeichnet.

Unabhängig von der inneren Komplexität kann ein Zweipol im elektrischen Netzwerk vollständig durch die Beziehung von Strom und Spannung an seinen Anschlusspunkten, dem sogenannten **Klemmenverhalten**, charakterisiert werden. Zu beachten ist dabei, dass der in Abbildung 4.3 eingezeichnete Strom I_1 eines Zweipols stets genauso groß wie der Strom I_2 ist.

Die praktische Realisierung der Bauteile wie reale Baumaße, Materialeigenschaften, parasitäre Effekte oder interne inhomogene Feldstärkeverteilungen werden in der Netzwerkberechnung mit Zweipolen vernachlässigt.

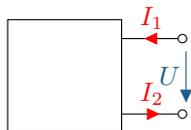


Abbildung 4.3: Allgemeine Darstellung eines Zweipols mit den gleich großen Stromstärken I_1 und I_2 sowie der anliegenden Spannung U

Einige der bereits aus vorherigen Kapiteln bekannte Zweipole sind in Tabelle 4.1 beispielhaft aufgeführt.

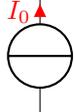
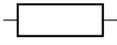
Zweipol	Schaltzeichen
ideale Spannungsquelle	
ideale Stromquelle	
Kondensator (Kapazität)	
ohmscher Widerstand	
Spule (Induktivität)	

Tabelle 4.1: Beispiele verschiedener Zweipole sowie ihrer Schaltzeichen

4.2.2 Zählfeilsysteme

Die Wahl der Zählrichtungen von Strom und Spannung ist grundsätzlich beliebig. Bei der Berechnung elektrischer Netzwerke wird häufig versucht, die Zählrichtungen so einzuführen, dass die Ströme und Spannungen positiv sind. Das ist für von vornherein bekannte Größen durchaus sinnvoll. Für unbekannte Größen muss die Zählrichtung hingegen willkürlich festgelegt werden. Es wird dadurch nicht ausgedrückt, dass der Strom tatsächlich in der Pfeilrichtung fließt bzw. eine positive Spannung in Pfeilrichtung anliegt. Die tatsächliche Richtung wird dann durch das Vorzeichen der Spannung ausgedrückt. Für eine vorzeichengerechte Beschreibung von Strömen und Spannungen ist also eine Bemaßung mit Zählpfeilen zwingend notwendig.

Bei Zweipolen wird zwischen den in Tabelle 4.2 vorgestellten zwei unterschiedlichen Zählfeilsystemen unterschieden:

Merke: Verbraucher- und Erzeugerzählfeilsysteme

Verbraucher-Zählfeilsystem (VPS): Strom und Spannung werden am Zweipol gleichsinnig gezählt. Anzuwenden bei passiven Zweipolen (z.B. Widerständen)

Erzeuger-Zählfeilsystem (EPS): Strom und Spannung werden am Zweipol entgegengesetzt gezählt. Anzuwenden bei aktiven Zweipolen (z.B. Spannungsquellen)

Merke: Zählpfeile

Zählpfeile dienen der Zählweise und sind nicht mit Vektoren zu verwechseln!

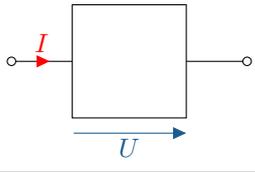
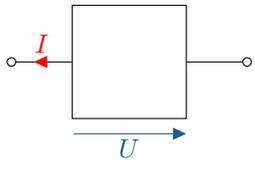
Zählfeilsystem	Erzeugte Leistung	Verbrauchte Leistung	Zählpfeile am Verbraucher
VPS	$P = -UI$	$P = UI > 0$	
EPS	$P = UI > 0$	$P = -UI$	

Tabelle 4.2: Vergleich zwischen Verbraucherzählfeilsystem (VPS) und Erzeugerzählfeilsystem (EPS).

4.2.3 Der Grundstromkreis

Die zuvor eingeführten Zweipole (oder auch Mehrpole) lassen sich zu einem elektrischen Netzwerk zusammenschließen.

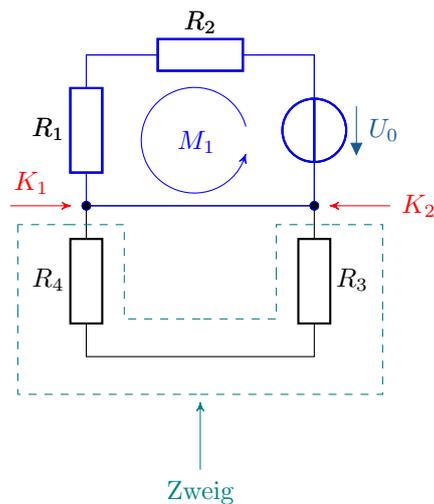


Abbildung 4.4: Der elektrische Grundstromkreis mit eingezeichneten Zweigen, Knoten und Maschen

Dabei bilden die idealisierten Zweipole **Zweige**, die wie in Abb. 4.4 auch aus mehreren direkt hintereinandergeschalteten Zweipolen bestehen können. Durch alle Elemente eines Zweiges fließt der gleiche Strom. Neben dem in Abbildung 4.4 grün markierten Zweig bilden auch die Zweipolgruppe R_1 , R_2 und U_0 sowie der Kurzschluss in der der Zeichnung jeweils einen weiteren Zweig.

Die Verbindungspunkte, an denen sich jeweils mindestens drei Zweige treffen, werden als **Knoten** oder Knotenpunkte bezeichnet. Ein fließender elektrischer Strom kann sich hier auf die verschiedenen Zweige aufteilen. Das elektrische Potential ist jedoch für alle verbundenen Anschlüsse identisch. Ein Knoten wird im Schaltplan durch einen ausgefüllten Kreis gekennzeichnet und mit K_n genannt. Geschlossene Pfade von mindestens zwei sich aneinanderreihenden Zweigen innerhalb eines Netzwerkes werden **Maschen** genannt und mit M_n abgekürzt. Im Schaltplan wird neben der Bezeichnung der Masche häufig auch eine Umlaufrichtung mit einem Pfeil angedeutet, der die Umlaufrichtung der

Masche angibt. Im hier gezeichneten Grundstromkreis lassen sich neben der eingezeichneten Masche M_1 bestehend aus R_1 , R_2 , U_0 und dem Kurzschluss zwischen den Knoten K_1 und K_2 zwei weitere Maschen finden: Der grün eingezeichnete Zweig zusammen mit dem Kurzschluss zwischen K_1 und K_2 bilden eine Masche M_2 . Eine weitere Masche M_3 außen herum führt außen um die Schaltung herum und enthält alle eingezeichneten Zweipole, nicht jedoch den Kurzschluss zwischen K_1 und K_2 .

4.3 Kirchhoffsche Sätze

Die im vorherigen Modul eingeführten Bauteilgleichungen, welche den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an den einzelnen Bauteilen aufzeigen, reichen nicht aus, um sämtliche Spannungen und Ströme innerhalb eines Netzwerks zu berechnen. Die Kirchhoffschen Regeln, auch Maschen- bzw. Knotenregel genannt, liefern die hierzu benötigten Gleichungen.

Lernziele: Kirchhoffsche Regeln

Die Studierenden können

- die Kernaussagen der Kirchhoffschen Regeln wiedergeben
- die Kirchhoffschen Regeln auf einfache Widerstandsnetzwerke anwenden

4.3.1 Knotenregel (1. Kirchhoffsche Regel)

Die Knotenregel sagt aus, dass die Summe aller in einen Knoten hereinfließenden Ströme identisch zu Summe aller herausfließenden Ströme ist:

Merke:

Summe der zufließenden Ströme = Summe der abfließenden Ströme

Mathematisch ausgedrückt resultiert dies in folgendem Zusammenhang:

$$\sum I_{\text{zu}} = \sum I_{\text{ab}} \quad (4.1)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Ströme entsprechend ihrer Zählpfeilrichtung gewertet werden. In den Knoten hereinfließende Ströme werden positiv, aus dem Knoten herausfließende Ströme werden negativ gezählt. Falls die tatsächliche Richtung eines Stromes im Vorfeld nicht bekannt ist, kann die Zählpfeilrichtung willkürlich festgelegt werden. Die tatsächliche Stromrichtung ergibt sich aus dem Zahlenwert als Rechenergebnis. Ist dieses für einen Strom negativ, sprich $I < 0$, fließt der reale Strom in die entgegengesetzte Richtung.

Alternativ lässt sich dieser Zusammenhang auch dadurch ausdrücken, dass die Summe aller Ströme in einem Knoten gleich 0 ist:

$$\sum_{i=1}^n = 0 \quad (4.2)$$

Auf den beispielhaften Knoten in Abbildung 4.5 angewendet ergeben sich folgende Gleichungen:

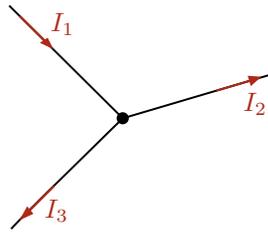


Abbildung 4.5: Einfacher Beispielknoten

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Der Knoten, auf den sich die Regel bezieht, muss jedoch nicht nur aus einem Punkt bestehen. Vielmehr ist möglich, sogenannte **Hüllknoten** zu definieren, die einen Bereich innerhalb einer Schaltung vollständig umschließen. Angewendet auf den in Abbildung 4.6 gezeigten Hüllknoten ergibt sich die Gleichung

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

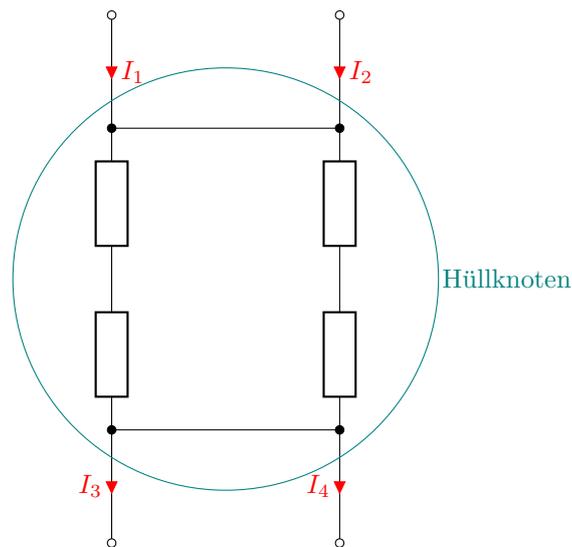


Abbildung 4.6: Hüllknoten einer elektrischen Schaltung

Die Knotenregel ist durch die Verallgemeinerung des Ladungserhaltungssatzes für quellenfreie Strömungsfelder nicht nur auf diskrete Bauelemente anwendbar. Vielmehr kann sie auf jede reale Struktur angewendet werden. In Abbildung 4.7 ist die in den Draht hereinfließende Stromstärke I folglich genauso hoch wie die gesamte Stromstärke, welche aus der Hüllfläche des Blechausschnitts heraustritt.

Allgemein lässt sich dieser Zusammenhang über das geschlossene Flächenintegral über die Hüllfläche \vec{A} beschreiben:

$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (4.3)$$

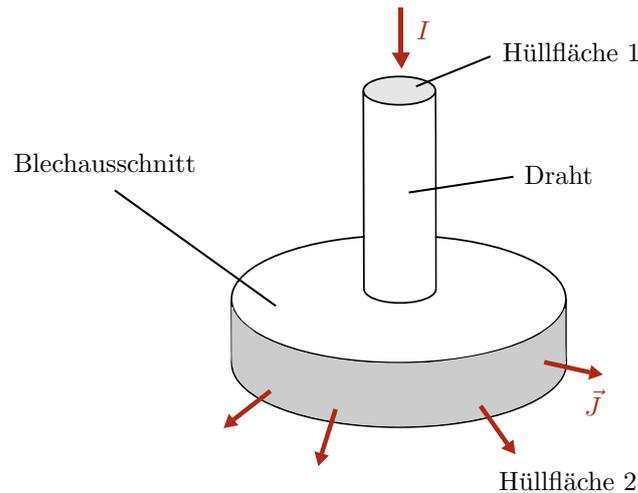


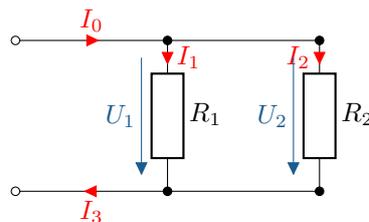
Abbildung 4.7: An einen Blechausschnitt angeschlossener Draht. Die Stromstärke I fließt in den Draht hinein, während eine Stromdichte \vec{J} aus dem Blechausschnitt herausfließt.

4.3.2 Anwendungsfall Knotenregel: Parallelschaltung von Widerständen

Ein grundlegender Anwendungsfall für die Knotenregel ist die Parallelschaltung von Widerständen. Dabei teilt sich der Strom in einem gemeinsamen Knoten und jeweils ein Teilstrom durchfließt die einzelnen Widerstände. Nach dem Passieren der jeweiligen Widerstände vereinigen sich die Teilströme wieder, und fließen als Gesamtstrom weiter. Dargestellt ist dies in Beispiel 4.1.

Beispiel 4.1: Parallelschaltung von Widerständen

Bei der Parallelschaltung teilen sich die Ströme an den gemeinsamen Knoten auf. Wie groß ist die Stromstärke I_3 im Verhältnis zu den Stromstärken I_0 bzw. I_1 und I_2 ?



$$I_0 - I_1 - I_2 = 0$$

$$\rightarrow I_0 = I_1 + I_2$$

$$-I_3 + I_1 + I_2 = 0$$

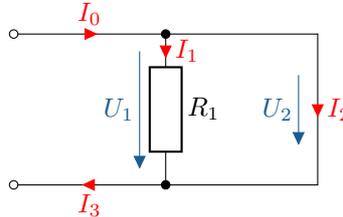
$$\rightarrow I_1 + I_2 = I_3$$

$$\rightarrow I_3 = I_0$$

Wird einer der Widerstände durch eine ideal leitende Verbindung ersetzt (Leitwert geht gegen unendlich, Widerstand folglich gegen 0), verändert sich der Stromfluss im Bereich zwischen den beiden Knoten (Beispiel 4.2).

Beispiel 4.2: Parallelschaltung mit Leiter

Ein Widerstand wird durch eine leitende Verbindung ersetzt. Wie groß sind die Stromstärken I_1 bzw. I_2 ?



$$\begin{aligned}
 I_0 &= I_1 + I_2 \\
 \text{mit } U_1 &= R_1 \cdot I_1 \\
 U_2 &= R_2 \cdot I_2 = 0 \stackrel{!}{=} U_1 \\
 &\rightarrow I_1 = 0 \\
 &\rightarrow I_0 = I_2 = I_3
 \end{aligned}$$

4.3.3 Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)

Der 2. Kirchhoffsche Satz (Maschenregel) besagt, dass die **Summe aller Spannungen** in einer Masche **Null** ergibt. Analog zur Richtung der Ströme muss auch hier zwingend die Richtung der einzelnen Teilspannungen berücksichtigt werden. Zeigt der Richtungspfeil einer Teilspannung entgegen der Umlaufrichtung der Masche, so muss diese Teilspannung mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Ist die Richtung einer anliegenden Spannung nicht bekannt, so kann auch hier eine willkürliche Zählpfeilrichtung angenommen werden. Eine gegensätzlich anliegende Spannung äußert sich in Rechnungen auch hier mit einem negativen Vorzeichen.

Merke: Maschenregel

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad (4.4)$$

Gleichbedeutend mit der obigen Definition lässt sich feststellen, dass die Summe aller gleichsinnig geschalteten Spannungen an Spannungsquellen der Spannung entspricht, welche an den Verbrauchern abfällt.

Merke: Maschenregel 2

Spannungssumme an Spannungsquellen = Spannungssumme an Verbrauchern

Angewendet auf das in Abbildung 4.8 gezeigte Beispielnetzwerk ergeben sich folgende Maschengleichungen:

$$U_1 + U_2 - U_3 - U_4 = 0$$

beziehungsweise

$$U_1 + U_2 = U_3 + U_4$$

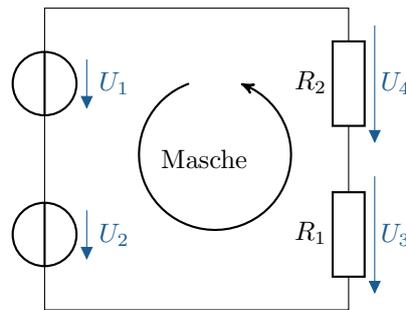


Abbildung 4.8: Beispielnetzwerk bestehend aus zwei Spannungsquellen und zwei Widerständen

Die Maschengleichung gilt auch, falls in die Masche zusätzliche Ströme eingespeist werden, oder einzelne Zweipole während des Umlaufs um eine geschlossene Masche mehrfach durchlaufen werden.

Der allgemeine Zusammenhang, jegliche aufintegrierte Spannung entlang einer geschlossenen Kontur 0 ergibt, kann nach den Maxwell Gleichungen folgendermaßen beschrieben werden:

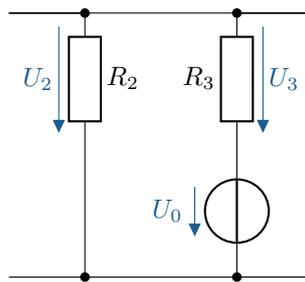
$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (4.5)$$

4.3.4 Anwendungsfall Maschenregel: Reihenschaltung von Widerständen

Während die Knotenpunkte in elektrischen Netzwerken vor allem für den Strom von Bedeutung sind, sind die Zweige und somit auch Maschen vor allem für die Berechnung der Spannungen von Interesse. Bei einer Reihenschaltung von Widerständen in einem Zweig addieren sich alle Teilspannungen vorzeichenrichtig zu einer Gesamtspannung auf. Ein Anwendungsfall zur Ermittlung einer Teilspannung ist in Beispiel 4.3 dargestellt.

Beispiel 4.3: Reihenschaltungen in Netzwerken

Bei der Reihenschaltung addieren sich die Spannungen zu einer Gesamtspannung auf. Wie groß ist die Spannung U_0 ?



Masche entgegen dem Uhrzeigersinn aufstellen:

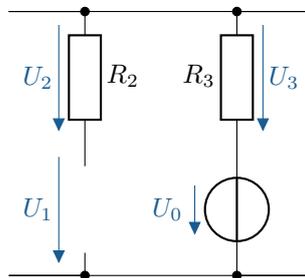
$$U_2 - U_0 - U_3 = 0$$

$$\rightarrow U_0 = U_2 - U_3$$

Die Maschenregel lässt sich auch anwenden, wenn die Masche, auf die sie angewendet wird, eine Unterbrechungsstelle hat (siehe Beispiel 4.4).

Beispiel 4.4: Reihenschaltungen mit Unterbrechungsstelle

Eine Verbindung wird unterbrochen. Wie groß ist die Spannung U_1 an der Unterbrechungsstelle?



Masche entgegen dem Uhrzeigersinn aufstellen:

$$U_2 + U_1 - U_0 - U_3 = 0$$

Ermitteln der Spannung U_2 mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes:

$$U_2 = I_2 \cdot R_2$$

$$\rightarrow I_2 = 0$$

$$\rightarrow U_2 = 0$$

Einsetzen in Ausgangsgleichung und nach U_1 auflösen:

$$U_1 = U_0 + U_3$$

4.4 Einfache Widerstandsnetzwerke

Elektrische Netzwerke setzen sich häufig aus einfacheren Teilschaltungen zusammen. Oft ist es hilfreich, diese Teilschaltungen zu identifizieren, zu vereinfachen und anschließend zur Gesamtschaltung zusammenzufassen. Solche Zusammenfassungen von Bauelementen sind grundsätzlich zulässig, sofern sich das **Klemmverhalten**, also das Verhalten zwischen Strom und Spannung zwischen den Anschlusspunkten, nicht ändert.

Lernziele: Einfache Widerstandsnetzwerke

Die Studierenden können

- Teilschaltungen in gleichstromnetzwerken identifizieren
- Widerstandsnetzwerke vereinfachen und zusammenfassen
- Kurzschluss- sowie Leerlaufdaten bestimmen
- Überlagerungsverfahren anwenden

4.4.1 Reihenschaltung von Widerständen

In einer Reihenschaltung werden alle Bauelemente vom gleichen Strom I durchflossen (siehe Abbildung 4.9).

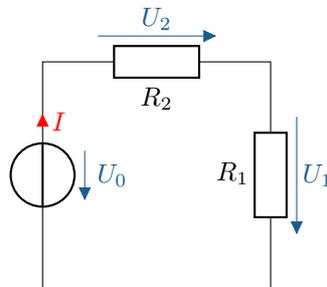


Abbildung 4.9: Reihenschaltung von zwei Widerständen und einer Spannungsquelle

Das Anwenden der Maschenregel (hier: Umlaufrichtung gegen den Uhrzeigersinn) führt zu folgender Maschengleichung:

$$U_0 - U_1 - U_2 = 0$$

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes können die Teilspannungen U_1 und U_2 als Produkt aus Stromstärke und Widerstand dargestellt werden:

$$U_0 - R_1 \cdot I - R_2 \cdot I = 0$$

$$U_0 - (R_1 + R_2) \cdot I = 0$$

Die Widerstände R_1 und R_2 lassen sich in diesem Beispiel durch Addition ihrer Widerstandswerte zu $R_1 + R_2 = R_{\text{ges}}$ zusammenfassen (Abbildung 4.10).

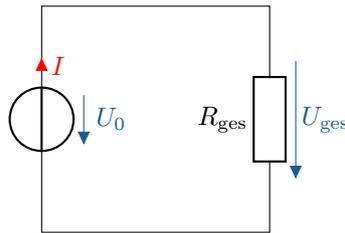


Abbildung 4.10: Zusammenfassen von R_1 und R_2 zu R_{ges}

Allgemein lässt sich die Gesamtspannung U_{ges} nach diesem Prinzip folgendermaßen zusammenfassen:

$$U_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n R_k \cdot I = R_{\text{ges}} \cdot I \quad (4.6)$$

Ein Koeffizientenvergleich der letzten beiden Terme von Gleichung 4.6 liefert das allgemeingültige Ergebnis, um Widerstände in einer Reihenschaltung zusammenzufassen:

Merke: Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung

$$R_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n R_k \quad (4.7)$$

Betrachtet man statt der Widerstandswerte R die Leitwerte $G = 1/R$ der Widerstände, ergibt sich für den Gesamtleitwert einer Reihenschaltung:

Merke: Gesamtleitwert einer Reihenschaltung

$$\frac{1}{G_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k} \quad (4.8)$$

4.4.2 Parallelschaltung von Widerständen

In einer Parallelschaltung von Widerständen liegt an allen Bauelementen die selbe Spannung an (siehe Abbildung 4.11):

$$U_1 = U_2 = U_0$$

Durch das Anwenden der Knotenregel lässt sich zeigen, dass sich der Gesamtstrom I_0 vor den Widerständen in die Teilströme I_1 und I_2 aufteilt:

$$I_0 - I_1 - I_2 = 0 \quad (4.9)$$

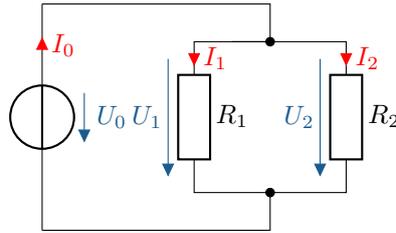
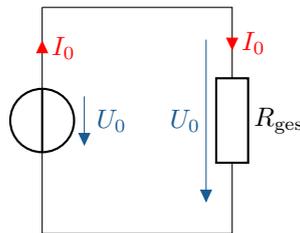


Abbildung 4.11: Parallelschaltung von zwei Widerständen und einer Spannungsquelle

Wie bei der Reihenschaltung im Kapitel 4.1 ist es auch bei der Parallelschaltung von Widerständen häufig von Vorteil, diese zu einem Gesamtwiderstand R_{ges} zusammenzufassen (siehe Abbildung 4.12):

Abbildung 4.12: Zusammenfassung der parallel geschalteten Widerstände R_1 und R_2 aus Abbildung 4.11 zu R_{ges}

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes können die unbekanntenen Teilströme I_1 und I_2 aus der Knotenregel (Gleichung 4.9) quantifiziert werden:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_0}{R_2}$$

Eingesetzt in Gleichung 4.9 ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_0 - \frac{U_0}{R_1} - \frac{U_0}{R_2} &= 0 \\ I_0 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot U_0 &= 0 \\ \rightarrow I_0 &= U_0 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit dem auf Abbildung 4.12 angewandten Ohmschen Gesetz ($I_0 = U_0 \cdot \frac{1}{R_{\text{ges}}}$)

liefert für R_{ges} im gezeigten Fall von zwei parallel geschalteten Widerständen:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Das Ausmultiplizieren dieses Ausdrucks ergibt die in Rechnungen häufig genutzte Form:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.10)$$

Der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung aus beliebig vielen Widerständen lässt sich mit Hilfe der allgemeinen Formel für Parallelschaltungen ermitteln:

Merke: Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (4.11)$$

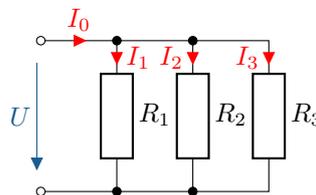
Da der elektrische Leitwert durch den Kehrwert des Widerstandes $G = 1/R$ beschrieben wird, ist der Gesamtleitwert einer Parallelschaltung von Widerständen oft leichter zu berechnen:

Merke: Gesamtleitwert einer Parallelschaltung

$$G_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n G_k \quad (4.12)$$

Beispiel 4.5: Parallelschaltung von Widerständen

Die drei Widerstände $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 100 \text{ k}\Omega$ werden wie in folgender Abbildung gezeigt parallel geschaltet. Wie groß ist der Gesamtwiderstand R_{ges} dieser Parallelschaltung?



Aufstellen der Gleichung für R_{ges} nach Gleichung 4.11:

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_n \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte und Lösung mittels Taschenrechner:

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{1 \cdot 10^3 \Omega} + \frac{1}{10 \cdot 10^3 \Omega} + \frac{1}{100 \cdot 10^3 \Omega}}$$

$$\rightarrow R_{\text{ges}} = 900,9 \Omega$$

4.4.3 Spannungsteiler an Widerständen

Ein Anwendungsfall der Reihenschaltung von zwei Widerständen ist der Spannungsteiler. Er wird genutzt, um eine Eingangsspannung U_0 in zwei kleinere Teilspannungen aufzuteilen, und so eine

genau definierte Ausgangsspannung U_2 bereitzustellen.

4.4.3.1 Der unbelastete Spannungsteiler

Zunächst sei der in Abbildung 4.13 dargestellte Spannungsteiler unbelastet, d.h. es ist kein Lastwiderstand an den offenen Klemmen angeschlossen. Alle Bauelemente werden vom gleichen Strom I durchflossen:

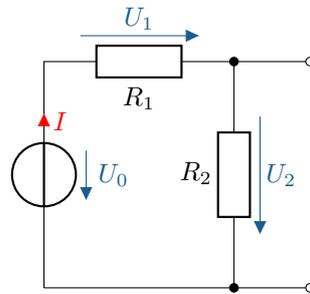


Abbildung 4.13: Unbelasteter Spannungsteiler

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

Durch Zusammenfassen der Reihenschaltung aus Widerständen ergibt sich:

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Spannungsterme ergibt sich die Verhältnisgleichung:

$$\frac{U_2}{R_2} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

Isolieren der Ausgangsspannung auf der linken Seite des Gleichheitszeichens führt letztendlich zur allgemeine Gleichung für den unbelasteten Spannungsteiler:

Merke: Unbelasteter Spannungsteiler

$$U_2 = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.13)$$

Beispiel 4.6: Unbelasteter Spannungsteiler

Eine Eingangsspannung von $U_0 = 24 \text{ V}$ soll mit einem Spannungsteiler auf $U_2 = 6 \text{ V}$ reduziert werden. Wie ist das Verhältnis der Widerstände von R_2 zu R_1 zu wählen? Wie groß sind die Widerstände R_1 und R_2 zu wählen, wenn der Gesamtstrom $I = 10 \text{ mA}$ betragen soll?

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{6 \text{ V}}{24 \text{ V}} = 0,25 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\rightarrow R_2 = 0.25(R_1 + R_2)$$

$$0.75 R_2 = 0.25 R_1$$

$$R_1 = 3 R_2$$

Der Widerstand R_1 muss also drei mal so groß wie der Widerstand R_2 gewählt werden.

$$I = \frac{U_2}{R_2} \rightarrow R_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{5 \text{ V}}{0.01 \text{ A}} = 500 \Omega$$

$$R_1 = 3 \cdot R_2 = 3 \cdot 500 \Omega = 1500 \Omega$$

4.4.3.2 Der belastete Spannungsteiler

Wird die Ausgangsseite des Spannungsteilers wie in Abbildung 4.14 belastet, also beispielsweise ein Lastwiderstand R_L hinzugefügt, so ergibt sich - von der Spannungsquelle aus gesehen - eine Parallelschaltung der Widerstände R_2 und R_L .

Wird der Ersatzwiderstand R_{neu} dieser Parallelschaltung über $\frac{1}{R_{\text{neu}}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L}$ ermittelt, ändert sich das Verhältnis der Widerstände des Spannungsteilers, und folglich auch die Ausgangsspannung. Diese Änderung muss bei der Auslegung eines belasteten Spannungsteilers mit beachtet werden.

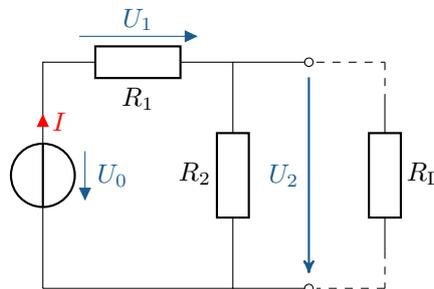


Abbildung 4.14: Mit dem Widerstand R_L belasteter Spannungsteiler

Beispiel 4.7: Belasteter Spannungsteiler

Ein Spannungsteiler soll eine Eingangsspannung von $U_0 = 20 \text{ V}$ auf die Ausgangsspannung von $U_2 = 5 \text{ V}$ reduzieren. Der Spannungsteiler wird mit $R_L = 200 \Omega$ belastet. Vorgegeben ist der Widerstand $R_1 = 300 \Omega$.

Wie groß muss R_2 dimensioniert werden, um die gewünschte Ausgangsspannung zu erreichen?

Zunächst muss der benötigte Gesamtwert R_{neu} der Parallelschaltung aus R_L und R_2 berechnet werden:

$$U_2 = U_0 \cdot \frac{R_{\text{neu}}}{R_1 + R_{\text{neu}}}$$

$$R_{\text{neu}} = \frac{5 \text{ V}}{20 \text{ V}} \cdot (R_1 + R_{\text{neu}})$$

$$0.75 \cdot R_{\text{neu}} = 0.25 \cdot R_1 = 75 \Omega$$

$$\rightarrow R_{\text{neu}} = 100 \Omega$$

Der Widerstand R_1 ist mit Hilfe der Formel für Parallelschaltungen zu berechnen:

$$100 \Omega = \frac{R_L \cdot R_2}{R_L + R_2} = \frac{200 \Omega \cdot R_2}{200 \Omega + R_2}$$

$$R_2 \cdot \frac{200 \Omega}{100 \Omega} = 2 \cdot R_2 = 200 \Omega + R_2 \quad (4.14)$$

$$\rightarrow R_2 = 200 \Omega$$

4.4.4 Stromteiler in Widerstandsnetzwerken

Eine wie in Abbildung 4.15 dargestellte Parallelschaltung von zwei Widerständen teilt einen in eine Schaltung fließenden Strom I_0 in zwei Teilströme I_1 sowie I_2 . Eine solche Schaltung wird als Stromteiler bezeichnet.

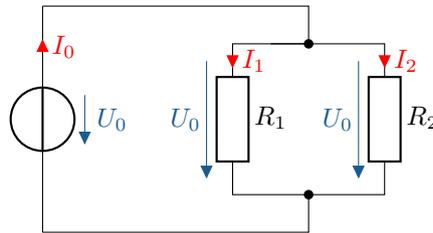


Abbildung 4.15: Stromteiler der Stromstärke I_0 in die Teilstromstärken I_1 und I_2 , bestehend aus den parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2

An allen Bauelementen dieser Schaltung liegt die identische Ausgangsspannung U_0 an. Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes lässt sich diese Spannung über den Widerständen R_1 und R_2 auch als Produkt von Widerstandswert und der Stromstärke umschreiben:

$$U_0 = I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

Durch das wie in Abbildung 4.12 beschriebene Zusammenfassen der Widerstände R_1 und R_2 zu R_{ges} lässt sich der Gesamtstrom I_0 in Abhängigkeit der Ausgangsspannung U_0 ermitteln:

$$U_0 = I_0 \cdot R_{\text{ges}}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Stromterme ergibt sich folgendes Verhältnis zwischen I_0 und I_2

$$I_2 \cdot R_2 = I_0 \cdot R_{\text{ges}}$$

Die Parallelschaltung R_{ges} lässt sich wie in Gleichung 4.10 gezeigt direkt aus den beiden Widerstandswerten R_1 und R_2 errechnen:

$$I_2 \cdot R_2 = I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Das Kürzen von R_2 resultiert im Teilungsverhältnis der elektrischen Stromstärke am Stromteiler:

Merke: Stromteiler einer Parallelschaltung

$$I_2 = I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (4.15)$$

4.4.5 Besondere Betriebszustände aktiver Zweipole

Aktive Zweipole lassen sich zu **Ersatzspannungsquellen** beziehungsweise **Ersatzstromquellen** zusammenfassen. Dies kann vor allem zur Vereinfachung von elektrischen Netzwerken dienlich sein.

4.4.5.1 Kurzschluss- und Leerlaufversuch an der Ersatzspannungsquelle

Die reale Spannungsquelle

Eine **reale Spannungsquelle** besteht wie bereits aus Modul 3 *Elektrische Bauelemente* bekannt aus einer idealen Spannungsquelle U_0 sowie einem Innenwiderstand R_i .

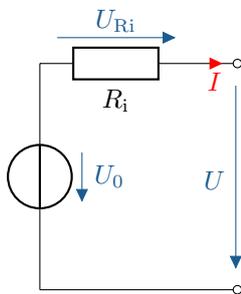


Abbildung 4.16: Aus einer idealen Spannungsquelle U_0 und einem Innenwiderstand R_i bestehende reale Spannungsquelle

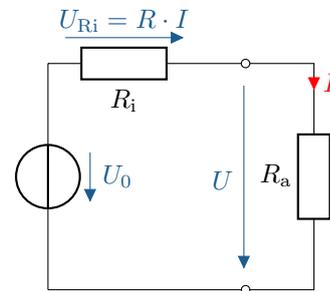


Abbildung 4.17: Mit einem Lastwiderstand R_a belastete reale Spannungsquelle

Ist die reale Spannungsquelle unbelastet, also kein Bauteil an den Ausgangsklemmen angeschlossen, fließt kein Strom I (siehe Abbildung 4.16).

$$I = 0$$

$$\rightarrow U_{R_i} = R_i \cdot I = 0$$

Da die Spannung über dem Innenwiderstand R_i 0 Volt beträgt, gilt für die Klemmspannung U :

$$U = U_0$$

Wird die reale Spannungsquelle wie in Abbildung 4.17 gezeigt mit einem Widerstand R_a belastet, fließt ein Strom $I > 0$ durch die Leitung.

Folglich fällt an dem Innenwiderstand R_i eine Spannung $U_{R_i} = R_i \cdot I$ ab, und die Klemmspannung beträgt

$$U = U_0 - U_{R_i}$$

Um den Spannungsabfall innerhalb der Spannungsquelle zu reduzieren, sollte der Innenwiderstand R_i möglichst klein gehalten werden:

$$U_0 \ll I \cdot R_i$$

Die Ersatzspannungsquelle

Jeder aktive Zweipol mit mindestens einer Quelle und beliebig vielen Widerständen kann zu einer Ersatzspannungsquelle (Abbildung 4.18) zusammengefasst werden. Wie bei einer realen Spannungsquelle genügt die Bestimmung einer idealen Spannungsquelle U_0 sowie eines zusammengefassten Innenwiderstandes R_i , um die Ersatzspannungsquelle vollständig zu charakterisieren. Sie verfügt nach außen hin über ein vollständig gleichwertiges Klemmverhalten wie die originale Schaltung an ihren zwei Anschlussklemmen.

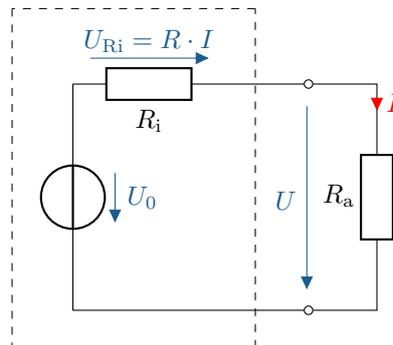


Abbildung 4.18: Die Ersatzspannungsquelle (gestrichelter Kasten) verfügt über das gleiche Ersatzschaltbild wie eine reale Spannungsquelle

Wie bei einer belasteten realen Spannungsquelle ist die resultierende Ausgangsspannung U sowohl vom Innenwiderstand R_i als auch vom Belastungsstrom I abhängig (Abbildung 4.19):

$$U = U_0 - I \cdot R_i$$

Die zur Charakterisierung notwendigen Parameter U_0 und R_i können mit Hilfe von zwei Versuchen ermittelt werden: dem Kurzschlussversuch sowie dem Leerlaufversuch.

Beim Leerlaufversuch werden die beiden Klemmen der Ersatzspannungsquelle offen gelassen (Abbildung 4.20).

Da durch die offenen Klemmen der Strom I durch den Widerstand R_i null Ampere beträgt, fällt auch keine Spannung über ihn ab. Die Leerlaufspannung ist also mit der Spannung U_0 identisch:

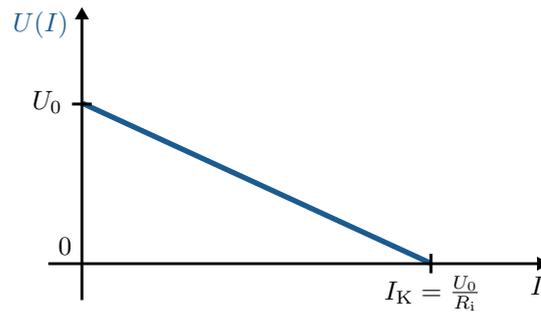


Abbildung 4.19: Die an den Klemmen der Ersatzspannungsquelle anliegende Spannung U in Abhängigkeit von der resultierenden Stromstärke I

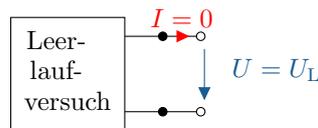


Abbildung 4.20: Ermittlung der Leerlaufspannung U_L einer Ersatzspannungsquelle

Merke: Leerlaufspannung einer Ersatzspannungsquelle

$$U_0 = U_L$$

Beim Kurzschlussversuch werden die beiden Klemmen des aktiven Zweipols direkt kurzgeschlossen, sprich eine ideal leitende Verbindung zwischen ihnen hergestellt (Abbildung 4.21).

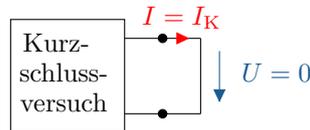


Abbildung 4.21: Ermittlung des Kurzschlussstromes I_K einer Ersatzspannungsquelle

Über dem so erzeugten Kurzschluss kann keine Ausgangsspannung U anliegen:

$$U = 0$$

Folglich fällt die gesamte von U_0 generierte Spannung am Innenwiderstand R_i ab. Dem Ohmschen Gesetz folgend bestimmt dieser damit den Kurzschlussstrom I_K .

$$U_{R_i} = U_L = R_{R_i} \cdot I_K$$

Der Kurzschlussstrom I_K beträgt folglich:

$$I_K = \frac{U_L}{R_i}$$

Somit kann der Innenwiderstand R_i folgendermaßen berechnet werden:

Merke: Innenwiderstand einer Ersatzspannungsquelle

$$R_i = \frac{U_L}{I_K}$$

Achtung: U_L und I_K sind in zwei vollkommen unabhängigen Versuchen bestimmte Größen, die nicht gleichzeitig auftreten. Die Formel sieht also nur wie Ohmsches Gesetz am Widerstand R_i aus, ist es aber nicht.

4.4.5.2 Kurzschluss- und Leerlaufversuch an der Ersatzstromquelle

Die reale Stromquelle

Auch eine **reale Stromquelle** besteht aus einer idealen Stromquelle I_0 sowie einem Innenwiderstand R_i (siehe Abbildung 4.22). Dieser ist im Gegensatz zur realen Spannungsquelle jedoch parallel anstatt in Reihe zur Quelle geschaltet.

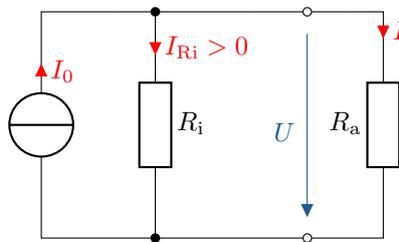


Abbildung 4.22: Aus einer idealen Stromquelle I_0 und einem Innenwiderstand R_i bestehende reale Stromquelle, welche mit einem Widerstand R_a belastet ist

Abhängig von der sich einstellenden Ausgangsspannung U fließt durch den endlichen Innenwiderstand R_i der Strom $I_{R_i} = U/R_{R_i}$, der Ausgangsstrom I ergibt sich also zu

Merke: Ausgangsstrom einer realen Stromquelle

$$I = I_0 - \frac{U}{R_i}$$

Um die Reduktion den Ausgangstroms I durch den Innenwiderstand zu reduzieren, sollte dieser möglichst groß gewählt werden:

$$I_0 \gg \frac{U}{R_i}$$

Die Ersatzstromquelle

Alternativ zur Ersatzspannungsquelle kann ein aktiver Zweipol auch als Ersatzstromquelle dargestellt werden (Abbildung 4.23). Auch sie kann durch eine ideale Stromquelle I_0 sowie einen zusammengefassten Innenwiderstand R_i vollständig charakterisiert werden.

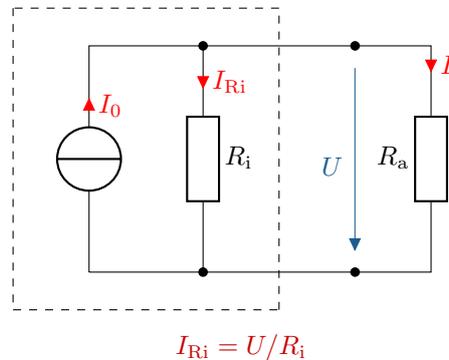


Abbildung 4.23: Die Ersatzstromquelle (gestrichelter Kasten) verfügt über das gleiche Ersatzschaltbild wie eine reale Stromquelle

Analog zur Ersatzspannungsquelle können auch hier die Parameter I_0 sowie R_i mit Hilfe des Leerlauf- und Kurzschlussversuchs bestimmt werden.

Beim **Leerlaufversuch** fließt der gesamte Strom I_0 durch den Innenwiderstand. An den dazu parallel anliegenden Klemmen stellt sich die folgende Leerlaufspannung U_L ein:

$$U_L = R_i \cdot I_0$$

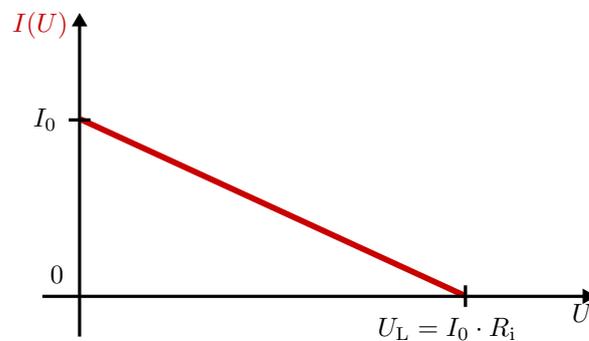


Abbildung 4.24: Die aus der Ersatzstromquelle herausfließende Stromstärke I in Abhängigkeit der sich einstellenden Spannung U

Beim **Kurzschlussversuch** werden die beiden Klemmen der Ersatzstromquelle kurzgeschlossen. Da die Spannung über dem Kurzschluss und somit auch über dem dazu parallelgeschalteten Innenwiderstand null Volt beträgt, fließt durch R_i kein Strom.

Der gesamte Strom I_0 fließt also durch den Kurzschluss:

Merke: Kurzschlussstrom einer Ersatzstromquelle

$$I_0 = I_K$$

Mit $U_L = R_i \cdot I_0$ kann nun der Innenwiderstand bestimmt werden:

Merke: Innenwiderstand einer Ersatzstromquelle

$$R_i = \frac{U_L}{I_K}$$

4.4.5.3 Umwandlung von Spannungs- und Stromquellen

Bei der Netzwerkanalyse kann es sinnvoll sein, Stromquellen in Spannungsquellen oder Spannungsquellen in Stromquellen umzuwandeln. Dies funktioniert sowohl für reale Strom- bzw. Spannungsquellen, als auch für Ersatzstrom- bzw. Ersatzspannungsquellen identisch. Dabei bleibt der Wert des Innenwiderstandes R_i identisch, seine Position im Ersatzschaltbild ändert sich jedoch (siehe Abbildung 4.25)

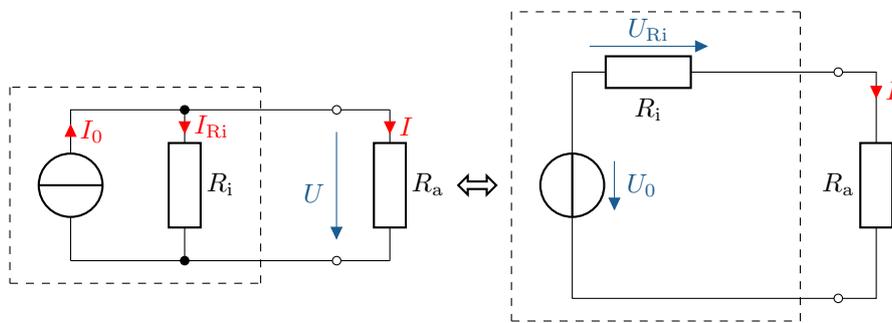


Abbildung 4.25: Umwandlung einer Ersatzstromquelle (links) in eine Ersatzspannungsquelle (rechts) und umgekehrt

Die Leerlaufspannung beziehungsweise der Kurzschlussstrom bleiben bei der Umwandlung der Quelle erhalten und werden auf die jeweils andere Quelle umgerechnet.

Achtung: Die Zählpfeile von ineinander umgewandelten Strom- und Spannungsquellen sind entgegengesetzt gerichtet!

Beim Umwandeln einer Stromquelle in eine Spannungsquelle beträgt die Spannung U_0 :

Merke: Spannung einer umgewandelten Spannungsquelle

$$U_0 = I_0 \cdot R_i$$

Die Stromstärke I_0 beträgt beim Umwandeln einer Spannungsquelle in eine Stromquelle:



Merke: Strom einer umgewandelten Stromquelle

$$I_0 = \frac{U_0}{R_i}$$

4.5 Einfache Kondensatornetzwerke

Wie Widerstände lassen sich auch Kapazitäten zu Netzwerken zusammenschließen. Die einfachen Grundschaltungen, welche wiederum zu beliebig komplexen Netzwerken zusammengesaltet werden können, werden nachfolgend vorgestellt.

4.5.1 Parallelschaltung von Kapazitäten

Sind in einer Schaltung mehrere Kapazitäten parallel zueinander geschaltet, lassen sie sich zu einer Gesamtkapazität zusammenfassen (siehe Abbildung 4.26).

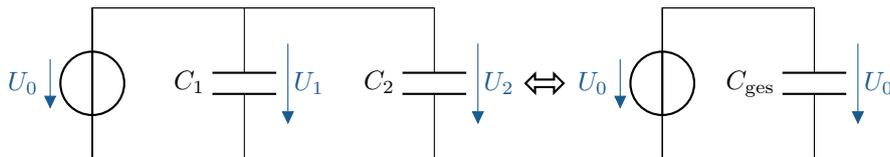


Abbildung 4.26: Zusammenfassen von zwei parallel geschalteten Kapazitäten C_1 und C_2 zu einer Gesamtkapazität C_{ges}

Dabei liegt an allen Einzelkapazitäten die gleiche Spannung an:

$$U_0 = U_1 = U_2$$

Die Ladung, welche auf jedem der Einzelkondensatoren gespeichert ist, kann wie folgt bestimmt werden:

$$Q_k = C_k \cdot U_0$$

Die Gesamtladung Q_{ges} auf dem in Abbildung 4.26 Ersatzschaltbild entsprechend mit

$$Q_{\text{ges}} = C_{\text{ges}} \cdot U_0$$

Die Gesamtladung setzt sich aus der Summe der Einzelladungen zusammen:

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U_0 + C_2 \cdot U_0$$

$$Q_{\text{ges}} = (C_1 + C_2) \cdot U_0$$

Ein Quotientenvergleich mit der ursprünglichen Berechnung der Gesamtladung Q_{ges} zeigt nun:

$$\rightarrow C_1 + C_2 = C_{\text{ges}}$$

Auch für beliebig viele parallelgeschaltete Kapazitäten gilt, dass die Summe der Einzelkapazitäten die Gesamtkapazität ergibt:

Merke: Gesamtkapazität einer Parallelschaltung

$$C_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^n C_k$$

4.5.2 Reihenschaltung von Kapazitäten

Bei der Reihenschaltung von Kapazitäten teilt sich die gesamte an den Eingangsanschlüssen anliegende Spannung U_0 in die Teilspannungen U_k an den einzelnen Kapazitäten auf (Abbildung 4.27).

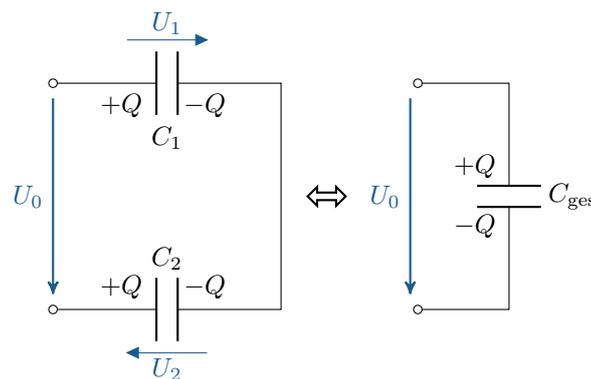


Abbildung 4.27: Zusammenfassen von zwei in Reihe geschalteten Kapazitäten C_1 und C_2 zu einer Gesamtkapazität C_{ges}

Auf den jeweils mit den Anschlussklemmen verbundenen Kondensatorplatten wird eine Ladung $\pm Q$ aufgeprägt. Beide Platten des selben Kondensators haben stets betragsgleiche Ladungen, was dazu führt, dass beide Kondensatoren an den Anschlussklemmen der Reihenschaltung auf beiden Platten die Ladung $\pm Q$ haben. Die äußere Platte des jeweils nächsten angeschlossenen Kondensators muss betragsmäßig identisch mit umgekehrten Vorzeichen geladen sein, da aus der ursprünglich elektrisch neutralen Verbindung keine Ladungsträger entweichen oder hinzugefügt werden können. Diesem Schema folgend besitzen alle Kondensatoren einer Reihenschaltung die gleiche Ladung Q .

Ausgehend von der Kondensator-Grundgleichung $Q = C \cdot U$ ergibt sich für die Teilspannungen, welche an den in Abbildung 4.27 gezeigten Kondensatoren abfallen:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Eingesetzt in das Ergebnis des Maschenumlaufs der Ausgangsschaltung ergibt sich:

$$U_0 = U_1 + U_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \cdot Q$$

Die Spannung U_0 im Ersatzschaltbild kann wie folgt berechnet werden:

$$U_0 = \frac{1}{C_{\text{ges}}} \cdot Q$$

Ein Quotientenvergleich offenbart:

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{\text{ges}}}$$

Allgemein gilt für eine Reihenschaltung aus beliebig vielen Kondensatoren:

Merke: Gesamtkapazität einer Reihenschaltung:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (4.16)$$

Bei zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren kann die Gesamtkapazität C_{ges} analog zur Parallelschaltung von Widerständen auch mit folgendem Ausdruck ermittelt werden:

$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

4.5.3 Spannungsteiler an Kapazitäten

Ähnlich wie beim Spannungsteiler an in zwei in Reihe geschalteten Widerständen lässt sich auch das Verhältnis der Teilspannung an zwei in Reihe geschalteten, identisch geladenen Kondensatoren ermitteln (siehe Abbildung 4.28).

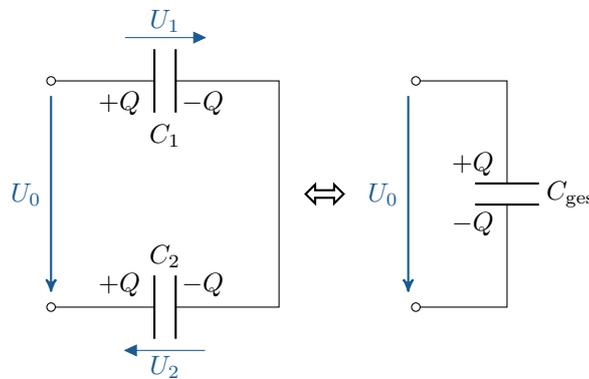


Abbildung 4.28: Spannungsteiler an einer Reihenschaltung von zwei Kapazitäten (links) sowie Ersatzschaltbild nach Zusammenfassen der Kapazitäten zu C_{ges}

Die Spannung U_1 kann wie folgt ermittelt werden:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}$$

Die Ladung Q ist unbekannt, jedoch sowohl bei beiden Kondensatoren C_1 und C_2 als auch in der Ersatzschaltung bei C_{ges} identisch:

$$Q = C_{\text{ges}} \cdot U_0 = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_0$$

Eingesetzt ergibt sich für U_1 :

$$U_1 = \frac{1}{\mathcal{C}_1} \cdot \frac{\mathcal{C}_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_0 = U_0 \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Der Spannungsteiler für U_2 berechnet sich analog:

Merke:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_0, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot U_0$$

4.6 Messen von Strom und Spannung

4.6.1 Spannungsmessung im Gleichstromkreis

Die elektrische Spannung, die über einem Bauelement über einer Zusammenschaltung mehrerer Bauelementen abfällt, kann mit Hilfe eines Spannungsmessgerätes (auch Voltmeter genannt) ermittelt werden. Dazu muss das Voltmeter **parallel** zu diesem Bauelement angebracht werden. Eine Unterbrechung des Stromkreises ist dazu in der Regel nicht notwendig.

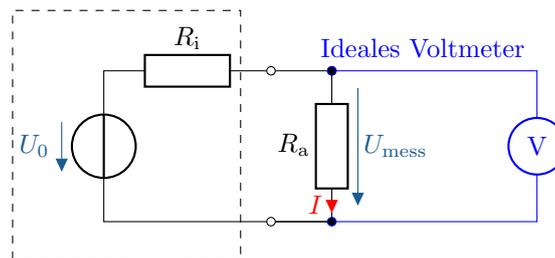


Abbildung 4.29: Eine reale Spannungsquelle (Kasten links) speist einen Lastwiderstand R_a . Die darüber abfallende Spannung wird mit einem idealen Voltmeter (blau) gemessen

Merke: Innenwiderstand ideales Voltmeter

Ein ideales Voltmeter (siehe Abbildung 4.29) besitzt einen unendlich hohen Innenwiderstand.

Folglich fließt kein Strom „am Lastwiderstand vorbei“ durch das Messgerät, und die Spannungsmessung erfolgt vollständig **rückwirkungsfrei**.

Ein reales Voltmeter besitzt einen endlichen Innenwiderstand R_{iV} , welcher parallel zum Voltmeter geschaltet ist (siehe Abbildung 4.30). Der durch diesen Innenwiderstand fließende Strom verfälscht das Messergebnis, weswegen dieser so hoch wie möglich sein sollte. In modernen, elektronischen Spannungsmessgeräten ist er üblicherweise in der Größenordnung von $10^6 \Omega$ bis $10^9 \Omega$

Die um den Messfehler durch den Innenwiderstand R_{iV} korrigierte Spannung U_{korrt} lässt sich unter Kenntnis des Innenwiderstandes der Spannungsquelle R_i wie folgt berechnen:

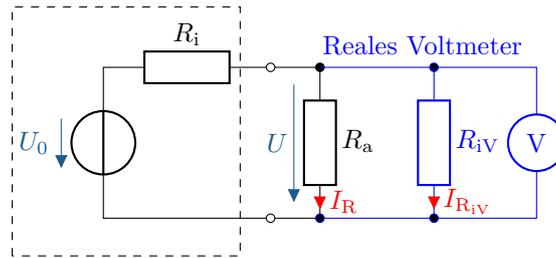


Abbildung 4.30: Messung der Spannung U über einem Lastwiderstand R_a durch ein reales Voltmeter mit endlichem Innenwiderstand R_{iV}

$$U_{\text{korrr}} = U \cdot \left(1 + \frac{R_i || R_a}{R_{iV}} \right)$$

4.6.2 Strommessung im Gleichstromkreis

Die Stromstärke I , welche durch ein Bauelement fließt, lässt sich mit Hilfe eines Strommessgerätes (auch Amperemeter genannt) bestimmen. Im Gegensatz zur Spannungsmessung muss das Amperemeter **in Reihe** zum Bauelement geschaltet werden. Eine Unterbrechung des Stromkreises ist dazu erforderlich.

Merke: Innenwiderstand ideales Amperemeter

Ein ideales Amperemeter (siehe Abbildung 4.31) hat keinen Innenwiderstand.

Folglich kann der Strom rückwirkungsfrei durch es hindurchfließen.

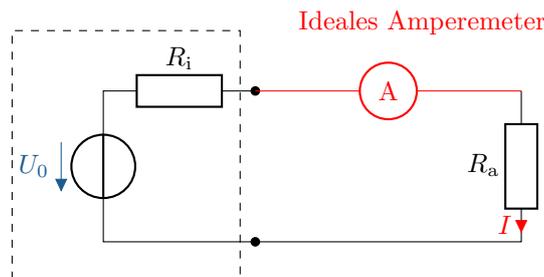


Abbildung 4.31: Eine reale Spannungsquelle (Kasten links) speist einen Lastwiderstand R_a . Der durch den Lastwiderstand fließende Strom I von einem idealen Amperemeter (rot) gemessen

Ein **reales Amperemeter** verfügt über einen in Reihe geschalteten Innenwiderstand R_{iA} (Abbildung 4.32). Auch hier wird das Messergebnis durch diesen Innenwiderstand beeinflusst. Je nach Messbereich liegt dieser bei elektronischen Amperemetern typischerweise im Bereich einiger $\mu\Omega$ bis weniger $m\Omega$.

Unter Kenntnis der Innenwiderstände lässt sich auch beim Amperemeter der Messfehler herausrechnen. Die korrigierte Stromstärke I_{korrr} , bei der der Einfluss des Messgerätes herausgerechnet wird, lässt sich mit Hilfe folgender Formel ermitteln:

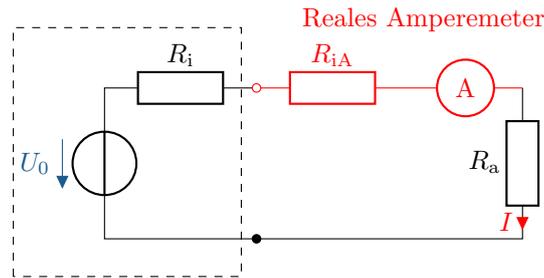


Abbildung 4.32: Messung der Stromstärke I durch einen Lastwiderstand R_a durch ein reales Amperemeter mit Innenwiderstand R_{iA} (rot)

$$I_{\text{korrr}} = I \cdot \left(1 + \frac{R_{iA}}{R_i + R_a} \right)$$

4.6.3 Strom- und spannungsrichtiges Messen

Sollen sowohl die Spannung als auch die Stromstärke in einer Schaltung gemessen werden, beeinflussen sich die realen Messgeräte durch ihre Innenwiderstände gegenseitig. Abhängig von der Qualität der zur Verfügung stehenden Messgeräte und der Priorisierung der Messgrößen untereinander wird zwischen stromrichtiger und spannungsrichtiger Messung unterschieden.

4.6.3.1 Stromrichtiges Messen

Bei der **stromrichtigen** Messung (Abbildung 4.33), welche auch Spannungsfehler-Schaltung genannt wird, wird ein höherer Fokus auf die genaue Bestimmung der Stromstärke gelegt. Bei dieser Schaltung zeigt das Amperemeter den durch den Lastwiderstand fließenden Strom an, das Voltmeter misst jedoch die Summe der Spannungsabfälle von Amperemeter und Lastwiderstand:

$$U_{\text{mess}} = U + U_{\text{Amperemeter}}$$

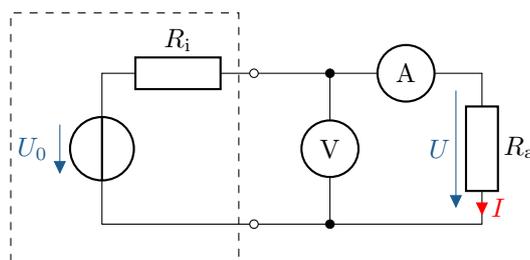


Abbildung 4.33: Stromrichtige Messschaltung zur Bestimmung der Stromstärke I sowie der Spannung U an einem Lastwiderstand R_a

Die Spannungsfehlerschaltung bietet sich tendenziell für Schaltungen mit verhältnismäßig hohen Lastwiderständen an. Als Faustregel für den Einsatz dieser Messschaltung dient häufig folgende Ungleichung:

$$R_{iA} \ll R_a$$

4.6.3.2 Spannungsrichtiges Messen

Im Gegensatz zur stromrichtigen Messschaltung misst das Voltmeter in der spannungsrichtigen Messschaltung die korrekte am Widerstand abfallende Spannung (siehe Abbildung 4.34). Das Amperemeter hingegen misst den Strom, welcher durch die Parallelschaltung aus Spannungsmesser und Lastwiderstand fließt. Diese Messanordnung ist zu empfehlen, wenn ein höherer Fokus auf die korrekte Messung der Spannung gelegt werden soll, oder für die Widerstände gilt:

$$R_{iV} \gg R_a$$

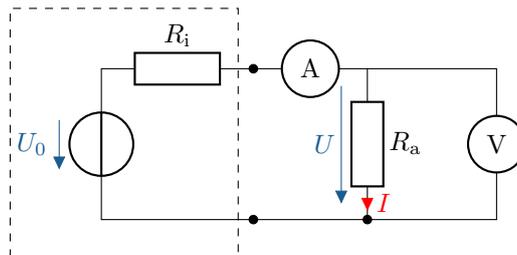


Abbildung 4.34: Stromrichtige Messschaltung zur Bestimmung der Stromstärke I sowie der Spannung U an einem Lastwiderstand R_a

Bei unklaren Verhältnissen, ob die stromrichtige oder die spannungsrichtige Messung verwendet werden sollte, kann folgende Faustregel verwendet werden:

Merke: Faustregel für strom-/spannungsrichtiges Messen

- Stromrichtig: $R_a > \sqrt{R_{iA} \cdot R_{iV}}$
- Spannungsrichtig: $R_a < \sqrt{R_{iA} \cdot R_{iV}}$

Modul 5

Erweiterte Gleichstromnetzwerke

5.1 Einleitung

Während die Berechnungen von Serienschaltungen ohne parallele geschaltete Bestandteile recht aufwendungsarm zu bewerkstelligen sind, wird die Analyse von Gleichstromnetzwerken mit Knoten, welche n Abzweigungen aufweisen, wobei die Anzahl der Zweige dabei $n \geq 2$ ist, bei steigender Knotenanzahl schnell unübersichtlich. Eine vielschichtige Betrachtung des Gleichstromnetzwerkes ist hier von Nöten. Für die Berechnung von Gleichstromnetzwerken stehen die folgenden Methoden zur Verfügung:

- Knoten- und Maschenregel
- Superposition
- Knotenpotentialanalyse
- Maschenstromanalyse

Auch die Analyse von elektrischen Netzwerken mit mehr als einer Strom- oder Spannungsquelle ist nicht trivial. Die Bestimmung aller Ströme und Spannungen des elektrischen Netzwerkes aus Abbildung 5.1 ist allein durch die Berechnungen von Serienschaltungen und Parallelschaltungen nicht möglich.

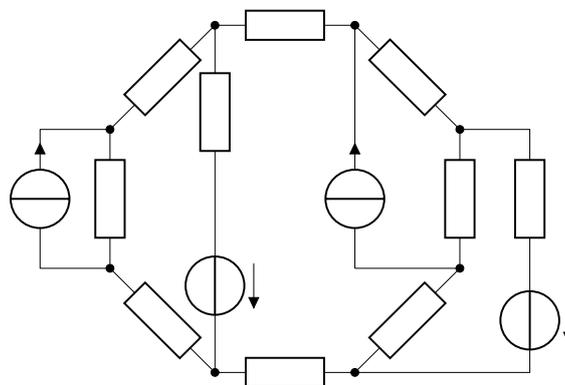


Abbildung 5.1: **Beispielnetzwerk.** Elektrisches Gleichstromnetzwerk mit einer Vielzahl an Widerständen, Stromquellen und Spannungsquellen.

5.2 Knoten- und Maschenanalyse

Bei der Betrachtung von elektrischen Netzwerken werden vor allem die Ströme in Knoten und die Spannungen in Maschen analysiert. Die Analyse von Knoten und Maschen in elektrischen Netzwerken erfolgt durch die beiden Kirchhoffsche Regeln.

Lernziele: Knoten- und Maschenanalyse

Die Studierenden

1. kennen die grundlegenden Definitionen zur Beschreibung eines elektrischen Netzwerkes.
2. können die Knotenregel und die Maschenregel auf elektrische Netzwerke anwenden.

5.2.1 Stromdichte im freien Raum

Gegebenheiten und Begriffe aus der Feldtheorie führen zu den Erklärungen im strukturierten Feldraum. Dazu werden in der Abbildung 5.2 eine positiv geladene Platte und eine negativ geladene Platte dargestellt, die sich gegenüberstehen. Der Raum zwischen den beiden Platten weist ein Elektrisches Feld \vec{E} und ein Medium mit der Leitfähigkeit σ auf. Ladungsträger können sich in dem freien Raum bewegen. Es stellt sich eine gerichtete Bewegung von Ladungsträgern und damit eine Stromdichte \vec{J} zwischen den Platten ein. Die Stromdichte ist dabei in der betrachteten Fläche quellenfrei.

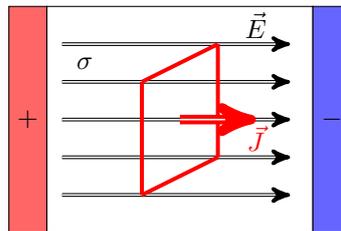


Abbildung 5.2: **Elektrisches Feld zwischen einer positiv geladenen und einer negativ geladenen Platte.** Die Stromdichte einer Beispielfläche im elektrischen Feld ist quellenfrei.

Die Quellenfreiheit der Stromdichte wird durch die Gleichung 5.1 verdeutlicht. Hier wird beschrieben, dass keine Quellen oder Senken existieren, da sich keine feldbildenden Ladungen im Raum befinden. Für diesen Fall ist die Stromdichte quellenfrei und es fließen dieselbe Anzahl an Ladungen in die Fläche hinein und wieder heraus. Mathematisch wird dies für die Betrachtung im freien Raum in der Kontinuitätsgleichung ausgedrückt:

$$\oint \vec{J} d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div} \vec{J} = 0 \quad (5.1)$$

5.2.2 Stromdichte im strukturierten Raum

Im strukturierten Feldraum (vgl. Abbildung 5.3) gilt ebenfalls die Quellenfreiheit der Stromdichte. Alle Ladungen, die in den Feldraum eindringen, müssen ihn auch wieder verlassen. Dies gilt auch für den Fall, dass ein elektrischer Leiter mehr als einen Ableiter aufweist. Es wird eine Zuleitung mit

zwei Ableitungen angedeutet, bei dem sich die Ladungen auf die beiden Ableitungen aufteilen. Die Zylinder-Mantelflächen A_1 , A_2 und A_3 definieren mit den angrenzenden Zylindern einen strukturierten Feldraum. Wie die Ladungen teilen sich die Stromdichten durch den strukturierten Raum auf. So ergibt sich die Stromdichte \vec{J}_1 aus der Summe der abfließenden Stromdichten \vec{J}_2 und \vec{J}_3 .

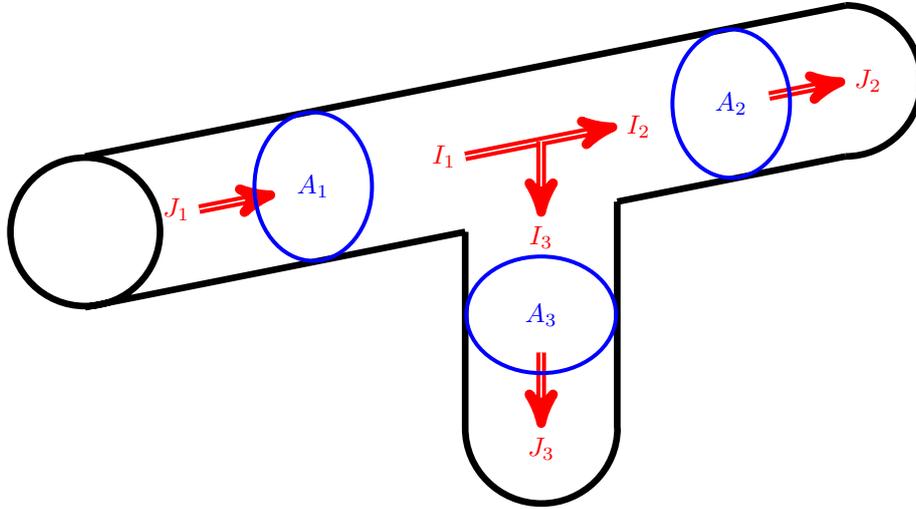


Abbildung 5.3: **Strukturierter Feldraum.** Vereinfachte Darstellung eines sich aufteilenden Leiters mit den Stromdichten J_1 , J_2 und J_3 und den Flächen A_1 , A_2 und A_3 .

Da der Feldraum im Beispiel durch die Flächen strukturiert und der Querschnitt der Leitung definiert ist, lassen sich aus der Beziehung zwischen der Stromdichte und der Fläche die Ströme der Leitungen gemäß Gleichung 5.2 ermitteln.

$$I_1 = \iint_A \vec{J}_1 d\vec{A} \quad (5.2)$$

Der Zusammenhang der Stromdichten zueinander lässt sich so auf die Ströme übertragen. Der Strom der Zuleitung I_1 ergibt sich aus der Summe der beiden Ableitungsströmen I_2 und I_3 . Der Beispielleiter kann auch als vereinfachtes elektrisches Netzwerk dargestellt werden. Die ermittelten Ströme um den Verbindungspunkt K (Knoten) werden in der Abbildung 5.4 abgebildet.

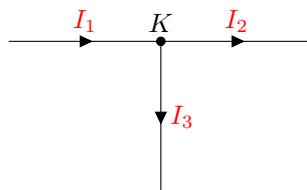


Abbildung 5.4: **Beispielknoten aus dem strukturierten Raum.** Aus den Stromdichten J_1 , J_2 und J_3 ergeben sich um den Knoten K die Ströme I_1 , I_2 und I_3 .

5.2.3 Exkurs: Graphentheorie

In der Mathematik beschäftigt sich die Graphentheorie mit der Beschreibung von Knoten und Kanten, in der Kontenanalyse werden ebenfalls Knoten und Äste definiert. Durch die Graphentheorie können die Kanten und Knoten, welche in der Abbildung 5.5 dargestellt werden, sowie deren Eigenschaften

miteinander in Beziehung gesetzt werden. Über die Kanten können mehrere Knoten miteinander verbunden werden.

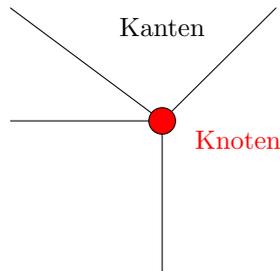


Abbildung 5.5: **Beispielknoten der Graphentheorie.** Knoten mit 4 Kanten zur Erläuterung von Knoten und Kanten in der Graphentheorie.

Werden mehrere Knoten mit ihren Kanten miteinander verbunden entsteht ein Graph. Mit diesem Graph kann exemplarisch ein elektrisches Netzwerk beschrieben werden. Das Beispiel eines Netzwerkes mit fünf Knoten und den zwischen den Knoten liegenden Kanten wird in der Abbildung 5.6 gezeigt. Wird ein Weg durch das Netzwerk gesucht ergeben sich unterschiedliche Möglichkeiten. Ein Weg vom Knoten 1 über die Knoten 2, 4 und 5 zurück zum Knoten 1 wird rot hinterlegt. Sind Anfang und Ende derselbe Knoten, so wird dieser Weg in der Graphentheorie auch als Zyklus bezeichnet. Jeder Zyklus, bei dem jeder Knoten bis auf den Anfang und das Ende nur einmal „besucht“ wird, nennt man einen „Kreis“. In elektrischen Netzwerken werden diese Kreise auch als Maschen bezeichnet.

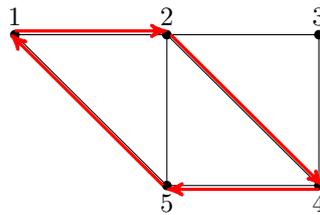


Abbildung 5.6: **Beispielnetzwerk der Graphentheorie.** Netzwerk mit 5 Knoten und zwischen den Knoten verlaufenden Kanten zur Erläuterung eines Zyklus in der Graphentheorie.

Um die Beziehung der Knoten untereinander zu erklären bietet sich in der Mathematik eine Matrix an. Die Knoten weisen eine differenzierte Anzahl von Kanten auf und nicht alle Knoten sind miteinander verbunden. Die Adjazenz-Matrix beschreibt die Beziehung der Knoten untereinander. Eine solche Adjazenz-Matrix wird in der Gleichung 5.3 für das beschriebene Beispielnetzwerk aufgestellt. Sie beschreibt damit vollständig den Graphen, abgesehen von der grafischen Repräsentanz in der 2D-Darstellung.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Merke: Graphentheorie

In der Graphentheorie werden Netzwerke mit Kanten und Knoten beschrieben. Bei der Analyse der Netzwerke werden Wege und Zyklen definiert. Ein durchgehender Zyklus mit einem identischen Startpunkt und Endpunkt wird als Kreis bezeichnet.

5.2.4 Knoten, Zweig, Masche

Ein elektrisches Netzwerk besteht aus Knoten, Zweigen und Maschen. Ein Zweig verbindet genau zwei Knoten durch ein oder mehrere Schaltungselemente miteinander. Durch alle Elemente eines Zweiges fließt der gleiche Strom. In Abbildung 5.7 existieren drei Zweige. Ein Zweig mit den Komponenten R_1 , R_5 und U_{q1} , ein Zweig mit dem Widerstand R_4 und ein Zweig mit den Komponenten R_2 , R_3 und U_{q2} .

Ein Knoten ist ein Punkt, an dem mindestens drei Anschlüsse der Schaltungselemente zusammenlaufen. Der Strom kann sich hier also aufteilen. Das elektrische Potential ist hierbei für alle verbundenen Anschlüsse identisch. Im Schaltplan wird ein Knoten durch einen ausgefüllten Kreis gekennzeichnet. Sind jedoch zwei oder mehrere dieser Kreise nur durch eine Leitung miteinander verbunden, handelt es sich um einen einzigen Knoten, da das Potential auch hier gleich ist. Ein Knoten wird mit K_n bezeichnet.

Eine Masche ist ein geschlossener Weg, der aus mindestens zwei Zweigen besteht. In dem Netz in Abbildung 5.7 können drei Maschen definiert werden:

- M_1 bestehend aus R_1 , R_4 , R_5 und U_{q1}
- M_2 bestehend aus R_2 , R_3 , R_4 und U_{q2}
- M_3 bestehend aus R_1 , R_2 , R_3 , U_{q2} , R_5 und U_{q1}

Eine Masche wird mit M_n bezeichnet. Die Umlaufrichtung ist dabei von Bedeutung und wird mit einem Pfeil gekennzeichnet.

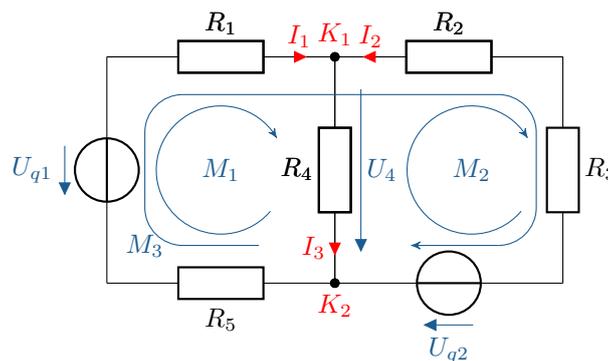


Abbildung 5.7: Gleichstromnetzwerk. Netzwerk mit Knoten, Zweigen und Maschen

Merke: Knoten, Zweige und Maschen

Elektrische Netzwerke werden analog zur Graphentheorie durch Knoten, Zweige und Maschen beschrieben.

5.2.5 Der vollständige Baum

Für die weitere Analyse des Netzwerkes ist es notwendig, die Netzwerkgleichungen zu ermitteln. Dieses lineare Gleichungssystem ist aber immer überbestimmt, weshalb es nötig wird, die Anzahl der Gleichungen zu reduzieren. Dabei ist es wichtig, die linear abhängigen Gleichungen zu identifizieren und zu eliminieren.

Die Knoten, Zweige und Maschen eines Netzwerkes können in einem Graph dargestellt werden, der nur die Verbindungen untereinander darstellt. Zur Darstellung des Graphen werden alle Zweige als Linien dargestellt, welche die Knoten verbinden. Der Inhalt des Zweiges ist dafür irrelevant. In Abbildung 5.8 ist ein beispielhaftes Netz mit dem sich ergebenden Graphen dargestellt.

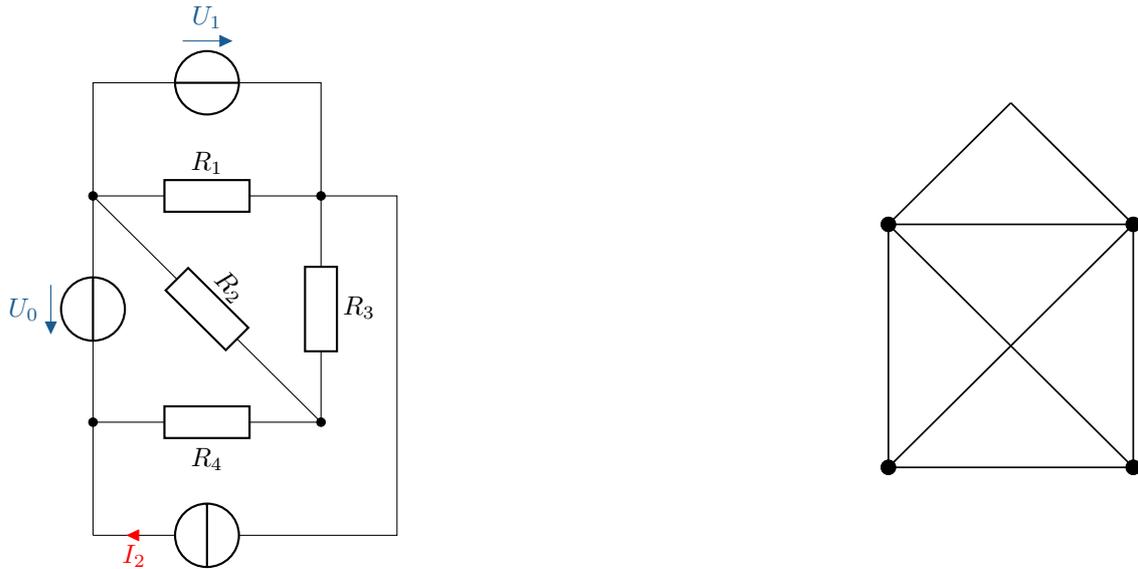


Abbildung 5.8: **Gleichstromnetzwerk und Graph.** Erzeugung des Graphen aus einem zu berechnenden Netzwerk

In diesem Graph kann ein vollständiger Baum aufgezeichnet werden, der alle Knoten enthält, aber selbst keine Masche bildet. Die Baumzweige verbinden also alle Knoten miteinander, bilden aber keine geschlossene Linie. Die Baumzweige können Abzweigungen bilden, ein Knoten kann also auch mehr als zwei Baumzweige berühren. In größeren Netzwerken gibt es mehrere Möglichkeiten für einen vollständigen Baum, die prinzipiell gleichwertig sind. Bei der Vorstellung der verschiedenen Berechnungsverfahren werden aber abhängig vom Verfahren bestimmte Kombinationen bevorzugt. Ein vollständiger Baum beinhaltet genau $k - 1$ Zweige.

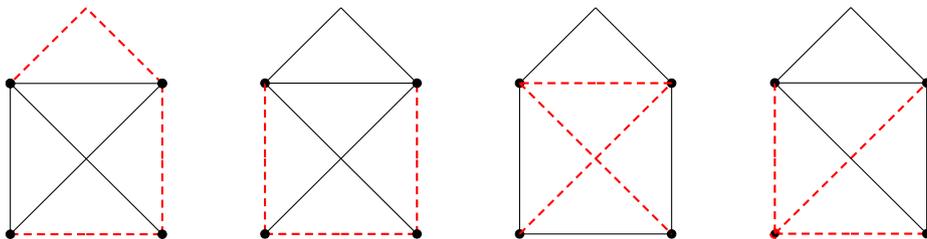


Abbildung 5.9: **Beispielbäume.** Beispiele für verschiedene in rot gezeichnete vollständige Bäume eines Netzes

Die Zweige, die zum Baum gehören, werden Baumzweige (rot), die anderen Verbindungszweige

(schwarz) genannt. Um die linear unabhängigen Maschen zu finden, wird zu jedem Verbindungszweig eine Masche gebildet, die außer dem Verbindungszweig nur Baumzweige enthält.

- Ein Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten enthält $z - k + 1$ Verbindungszweige.

Merke: Der vollständige Baum

Mithilfe eines vollständigen Baumes werden alle Knoten miteinander durch Baumzweige verbunden. Es ergeben sich dabei immer $k - 1$ Baumzweige. Der vollständige Baum bildet keine Masche.

5.2.6 Knotenregel

Treffen sich mehr als zwei Leitungen an einem Punkt eines elektrischen Netzwerkes handelt es sich um einen Knotenpunkt K . Die Pfeilrichtung aus der Sicht des Knotens bestimmt das Vorzeichen des Stromes. Führt ein Strom in einen Knoten hinein, so zeigt der Strompfeil auf den Knoten und es handelt sich um eine Einströmung. Zeigt der Strompfeil aus dem Knoten heraus, wird der Strom aus dem Knoten herausgeführt und es handelt sich um eine Ausströmung. Die Knotenanalyse ergibt sich aus dem 1. Kirchhoff'schen Gesetz, welches besagt: Die Summe aller Ströme an einem Knoten ist Null (Gleichung 5.4). Dieses Gesetz folgt direkt aus der Kontinuitätsgleichung (vgl. Abschnitt [Stromdichte im freien Raum](#))

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0 \quad (5.4)$$

So müssen sich für jeden Knoten die Summe der Stromstärken aus Einströmungen und Ausströmungen gegenseitig ausgleichen. In der Abbildung 5.10 sind ein Knoten K und die Ein- und Ausströmungen eingezeichnet. Bei den Strömen I_1 und I_2 handelt es sich um Einströmungen. Die drei Ströme I_3 , I_4 und I_5 sind Ausströmungen.

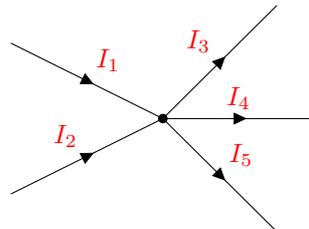


Abbildung 5.10: **Beispielknoten.** Knoten für die Knotenanalyse mit zwei einströmenden und drei ausströmenden Zweigen.

Werden die Ströme nacheinander aufgetragen und gleich Null gesetzt, ergibt sich die Gleichung 5.5. Je nachdem ob es sich um eine Einströmung oder eine Ausströmung handelt, wird das Vorzeichen gewählt. Einströmungen werden mit einem positiven und Ausströmungen mit einem negativen Vorzeichen behaftet.

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0 = I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 \quad (5.5)$$

Merke: Knotenregel

Die Summe der zufließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden Ströme oder die Summe aller Ströme an einem Knoten ist Null:

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0 \quad (5.6)$$

5.2.7 Maschenregel

Bewegt sich ein Teilchen zwischen zwei Punkten in einem elektrischen Feld, wird Arbeit verrichtet. Ist der Startpunkt identisch mit dem Endpunkt, muss ebenso viel Arbeit abgegeben wie aufgenommen werden. Die Summe der Arbeit ist in diesem Fall gleich Null. Wenn so ein kompletter Maschenumlauf entlang einer geschlossenen Strecke vollzogen wird, muss die Summe der Teilspannungen ebenfalls gleich Null sein. Vorausgesetzt wird hier, dass sich keine zeitlich veränderte magnetische Flussdichte ergibt und somit kein elektrisches Wirbelfeld entsteht (vgl. Gleichung 5.7). Die Gleichung beschreibt hier das Faradaysche Induktionsgesetz für statische Felder (hier: keine Änderung eines Magnetfeldes).

$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{rot} \vec{E} = 0 \quad (5.7)$$

Die Maschenanalyse besagt nach der 2. Kirchhoffschen Regel, dass bei einem vollständigen Umlauf (Masche) in einem elektrischen Netzwerk die Summe aller Spannungen gleich Null ist. Dies wird durch die Gleichung 5.8 verdeutlicht.

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0 \quad (5.8)$$

Innerhalb einer Masche werden die Spannungen mit einer gleichgerichteten Pfeilrichtung positiv gezählt, Spannungen mit der Umlaufrichtung entgegengesetzten Pfeilrichtung werden negativ gezählt. Ausgehend von den Stromverläufen und Potentialen aus der Abbildung 5.11 können die Spannungen der jeweiligen Zweige ermittelt werden. Oberhalb der Parallelschaltung der Widerstände gibt es keine Potentialdifferenz. Selbiges gilt für die elektrische Verbindung unterhalb der Parallelschaltung. Der Strom I_{R1} fließt durch den Widerstand R_1 . So ergibt sich nach dem ohmschen Gesetz die Spannung U_{R1} über R_1 . Äquivalent wird die Spannung U_{R2} über R_2 bestimmt.

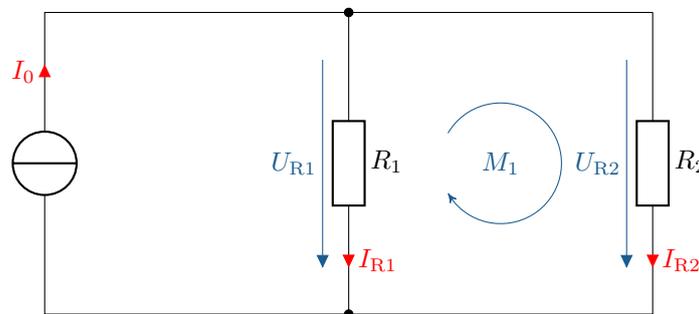


Abbildung 5.11: **Beispielnetzwerk mit einer Stromquelle und zwei parallelen Widerständen.** In der Masche M_1 müssen die Spannungen U_{R1} und U_{R2} identisch sein und sich entsprechend ihrer Richtungen in der Masche aufheben.

Gemäß des vorgestellten Netzwerkes und der Richtung der eingezeichneten Masche M_1 stellt sich der Zusammenhang nach Gleichung 5.9 ein. Die Spannung U_{R2} verläuft in derselben Richtung, wie die eingezeichnete Masche und wird mit einem positiven Vorzeichen behaftet. Die Spannung U_{R1} verläuft gegenläufig der Masche M_1 und wird somit negativ. In Summe müssen diese beiden Spannungen null ergeben.

$$\sum_{k=1}^N U_k = +U_{R2} - U_{R1} = 0 \quad (5.9)$$

Merke: Maschenregel

In einer Masche ist die Summe aller Teilspannungen gleich Null:

$$\sum_{k=1}^N U_k = 0 \quad (5.10)$$

5.2.8 Knoten- und Maschenanalyse

Bei der Knoten- und Maschenanalyse wird das vollständige Gleichungssystem bestehend aus Knoten- und Maschengleichungen aufgestellt und anschließend gelöst. Das Verfahren ist einfach, erzeugt jedoch für ein Netzwerk eine Anzahl Gleichungen, die der Anzahl der Zweige entspricht. Das Verfahren hat den folgenden Ablauf:

1. Vereinfachen des Netzwerkes.
2. Einzeichnen aller Strompfeile und Erstellen des Graphen.
3. Aufstellen von $k - 1$ Knotengleichungen. Eine beliebige Knotengleichung kann weggelassen werden, da in einem Netzwerk mit k Knoten nur $k - 1$ Knotengleichungen linear unabhängig voneinander sind. Prinzipiell ist es egal, welche Knotengleichung unberücksichtigt bleibt. Am geschicktesten wird die komplizierteste Gleichung gestrichen.
4. Aufstellen der $m = z - k + 1$ linear unabhängigen Maschengleichungen. Dabei werden die Gleichungen mit Hilfe des vollständigen Baumes erstellt.
5. Lösen des Gleichungssystems mit der Dimension z .
6. Ggfs. rückgängig machen von Schritt 1.

Es wird folgendes Beispielnetzwerk betrachtet:

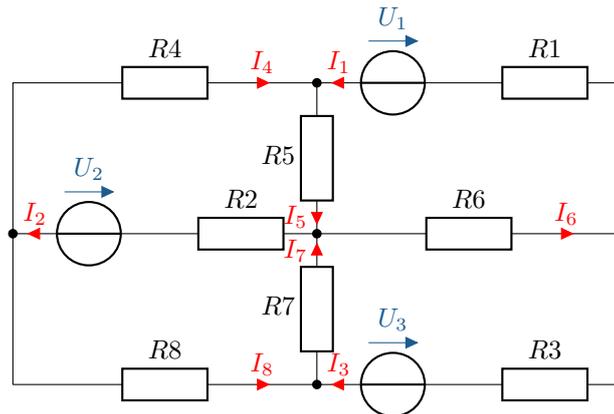


Abbildung 5.12: Beispielnetzwerk zur Knoten- und Maschenanalyse.

Der zugehörige Graph und die damit festgelegten Maschen werden in der Abbildung 5.13 dargestellt. Eine andere Aufstellung der Maschen ist möglich. Wie gezeigt, können Maschen auch über Zweige hinaus reichen.

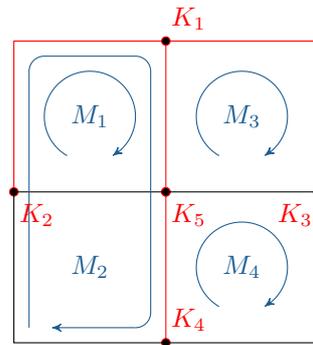


Abbildung 5.13: Graph mit Maschen zum Beispiel. Die Baumzweige werden rot und die Maschen blau gefärbt.

Das Netzwerk hat $z = 8$ Zweige, $k = 5$ Knoten. Es müssen daher $k - 1 = 4$ Knotengleichungen und $z - k + 1 = 4$ Maschengleichungen aufgestellt werden. Knoten 5 hat vier Zweige, die anderen nur drei. Daher wird die Knotengleichung von Knoten 5 weggelassen.

$$\begin{aligned}
 K_1 : \quad & I_1 + I_4 - I_5 = 0 \\
 K_2 : \quad & I_2 - I_4 - I_8 = 0 \\
 K_3 : \quad & -I_1 - I_3 + I_6 = 0 \\
 K_4 : \quad & I_3 - I_7 + I_8 = 0 \\
 M_1 : \quad & R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_5 I_5 - U_2 = 0 \\
 M_2 : \quad & R_4 I_4 + R_5 I_5 - R_7 I_7 - R_8 I_8 = 0 \\
 M_3 : \quad & -R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_6 I_6 + U_1 = 0 \\
 M_4 : \quad & R_3 I_3 + R_6 I_6 + R_7 I_7 - U_3 = 0
 \end{aligned}$$

Um das Gleichungssystem einfacher lösen zu können, und die Übersichtlichkeit zu erhöhen, kann es in Matrixschreibweise dargestellt werden. Mit etwas Übung kann auch sofort die Matrixschreibweise benutzt werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & 0 & -R_7 & -R_8 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & R_7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ -U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem 8. Ordnung kann nun prinzipiell mit den aus der Mathematik bekannten Verfahren gelöst werden. Das wollen wir aber hier nicht tun, da im folgenden einfachere Verfahren vorgestellt werden, die besser zu berechnen sind.

Beispiel 5.1: Netzwerkanalyse

Gegeben ist das elektrische Netzwerk nach Abbildung 5.14. Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

- Einzeichnen der Ströme und Spannungen
- Aufstellen der Knotengleichungen
- Aufstellen der Maschengleichung M_1
- Aufstellen der Maschengleichung M_2 ohne den Ausdruck U_1

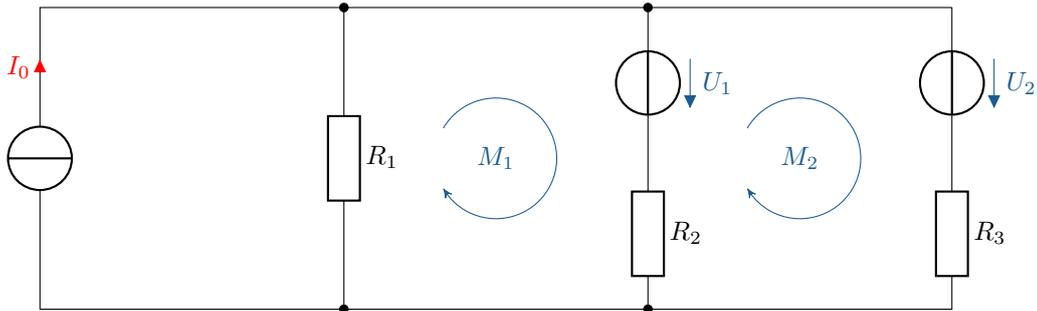
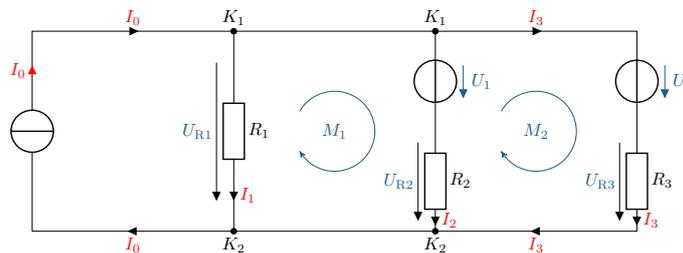


Abbildung 5.14: **Beispiel.** Netzwerkanalyse mit Kirchhoffschen Regeln.

- Angabe der Ströme und Spannungen:



- Knotengleichungen:

$$\begin{aligned} K_1 : I_0 - I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ K_2 : -I_0 + I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned}$$

- Aufstellen der Maschengleichung M_1 und M_2 :

$$\begin{aligned} M_1 : U_1 + U_{R2} - U_{R1} &= 0 \\ M_2 : U_2 + U_{R3} - U_{R2} - U_1 &= 0 \end{aligned}$$

- Aufstellen der Maschengleichung M_2 ohne den Ausdruck U_1

$$\begin{aligned} M_1 : U_1 &= U_{R1} - U_{R2} \\ M_2 : U_2 + U_{R3} - U_{R2} - (U_{R1} - U_{R2}) &= 0 \\ M_2 : U_2 + U_{R3} - \cancel{U_{R2}} - U_{R1} + \cancel{U_{R2}} &= 0 \\ M_2 : U_2 + U_{R3} - U_{R1} &= 0 \end{aligned}$$

5.3 Superpositionsprinzip

Nach der grundsätzlichen Analyse von Maschen und Knoten in elektrischen Netzwerken werden folgend zunehmend kompliziertere elektrische Netzwerke betrachtet. Hierzu wird das Überlagerungsverfahren nach Helmholtz verwendet. Das Überlagerungsverfahren wird auch als Superpositionsprinzip bezeichnet. Beim Superpositionsprinzip werden nacheinander alle Quellen einzeln ausgewertet und die Ergebnisse der einzelnen Berechnungen überlagert.

Lernziele: Superpositionsprinzip

Die Studierenden

- verstehen die Bedingungen der Systemtheorie für die Analyse von Gleichstromnetzwerken.
- können den Überlagerungssatz (das Superpositionsprinzip) auf elektrische Netzwerke anwenden.

5.3.1 Exkurs Systemtheorie

Wird in einem Modell lediglich das Eingangssignal und das Ausgangssignal betrachtet, wird von einer Blackbox gesprochen. Hier ist keinerlei Information darüber gegeben, was zwischen diesen beiden Signalen passiert. Die Abbildung 5.15 beschreibt so ein Modell. Hier wird eine Black Box betrachtet, welche als Eingangsgröße F_E und als Ausgangsgröße F_A aufweist. In der Blackbox wird das Eingangssignal in das Ausgangssignal transformiert. Das Bildnis insgesamt wird als System bezeichnet.

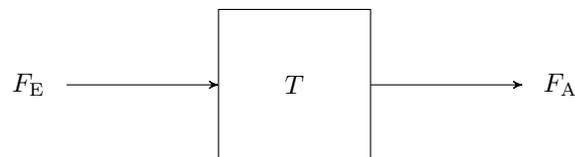


Abbildung 5.15: **Blackbox in der Systemtheorie.** Eine Blackbox mit linksseitiger Eingangsgröße und rechtsseitiger Ausgangsgrößen.

Ausgehend von der vorgestellten Blackbox lässt sich das Ausgangssignal F_A in der Abhängigkeit des Eingangssignals F_E bestimmen. Diese Transformation lässt sich durch die Gleichung 5.11 beschreiben.

$$F_A = T(F_E) \quad (5.11)$$

Ein elektrisches Netzwerk kann auch als solch ein System betrachtet werden. Das in der Abbildung 5.16 dargestellte elektrische Netzwerk verfügt über eine Eingangsspannung U_E als Eingangsgröße und eine Ausgangsspannung U_A als Ausgangsgröße. Die Blackbox, welche das zu transformierende System abbildet, setzt sich aus den beiden Widerständen R_1 und R_2 zusammen.

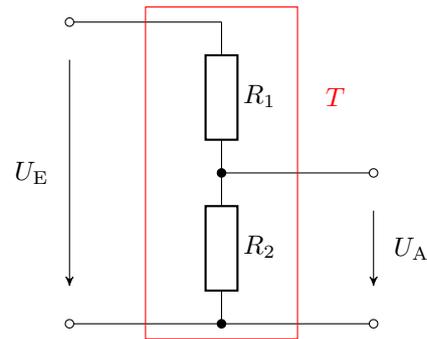


Abbildung 5.16: **Spannungsteiler als Blackbox.** Betrachtung eines elektrischen Netzwerkes als Blackbox mit Eingangsspannung und Ausgangsspannung.

Der Zusammenhang der Abhängigkeit des Ausgangssignals eines Systems vom Eingangssignal aus Gleichung 5.11 gilt weiterhin. Das Ausgangssignal lässt sich als Transformation des Eingangssignales wie in der Gleichung 5.12 beschreiben. Das Ausgangssignal ist gleich der Spannung, welche über dem Widerstand R_2 abfällt. Diese Spannung lässt sich aus dem Produkt der Eingangsspannung und dem Widerstandsverhältnis berechnen. Dieser Zusammenhang wurde auch bereits beim Spannungsteiler im Kapitel 4 behandelt.

$$U_A = T(U_E) = U_E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (5.12)$$

Kausalität

Beruhet eine Ausgangsgröße ausschließlich aus der Transformation einer Eingangsgröße, so ergibt sich ein direktes Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung. Dies bedingt auch, dass die Ausgangsgröße vor einer Anregung keine sich ändernde Systemantwort liefert. Ein System, in welchem diese Bedingungen vorherrschen, wird als kausales System bezeichnet (vgl. Abbildung 5.17). So zeigt beispielsweise eine Gleichspannungsanregung eines Systems eine zeitlich indifferente Gleichstromantwort. Ein System, welches sich anders verhält, wird als nicht kausales System bezeichnet. Wenn für $t < t_0$ der Wert des Eingangssignals Null ist, muss der Wert des Ausgangssignals für denselben Zeitraum ebenfalls Null sein, damit es die Bedingungen eines kausalen Systems erfüllt.

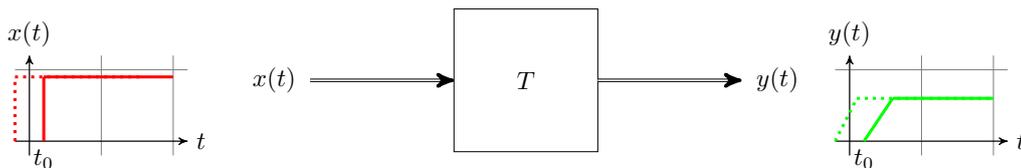


Abbildung 5.17: **Transformation eines kausalen Systems.** Aus $x(t)$ transformiertes System zu $y(t)$ für ein kausales System.

Zeitinvarianz

Reagiert das Ausgangssignal eines Systems zeitlich immer gleich auf ein Eingangssignal, so wird von einem zeitinvarianten Systemen gesprochen. Verschiebt sich der Zeitpunkt des Eingangssignals beispielsweise um t_0 , so muss weiterhin bei zeitinvarianten Systemen das Ausgangssignal immer gleich, ausgehend vom Eingangssignal, reagieren.

Die Stabilität eines Systems beschreibt ebenfalls einen Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal und dem Ausgangssignal. Stellt sich bei einem Eingangssignal mit endlicher Amplitude ein nicht über alle Grenzen wachsendes Ausgangssignal ein, ist das System stabil. Wächst das Ausgangssignal nach der Inaktivierung des Eingangssignales weiter, ist das System instabil.

$$T(\alpha \cdot u_e) = \alpha \cdot T(u_e) \quad (5.13)$$

Linearität

Ist die Reaktion des Ausgangssignals zu der Anregung des Eingangssignals proportional, wird das System als **lineares** System beschrieben (Gleichung 5.13). Wirken zwei überlagerte Eingangssignale in ein System, so können sie in diesem Fall separat betrachtet und aufsummiert werden. Auf diese Weise können auch die Transformationen der Eingangssignale, wie in der Gleichung 5.14, getrennt betrachtet werden.

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \quad (5.14)$$

Systeme, die sowohl zeitinvariant, als auch linear sind, werden als LTI-Systeme (Linear Time Invariant) bezeichnet. Die Systeme in diesem betrachteten Modul werden in Näherung als LTI-Systeme betrachtet. Bauelemente, welche Nichtlinearitäten aufweisen, werden beispielsweise im Kapitel über periodische Größen behandelt.

Merke: LTI-Systeme

LTI-Systeme stellen lineare und zeitinvariante Systeme dar. Gleichstromnetzwerke müssen als LTI-Systeme betrachtet werden, damit der Überlagerungssatz auf sie angewendet werden kann.

5.3.2 Überlagerungssatz

Sind die elektrischen Netzwerke als betrachtete Systeme auf ihre vorhandene Linearität geprüft, kann der Überlagerungssatz angewendet werden. Hier können verschiedene Quellen von einander getrennt betrachtet werden. Auf diese Weise werden beim Überlagerungssatz alle Quellen ausgeschaltet und reihenweise die einzelnen Quellen eingeschaltet. Beim Ausschalten von Quellen werden Stromquellen und Spannungsquellen verschieden umgewandelt. Beim Ausschalten einer idealen Spannungsquelle entsteht nach Abbildung 5.18 am Ort der Spannungsquelle ein Kurzschluss.

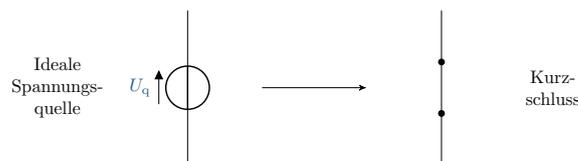


Abbildung 5.18: **Umwandlung einer Spannungsquelle.** Wird eine Spannungsquelle deaktiviert, verbleibt ein Kurzschluss. Mit diesem Kurzschluss erfolgt die weitere Netzwerkberechnung.

Eine Stromquelle hinterlässt beim Ausschalten lediglich offene Klemmen (Abbildung 5.19). Dieser Leerlauf verhindert die weitere Betrachtung dieses Pfades im Netzwerk.

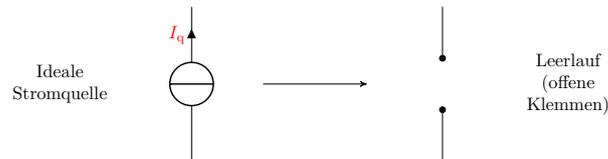


Abbildung 5.19: **Umwandlung einer Stromquelle.** Die Deaktivierung einer Stromquelle hinterlässt offene Klemmen.

Merke: Umwandlung von Quellen

Beim Ausschalten von Spannungsquellen und Stromquellen hinterlassen deaktivierte Spannungsquellen einen Kurzschluss und deaktivierte Stromquellen einen Leerlauf.

Sind bis auf eine Quelle alle anderen Quellen ausgeschaltet, wird das elektrische Netzwerk für die übriggebliebene Quelle analysiert. Das wird dann aufeinanderfolgend mit jeder Quelle durchgeführt. Am Ende werden die Einzelwirkungen als Summe betrachtet. Beispielsweise lässt sich der Strom I_R durch einen Widerstand R , welcher von zwei Quellen Q_1 und Q_2 versorgt wird, durch die Summe der Teilströme der beiden Quellen erklären (vgl. Gleichung 5.15).

$$I_R = f(Q_1, Q_2) \quad (5.15)$$

Zur Verdeutlichung des Überlagerungssatzes wird in der Abbildung 5.20 ein elektrisches Netzwerk mit zwei Spannungsquellen und drei Widerständen abgebildet. Um dieses Netzwerk mit mehr als einer Quelle zu berechnen, wird das Netzwerk für beide Spannungsquellen einzeln betrachtet.

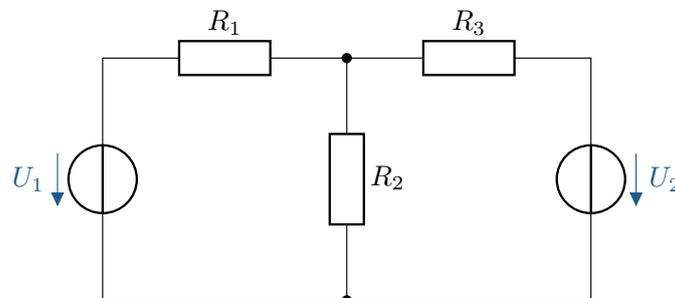


Abbildung 5.20: **Elektrisches Netzwerk mit zwei Spannungsquellen zur Erklärung des Überlagerungssatzes.** Die Spannungsquellen sollen nacheinander für das elektrische Netzwerk analysiert werden.

Das vorgestellte elektrische Netzwerk wird in der Abbildung 5.21 noch einmal jeweils für die Berechnung der beiden Spannungsquellen separat angezeigt. Für die Netzwerkbetrachtung mit der Spannungsquelle U_1 wird die Spannungsquelle U_2 kurzgeschlossen. Die beiden Widerstände R_2 und R_3 liegen nun parallel zueinander. Die Spannung von U_1 verteilt sich nun über R_1 und die Parallelschaltung R_{23} . Äquivalent dazu wird bei der Betrachtung des Netzwerkes für die Spannungsquelle U_2 die Spannungsquelle U_1 kurzgeschlossen. Nun bilden die beiden Widerstände R_1 und R_2 eine Parallelschaltung. Die Spannung der Spannungsquelle U_2 verteilt sich über die Parallelschaltung R_{12} und den Widerstand R_3 .

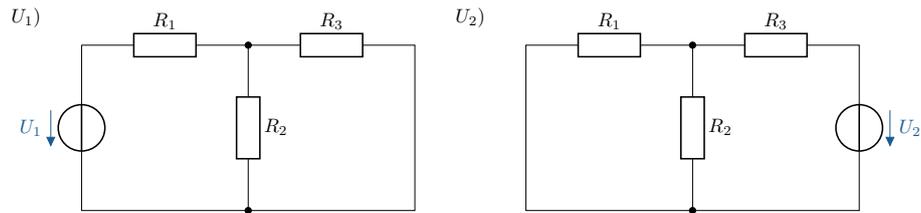


Abbildung 5.21: Elektrisches Netzwerk mit zwei Spannungsquellen zur Erklärung des Überlagerungssatzes. Links wird das Netzwerk für die Analyse der Spannungsquelle U_1 und rechts für die Spannungsquelle U_2 gezeigt.

In der Gleichung 5.16 und der Gleichung 5.17 werden die Spannungen für die beiden Spannungsquellen U_1 und U_2 am Widerstand R_3 separat bestimmt. In der Gleichung 5.18 werden die beiden Spannungen über den Widerstand R_3 dann nach dem Überlagerungssatz aufsummiert.

$$U_{R3}(U_1) = U_1 \cdot \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \quad (5.16)$$

$$U_{R3}(U_2) = U_2 \cdot \frac{R_{12}}{R_3 + R_{12}} \quad (5.17)$$

$$U_{R3} = U_{R3}(U_1) + U_{R3}(U_2) \quad (5.18)$$

Merke: Überlagerungssatz

Lineare und zeitlich invariante elektrische Netzwerke mit mehr als einer Quelle können als Summe der Teilanalysen von jeder einzelnen Quelle bestimmt werden.

Beispiel 5.2: Superpositionsverfahren

Gegeben ist das elektrische Netzwerk nach Abbildung 5.22. Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

Anwendung des Superpositionsverfahrens (Überlagerungssatz):

- Einzeichnen der Ströme und Spannungen
- Netzwerkberechnung I_3 für U_g
- Netzwerkberechnung I_3 für I_g
- Wie groß ist der Strom I_3

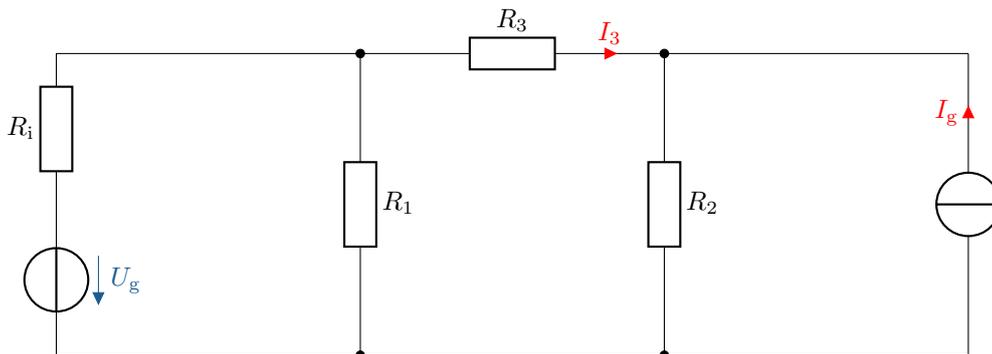
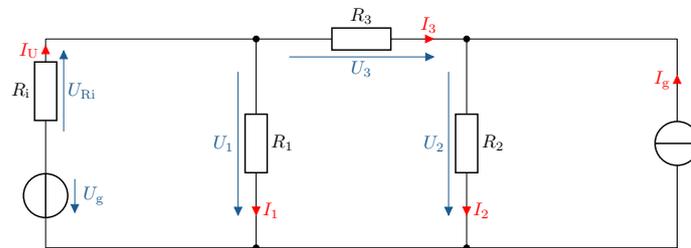
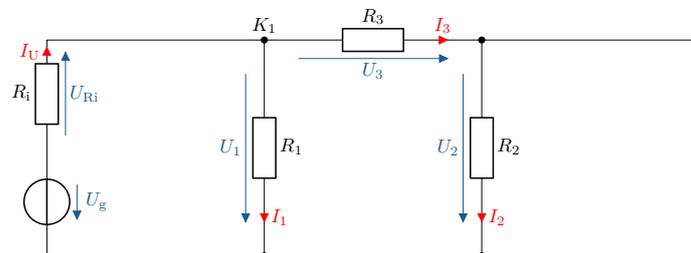


Abbildung 5.22: **Beispiel.** Netzwerkanalyse mit Kirchhoffschen Regeln.

- Angabe der Ströme und Spannungen:



- Netzwerkberechnung $I_3(U_g)$ für U_g :



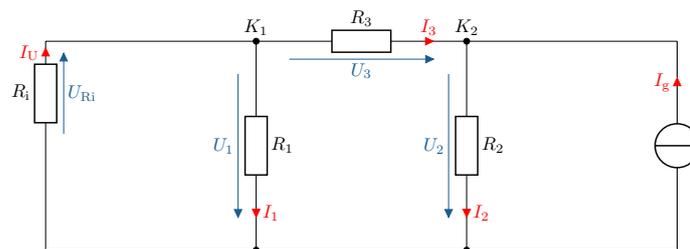
$$K_1 : I_{\text{ges}} = I_1 + I_3$$

$$I_{\text{ges}} = \frac{U_g}{R_{\text{ges}}} = \frac{U_g}{R_1 + \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

$$\frac{I_3}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$I_3(U_g) = I_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U_g}{R_1 + \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

c) Netzwerkberechnung $I_3(I_g)$ für I_g :



$$K_2 : I_{\text{ges}} = I_g = I_2 - I_3$$

$$\frac{-I_3}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_2}{(R_1 || R_i) + R_2 + R_3}$$

$$I_3(I_g) = -I_g \cdot \frac{R_2}{(R_1 || R_i) + R_2 + R_3}$$

d) Wie groß ist der Strom $I_3(U_g, I_g)$?

Superposition:

$$I_3(U_g, I_g) = I_3(U_g) + I_3(I_g)$$

$$I_3(U_g, I_g) = \frac{U_g}{R_1 + \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} + \left(-I_g \cdot \frac{R_2}{(R_1 || R_i) + R_2 + R_3} \right)$$

5.4 Knotenpotentialverfahren

Die Analyse eines elektrischen Netzwerkes kann mitunter aufwendig werden. Mit größer werdendem Netzwerk steigt auch der Aufwand zur Analyse. Auch reichen unter Umständen die bisher vorgestellten Analysemethoden zu Knoten- und Maschenanalyse nicht aus, um alle Größen eines elektrischen Netzwerkes zu bestimmen. Hier bietet das Knotenpotentialverfahren eine Möglichkeit zur Analyse. Beim Knotenpotentialverfahren werden ausgehend von einem Bezugspotential, mit der Zuordnung 0V, alle übrigen Potentiale bestimmt. Mithilfe des Knotenpotentialverfahrens wird folgend das elektrische Netzwerk aus der Abbildung 5.23 analysiert.

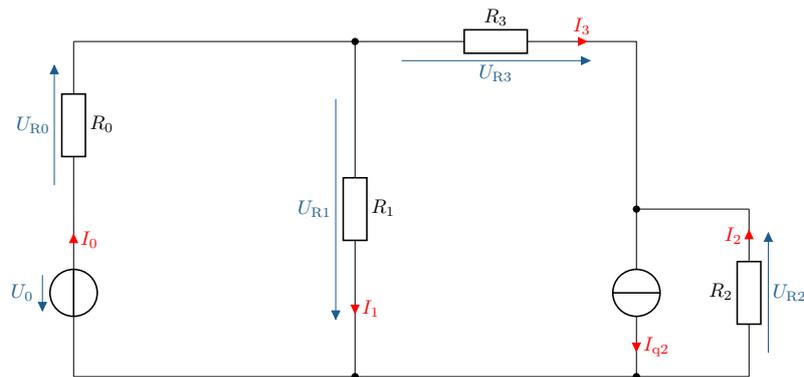


Abbildung 5.23: **Netzwerk für das Knotenpotentialverfahren.** Elektrisches Netzwerk mit einer Spannungsquelle, einer Stromquelle und vier Widerständen. Anhand des Netzwerkes wird das Knotenpotentialverfahren erläutert.

Lernziele: Knotenpotentialverfahren

Die Studierenden

- kennen die Schritte des Knotenpotentialverfahrens.
- können mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens elektrische Netzwerke analysieren.

5.4.1 Vorbereitung des Netzwerkes

Das Knotenpotentialverfahren arbeitet mit Stromquellen und Leitwerten. Das vorgestellte Netzwerk weist neben der Stromquelle eine Spannungsquelle und Widerstandswerte auf. Diese gilt es umzuwandeln. Die Spannungsquelle wird wie in der Abbildung 5.24 zu einer Stromquelle transformiert. Dabei wird aus dem Reihenwiderstand der Spannungsquelle ein Parallelwiderstand für die Stromquelle.

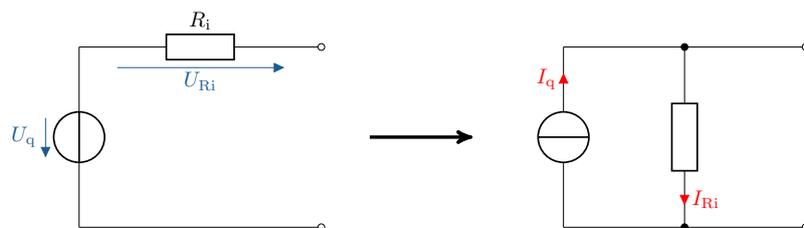


Abbildung 5.24: **Umwandlung einer Spannungsquelle.** Umwandlung einer Spannungsquelle mit Reihenwiderstand zur Stromquelle mit Parallelwiderstand.

Bei der Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen müssen auch die Spannungswerte der Spannungsquellen in Stromwerte überführt werden. Dies erfolgt nach Gleichung 5.19.

$$I_q = U_q \cdot G_i \quad (5.19)$$

Da bei dem Knotenpotentialverfahren nicht die Widerstandswerte der Komponenten verwendet werden, sondern die Leitwerte, werden alle Widerstandswerte nach Gleichung 5.20 in Leitwerte umgerechnet.

$$G_i = \frac{1}{R_i} \quad (5.20)$$

In der Abbildung 5.25 wird die Umwandlung der Spannungsquellen aus dem angegebenen Netzwerk in eine äquivalente Stromquellen dargestellt. Aus der Spannungsquelle U_0 und dem Widerstand R_0 wird die Stromquelle I_{q0} und dazu der parallel liegende Leitwert G_0 . Die restlichen Widerstände werden ebenfalls in Leitwerte überführt.

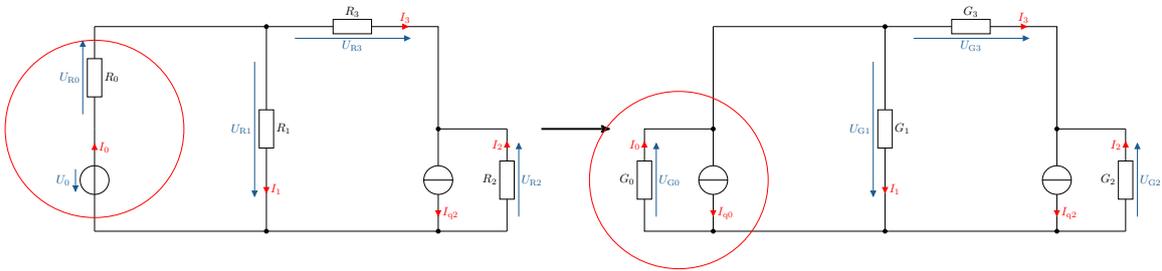


Abbildung 5.25: **Umwandlung des Netzwerkes für das Knotenpotentialverfahren.** Die Spannungsquelle U_0 wird zu der Stromquelle I_{q0} , außerdem werden die Widerstandsangaben R zu Leitwerten G .

Merke: Knotenpotentialverfahren

Beim Knotenpotentialverfahren wird ein elektrisches Netzwerk mit Stromquellen und Leitwerten analysiert.

5.4.2 Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale

Nun müssen die Knoten bestimmt werden. Hierzu legen wir einen Bezugsknoten mit dem Index 0, also K_0 , fest. Weiter werden alle Knoten fortlaufend nummeriert. Das elektrische Netzwerk mit den nummerierten Knoten wird in der Abbildung 5.26 abgebildet. Die eingezeichneten Knoten ohne Komponenten zwischen den nummerierten Knoten weisen das identische Potential auf und bilden somit einen Knoten.

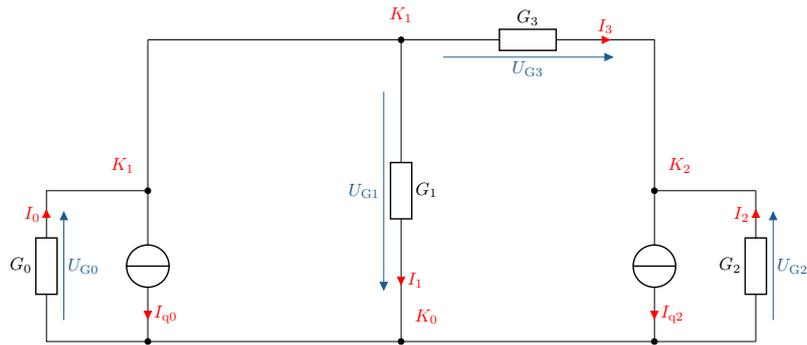


Abbildung 5.26: **Umgewandeltes Netzwerk.** Festlegung des Bezugsknotens K_0 und der fortlaufenden Knoten K_1 und K_2 .

Um die Knotenpotentiale festzulegen, werden alle Potentiale der Knoten K_1 und K_2 auf den Bezugsknoten bezogen. Zur Durchführung des Knotenpotentialverfahrens werden $k - 1$ Gleichungen benötigt. Auf das angegebene Netzwerk bezogen, ergeben sich somit zwei Gleichungen, welche in vektorieller Schreibweise nach Gleichung 5.21 notiert werden. Hier wird das Potential für den Knoten K_1 über die Spannung vom Knoten K_1 zum Bezugsknoten definiert. Daraus ergibt sich die Notation U_{K1-K0} . Selbiges wird für den Knoten K_2 durchgeführt. Hier wird die Spannung U_{K2-K0} definiert.

$$U_K = \begin{bmatrix} U_{K1-K0} \\ U_{K2-K0} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

5.4.3 Zuordnung der Quellströme

Für die festgelegten Knoten, abgesehen vom Bezugsknoten, müssen die abfließenden und zufließende Ströme festgehalten werden. Jede Stromquelle an den Knoten wird notiert. Hier werden zufließende Stromquellen mit einem positiven Vorzeichen und abfließende Stromquellen mit einem negativen Vorzeichen versehen. Aus dem Knoten K_1 fließt der Strom der Stromquelle $-I_{q0}$, dieser Strom wird mit einem negativen Vorzeichen versehen. Aus dem Knoten K_2 fließt der Strom der Stromquelle $-I_{q2}$ heraus, dieser wird ebenfalls mit einem negativen Vorzeichen versehen. Nach Gleichung 5.22 ergibt sich der Vektor für die Quellströme.

$$I_K = \begin{bmatrix} -I_{q0} \\ -I_{q2} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

5.4.4 Leitwertmatrix

Nach der Umwandlung der Widerstandswerte in Leitwerte, wird mit den Leitwerten die Leitwertmatrix erstellt. Hierzu werden wieder die Knoten abgesehen vom Bezugsknoten untersucht. Hierfür wird das vorgestellte elektrische Netzwerk noch einmal in der Abbildung 5.27 mit farbig hervorgehobenen Zweigen gezeigt. Über die Hauptdiagonale werden die Leitwerte der Knoten notiert. Für jeden Knoten werden die Leitwerte der direkt angrenzenden Komponenten aufgeschrieben. Für den Knoten K_1 wären das die an dem blau hervorgehobenen Zweig angrenzenden Leitwerte G_0 , G_1 und G_3 und für den Knoten K_2 die Leitwerte G_2 und G_3 . Abseits der Hauptdiagonalen auf den anderen Elementen der Leitwertmatrix werden die Leitwerte protokolliert, welche direkt zwischen den Knoten liegen. Zwischen den Knoten K_1 und K_2 liegt auf direktem Wege der in grün hervorgehobene Zweig mit dem Leitwert G_3 . Liegen zwischen den betrachteten Knoten weitere Knoten, so sind diese nicht

direkt miteinander verbunden und in das Element der Leitwertmatrix wird eine 0 eingetragen. Die auf diese Weise angefertigte Leitwertmatrix wird in der Gleichung 5.23 veranschaulicht.

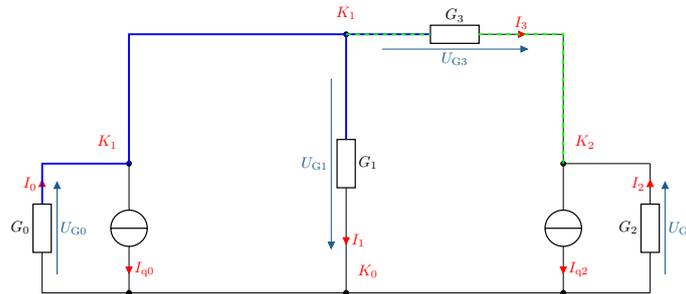


Abbildung 5.27: **Elektrisches Netzwerk mit hervorgehobenen Zweigen.** Erstellung der Leitwertmatrix für das Knotenpotentialverfahren

$$G_K = \begin{bmatrix} G_0 + G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

5.4.5 Gleichungssystem aufstellen

Nachdem der Vektor der Knotenpotentiale, der Vektor der Quellströme und die Leitwertmatrix bestimmt wurden, wird aus diesen Gleichungen das Gleichungssystem des Knotenpotentialverfahrens aufgestellt, welches in der Gleichung 5.4.5 angezeigt wird.

$$\begin{bmatrix} G_0 + G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{K1-K0} \\ U_{K2-K0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{q0} \\ -I_{q2} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

Das Gleichungssystem des Knotenpotentialverfahrens kann anschließend exemplarisch mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren gelöst werden. Durch das Umstellen der Gleichung nach den gesuchten Knotenpotentialen können diese identifiziert werden. Ist so beispielsweise in dem untersuchten Netzwerk die Spannung über den Widerstand R_1 berechnet worden, kann der Strom durch den Widerstand bestimmt werden. Als Alternative zum Gaußschen Eliminationsverfahren wäre noch die Cramersche Regel zu nennen um lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Beispiel 5.3: Knotenpotentialverfahren

Analyse des elektrischen Netzwerkes aus der Abbildung 5.28 mittels des Knotenpotentialverfahrens.

Die folgenden Schritte sollen für das Knotenpotentialverfahren bearbeitet werden:

- Vorbereitung des Netzwerkes
- Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale
- Zuordnung der Quellströme
- Aufstellung der Leitwertmatrix
- Gleichungssystem aufstellen

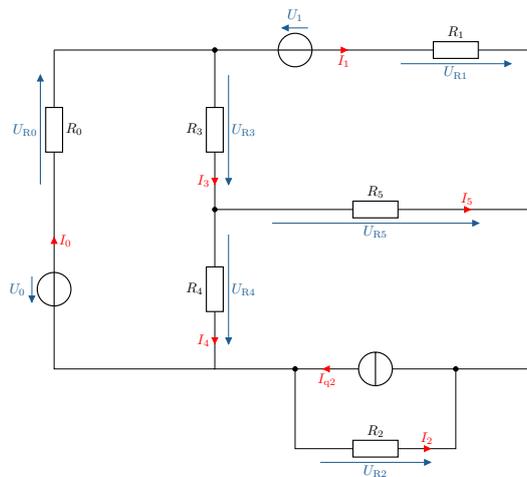
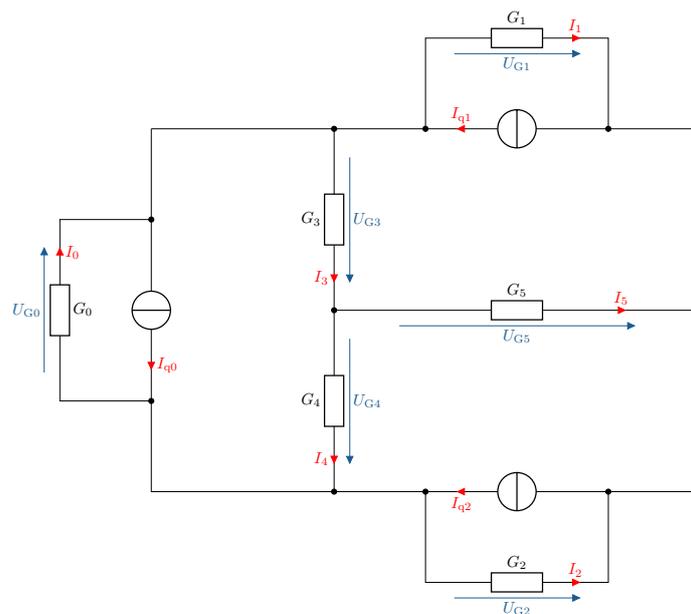
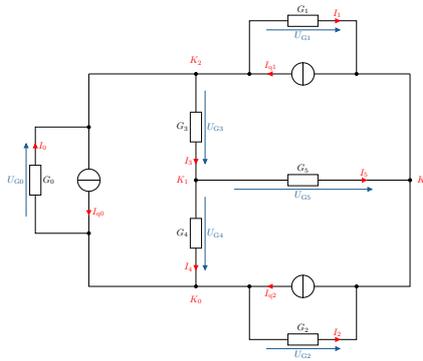


Abbildung 5.28: **Beispiel.** Knotenpotentialverfahren an einem elektrischen Netzwerk.

- Vorbereitung des Netzwerkes:



b) Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale:



$$U_K = \begin{bmatrix} U_{K1-K0} \\ U_{K2-K0} \\ U_{K3-K0} \end{bmatrix}$$

c) Zuordnung der Quellströme:

$$I_K = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{q0} + I_{q1} \\ -I_{q1} - I_{q2} \end{bmatrix}$$

d) Bestimmung der Leitwertmatrix:

$$G_K = \begin{bmatrix} G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 & -G_5 \\ -G_3 & G_0 + G_1 + G_3 & -G_1 \\ -G_5 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_5 \end{bmatrix}$$

e) Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{bmatrix} G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 & -G_5 \\ -G_3 & G_0 + G_1 + G_3 & -G_1 \\ -G_5 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{K1-K0} \\ U_{K2-K0} \\ U_{K3-K0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_{q0} + I_{q1} \\ -I_{q1} - I_{q2} \end{bmatrix}$$

Lernziele: Maschenstromverfahren

Die Studierenden

- kennen die Schritte des Maschenstromverfahrens.
- können mit Hilfe des Maschenstromverfahrens elektrische Netzwerke analysieren.

5.5 Maschenstromverfahren

Neben der Knotenpotentialanalyse zur Untersuchung von elektrischen Netzwerken kann auch das Maschenstromverfahren zur Berechnung herangezogen werden. Beim Maschenstromverfahren wird ein Gleichungssystem aufgestellt, mit welchem die Maschenströme ermittelt werden können. Um das Gleichungssystem des Maschenstromverfahrens aufstellen zu können, müssen einige Vorbereitungen getroffen werden. In den folgenden Schritten soll das elektrische Netzwerk aus der Abbildung 5.29 mittels des Maschenstromverfahrens berechnet werden.

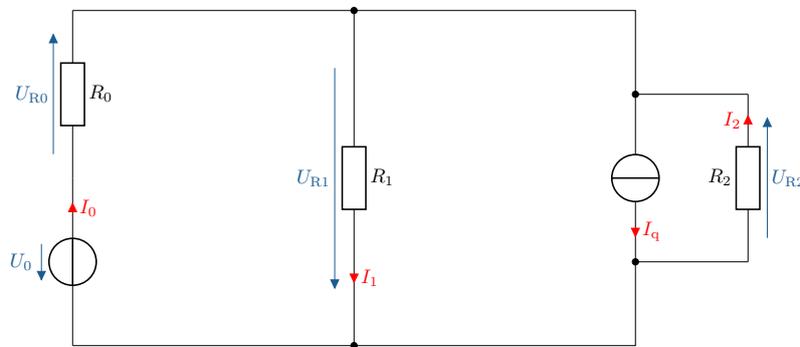


Abbildung 5.29: **Netzwerk für das Maschenstromverfahren.** Elektrisches Netzwerk mit einer Spannungsquelle, einer Stromquelle und drei Widerständen. Anhand des Netzwerkes wird das Maschenstromverfahren erläutert.

5.5.1 Vorbereitung des Netzwerkes

Das Maschenstromverfahren arbeitet mit Spannungsquellen und Widerstandswerten. Hierfür müssen eventuelle Stromquellen in Spannungsquellen transformiert werden. Diese Art der Umwandlung einer Stromquelle in eine Spannungsquelle wird noch einmal in der Abbildung 5.30 dargestellt. Hier wird aus der Stromquelle und dem parallel liegenden Innenwiderstand eine Spannungsquelle mit einem in reihe liegenden Innenwiderstand.

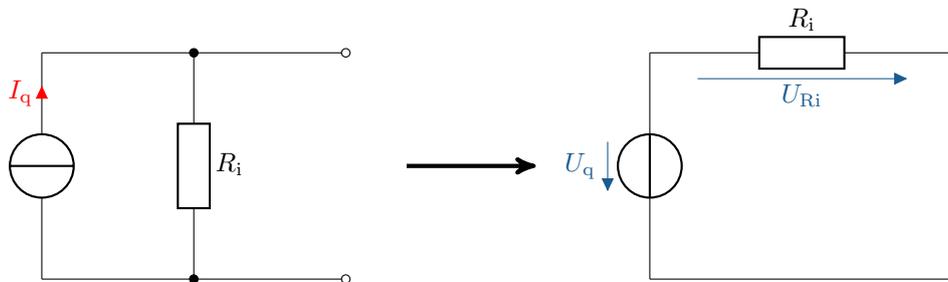


Abbildung 5.30: **Umwandlung einer Stromquelle.** Umwandlung einer Stromquelle mit Parallelwiderstand zur Spannungsquelle mit Serienwiderstand.

Die Gleichung 5.25 zeigt die Berechnung des Spannungswertes der Spannungsquelle aus dem angegebenen Stromwert der Stromquelle und dem Widerstandswert des Innenwiderstands.

$$U_q = R_i \cdot I_q \quad (5.25)$$

Außerdem müssen mögliche Leitwerte von elektrischen Widerständen in Widerstandswerte geändert werden. In der Gleichung 5.26 wird gezeigt, wie der Widerstandswert aus dem Kehrwert des Leitwerts ermittelt wird.

$$R_i = \frac{1}{G_i} \quad (5.26)$$

In der Abbildung 5.31 wird die Umwandlung der Stromquelle des vorgestellten Netzwerkes in eine Spannungsquelle durchgeführt. Aus der Parallelschaltung der Stromquelle und des Widerstandes R_2 wird eine Reihenschaltung bestehend aus der neuen Spannungsquelle und dem Widerstand R_2 .

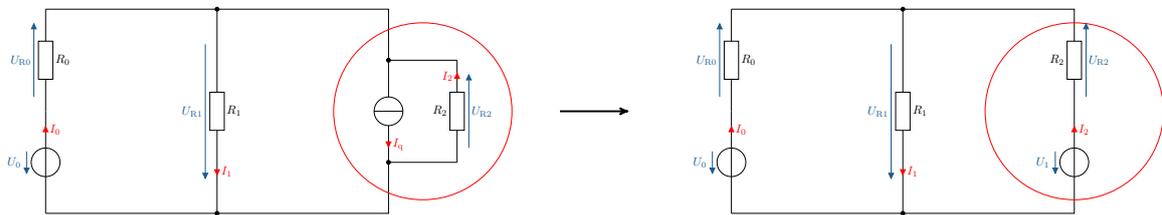


Abbildung 5.31: **Umwandlung einer Stromquelle in einem elektrischen Netzwerk.** Umwandlung der Stromquelle mit Parallelwiderstand des zu berechnenden Netzwerkes in eine Spannungsquelle mit Reihenwiderstand. Die Transformation der Quelle findet im roten Kreis statt.

Merke: Maschenstromverfahren

Für das Maschenstromverfahren werden zur Analyse eines elektrischen Netzwerkes Spannungsquellen und Widerstandswerte benötigt.

5.5.2 Maschen definieren

Für die Maschenstromanalyse müssen die Maschen festgelegt werden. Über den Maschen werden die Maschenströme festgelegt. Außerdem werden den Maschen die Widerstände zugeordnet. In der Abbildung 5.32 wird das vorgestellte Netzwerk mit den eingezeichneten Maschen M_1 und M_2 dargestellt.

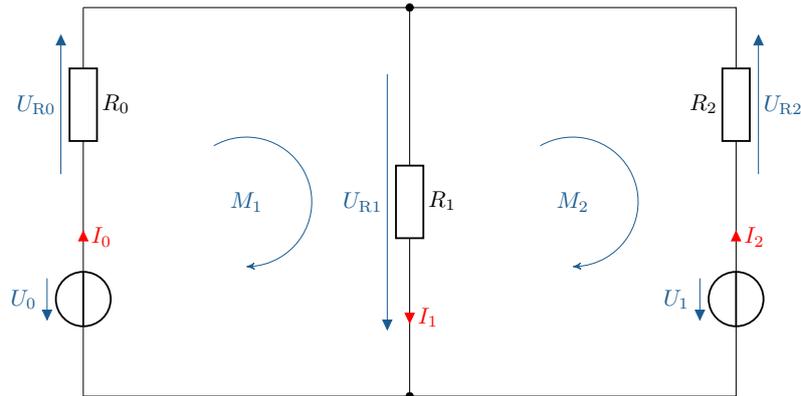


Abbildung 5.32: **Maschen im elektrischen Netzwerk.** Festlegung der Maschen M_1 und M_2 sowie der zugehörigen Maschenströme.

Durch alle Komponenten welche sich an der Masche M_1 befinden, fließt der Maschenstrom I_{M1} . So wie auch alle Komponenten an der Masche M_2 von dem Maschenstrom I_{M2} durchflossen werden. Die beiden Maschenströme I_{M1} und I_{M2} werden vektoriell in der Gleichung 5.27 notiert.

$$I_M = \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

5.5.3 Widerstandsmatrix bestimmen

In der Masche M_1 trifft der Maschenstrom I_{M1} auf die beiden Widerstände R_0 und R_1 . Die Masche M_1 wird in der Abbildung 5.33 in blau dargestellt. Der Maschenstrom I_{M2} der Masche M_2 durchfließt die Widerstände R_1 und R_2 . Der Widerstand R_1 ist somit teil der beiden Maschen M_1 und M_2 und wird von beiden Maschenströmen durchflossen. Wird ein Widerstand von mehreren Maschenströmen durchflossen gilt dieser als Kopplungswiderstand zwischen den Maschen.

In der Widerstandsmatrix nach Gleichung 5.28 werden die Widerstände der Maschen und die Kopplungswiderstände zugeordnet. Hier werden die Umlaufwiderstände aus den Maschen in die Hauptdiagonale eingetragen. Das heißt, dass die Reihenschaltung $R_0 + R_1$ das Element der ersten Spalte und Zeile für die erste Masche wird. Die Reihenschaltung $R_1 + R_2$ wird in das Element der zweiten Spalte und Zeile für die zweite Masche eingetragen. In die übrigen Elemente der Widerstandsmatrix werden die Kopplungswiderstände zwischen den jeweiligen Maschen eingetragen. Der Kopplungswiderstand bekommt ein positives Vorzeichen, wenn beide Maschenströme in die selbe Richtung fließen und ein negatives, wenn diese entgegengesetzt fließen. Die Widerstandsmatrix wird in der Wechselstromtechnik auch als Maschenimpedanzmatrix bezeichnet.

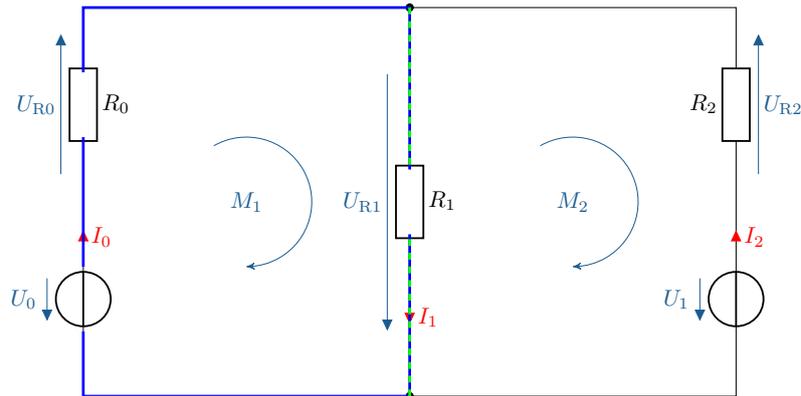


Abbildung 5.33: **Festlegung der Zweige.** Elektrisches Netzwerk mit hervorgehobenen Zweigen zur Erstellung der Widerstandsmatrix für das Maschenstromverfahren

$$R_M = \begin{bmatrix} R_0 + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

5.5.4 Quellenspannungen zuordnen

Den Maschen müssen die Spannungsquellen, die sogenannten Quellenspannungen zugeordnet werden. In der Masche M_1 liegt die Quellenspannung U_0 . Die Masche M_2 weist die Quellenspannung U_1 auf. Bei übereinstimmender Richtung von Spannungspfeil und Maschenrichtung ergibt sich ein negatives Vorzeichen für die Quellenspannungen. Sind die Richtungen von Spannungspfeil und dem Maschenumlauf entgegengesetzt wird das Vorzeichen der Quellenspannung positiv. Für den Fall, dass in einer Masche keine Quelle vorhanden ist, wird eine 0 eingetragen.

$$U_M = \begin{bmatrix} U_0 \\ -U_1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

5.5.5 Gleichungssystem aufstellen

Nach dem ohmschen Gesetz wird die elektrische Spannung als Produkt aus dem elektrischen Widerstand und Strom berechnet. Bei der Maschenstromanalyse werden zur Berechnung des Vektors der Maschenströme I_M die Widerstandsmatrix R_M und der Vektor der Quellenspannungen U_M verwendet. Das Gleichungssystem wird in der Gleichung 5.30 abgebildet.

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ -U_1 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Die gesuchte Größen werden aus den Maschenströmen berechnet. Beispielsweise werden die Ströme I_0 , I_1 und I_2 gesucht. Die Ergebnisse der Maschenströme sind mit den Strömen gleichzusetzen, welche lediglich von einem Maschenstrom durchflossen werden. In dem vorgestellten elektrischen Netzwerk beträgt der Strom der Masche M_1 : $I_{M1} = I_0$ und der Masche M_2 : $I_{M2} = -I_2$. Der Strom durch den Widerstand R_1 lässt sich beispielsweise über die Knotengleichung berechnen: $I_1 = I_0 + I_2$.

Beispiel 5.4: Maschenstromverfahren

Analyse des elektrischen Netzwerk aus der Abbildung 5.34 mittels der Maschenstromanalyse.

Für die Maschenstromanalyse sollen die folgenden Schritte bearbeitet werden:

- Vorbereitung des Netzwerkes
- Maschen und Maschenströme definieren
- Widerstandsmatrix bestimmen
- Quellspannungen zuordnen
- Gleichungssystem aufstellen

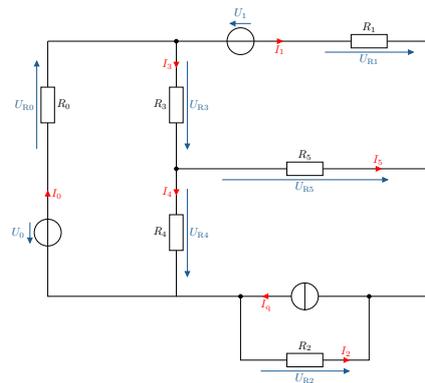
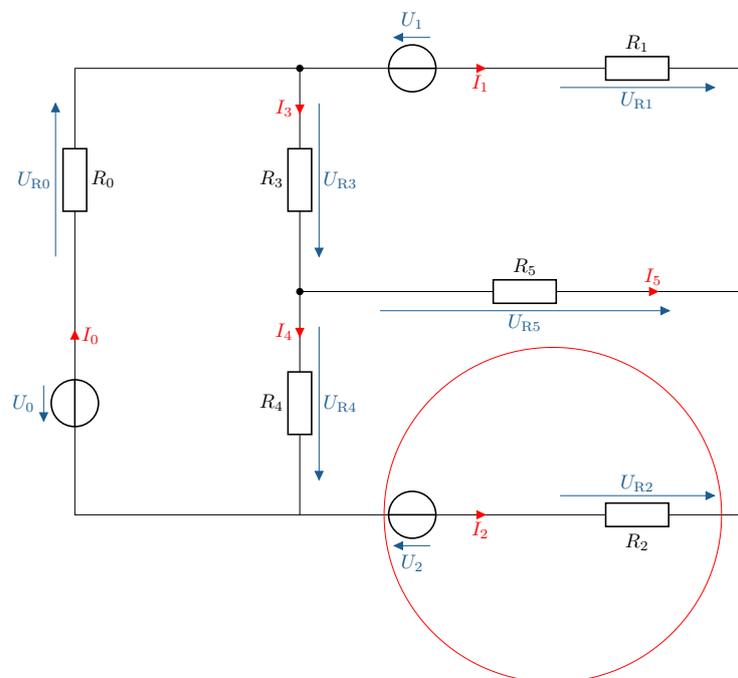
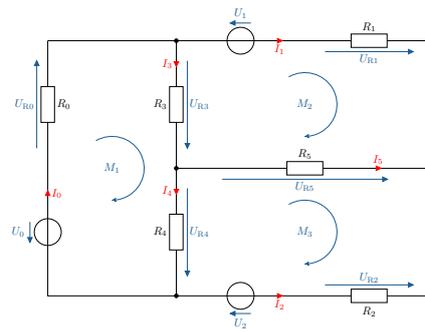


Abbildung 5.34: **Beispiel.** Maschenstromanalyse an einem elektrischen Netzwerk.

- Vorbereitung des Netzwerkes:



- Maschen und Maschenströme definieren:



$$I_M = \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix}$$

c) Widerstandsmatrix bestimmen:

$$R_M = \begin{bmatrix} R_0 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_4 \\ -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 \end{bmatrix}$$

d) Quellspannungen zuordnen:

$$U_M = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix}$$

e) Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_4 \\ -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix}$$

Ströme Berechnen:

$$\begin{aligned} I_3 &= I_0 - I_1 \\ I_4 &= I_3 - I_5 \\ I_0 &= I_4 - I_2 \\ -I_5 &= I_2 + I_1 \end{aligned}$$

Modul 6

Magnetische Größen

6.1 Einleitung

Der Elektromagnetismus bildet die Grundlage vieler Technologien in unserem täglichen Leben. Die Magnetresonanztomographie ermöglicht zum Beispiel präzise Diagnosen und Therapien in der Medizin. Die effiziente Erzeugung, Übertragung und Verteilung von elektrischer Energie wird durch Generatoren und Transformatoren gewährleistet. In der Computertechnik sind magnetische Speicher, wie Festplattenlaufwerke, für die Datenverarbeitung und -speicherung unverzichtbar. Die Grenzen der Anwendungsgebiete sind jedoch noch nicht erreicht. Zukünftige technologische Entwicklungen wie Quantencomputer, drahtlose Energieversorgung und magnetische Levitation werden diese weiter verschieben. Ein fundiertes Verständnis magnetischer Größen ist entscheidend für die Weiterentwicklung und Optimierung existierender sowie zukünftiger Technologien.

Dieses Kapitel bietet eine Einführung in die elektromagnetischen Wirkweisen und die dazugehörigen magnetischen Größen. Zunächst wird das magnetische Feld beschrieben, gefolgt von einer Erklärung relevanter Größen für den magnetischen Kreis wie Durchflutung, magnetischer Fluss und magnetischer Widerstand. Anschließend werden die Funktionsweisen der Lorentzkraft, der Induktion und der Induktivität erläutert, gefolgt von der Berechnung des Energieinhalts im magnetischen Feld. Das Kapitel schließt mit einem Exkurs zum Skin-Effekt und Hall-Effekt.

Lernziele: Magnetische Größen

Die Studierenden

- kennen die grundlegenden magnetischen Größen im magnetischen Kreis.
- verstehen die physikalischen Wirkprinzipien hinter den einzelnen magnetischen Größen.
- können die Wechselwirkungen der magnetischen Größen zueinander beschreiben.
- können die einzelnen Größen im magnetischen Kreis berechnen.

6.1.1 Magnetismus

Der Magnetismus ist ein physikalisches Phänomen, das sich in Form von wechselwirkenden Kräften von magnetisierten bzw. magnetisierbaren Festkörpern und bewegten elektrischen Ladungen äußert. Die Kräfte werden mittels eines Magnetfeldes dargestellt. Zu den geläufigsten Formen des Magne-

tismus werden der Elektromagnetismus und der Magnetismus von Festkörpern gezählt. Der Ferromagnetismus ist die bekannteste und wichtigste Art magnetisierter Festkörper und beschreibt das magnetische Verhalten einiger metallischer Körper, sogenannter ferromagnetischer Werkstoffe. Wie in Abbildung 6.1 ersichtlich, besteht ein ferromagnetisches Material wie Eisen, Cobalt oder Nickel aus vielen kleinen Elementarmagneten in sogenannten Weisschen Bezirken, die durch Blochwände voneinander getrennt sind. In einem unmagnetisierten Körper sind diese Weisschen Bezirke willkürlich angeordnet und somit nicht ausgerichtet. Der Körper ist nach außen nicht (oder nur wenig) magnetisiert, da sich die Magnetisierungsrichtungen der einzelnen Bezirke größtenteils gegenseitig aufheben.

Durch ein starkes externes Magnetfeld (die benötigte Stärke ist temperatur- und materialabhängig) können die ungeordneten Elementarmagnete parallel ausgerichtet werden. Durch die gleiche Ausrichtung der Weisschen Bezirke wird das Material selbst magnetisch.

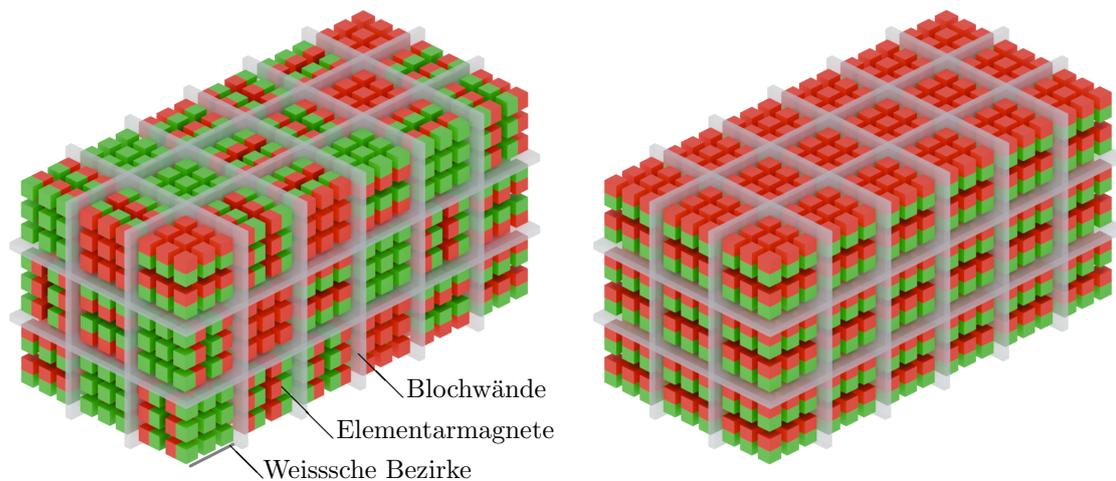


Abbildung 6.1: **Aufbau eines Permanentmagneten.** Links sind die Weisschen Bezirke mit den Elementarmagneten willkürlich ausgerichtet, der Körper ist nicht magnetisiert. Der rechte Körper ist magnetisiert, da dort die Elementarmagnete der Weisschen Bezirke gleichgeordnet ausgerichtet sind.

6.1.2 Magnetisches Feld

Durch die geordnete Ausrichtung der Weisschen Bezirke entsteht ein außerhalb des Körpers messbares Magnetfeld. Magnetfelder sind Vektorfelder, die eine Krafteinwirkung auf magnetische Materialien im Raum ausüben. Die Stärke des Magnetfeldes wird über die Größe der magnetischen Feldstärke \vec{H} beschrieben. Diese vektorielle Größe ordnet dabei jedem Punkt des Raums, auf den das Magnetfeld einwirkt, eine entsprechende Richtung mit einer spezifischen magnetischen Stärke ein. Magnetfelder und die damit verbundene magnetische Feldstärke werden mittels Feldlinien dargestellt. Magnetische Feldlinien besitzen charakteristische Eigenschaften:

- Magnetische Feldlinien sind immer geschlossen (Quellenfrei).
- Außerhalb des Magneten verlaufen sie vom Nord- zum Südpol.
- Sie treten immer senkrecht aus der Magnetoberfläche aus bzw. ein.

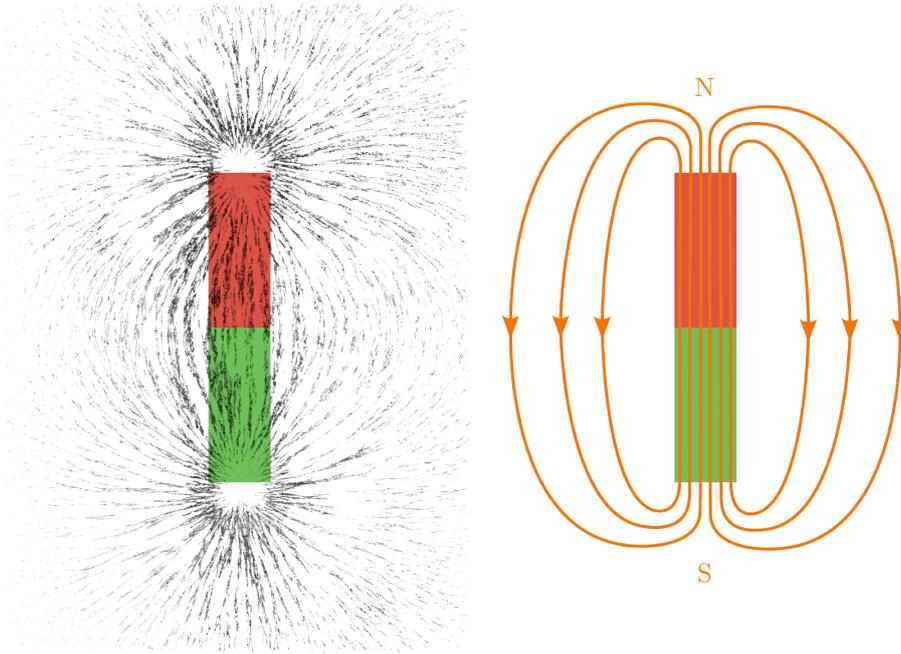


Abbildung 6.2: **Feldlinien eines Permanentmagneten.** Links wurden die Feldlinien mit Hilfe von Metallspänen über einem Magneten visualisiert. Die rechte Grafik stellt die Eigenschaften magnetischer Feldlinien dar: Geschlossenheit, Verlauf außerhalb des Magneten von Nord nach Süd, senkrechter Austritt aus dem Magneten.

Merke: Magnetfeld

Magnetfelder sind Vektorfelder, die an jedem Punkt des Raums, auf den sie einwirken, eine für den Punkt spezifische Richtung mit einer spezifischen Stärke besitzen. Die Stärke und Richtung werden mittels der magnetischen Feldstärke \vec{H} beschrieben.

6.2 Elektromagnetismus

Ein magnetisches Feld kann, außer durch einen Permanentmagneten, auch durch einen elektrischen Strom erzeugt werden. Dabei ergibt sich ein kreisförmiges magnetisches Feld um den stromdurchflossenen Leiter. Die Richtung des Feldes kann mit der „rechten Hand Regel“ ermittelt werden: Bei einer zur Faust geformten Hand mit gestrecktem Daumen zeigt der Daumen in Richtung des (technischen) elektrischen Stromflusses (der „technische Stromfluss“ verläuft vom Plus- zum Minuspol) und die Finger in Richtung des magnetischen Feldlinienverlaufs.

Merke: Rechte Hand Regel

Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung des (technischen) elektrischen Stromflusses, so zeigen die restlichen gebeugten Finger die Verlaufsrichtung der magnetischen Feldlinien an.

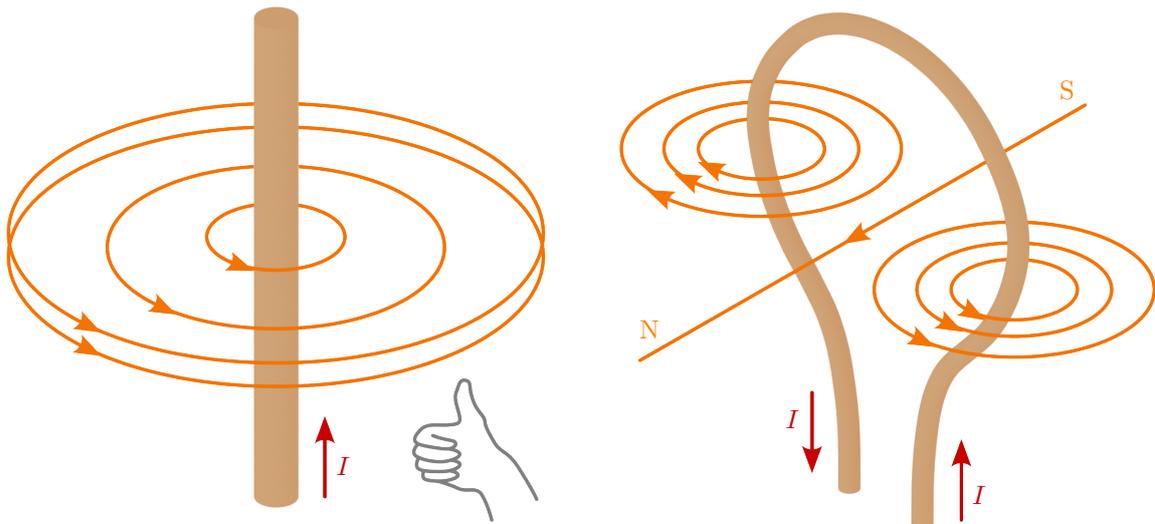


Abbildung 6.3: **Magnetisches Feld um einen stromdurchflossenen Leiter.** Links: Die Richtung des Feldes kann mit der „rechten Hand Regel“ veranschaulicht werden. Rechts: Die Leiterschleife stellt die kleinste Einheit einer Spule dar. Die hier dargestellte mittlere Feldlinie schließt sich in der Unendlichkeit.

6.2.1 Durchflutung

Die durch elektrische Ströme hervorgerufenen Magnetfelder werden mit der Kenngröße der magnetischen Durchflutung Θ (Theta) gemessen. Analog zur elektrischen Spannung wird die Durchflutung auch als magnetische Spannung bezeichnet. Da die Durchflutung aus dem Strom resultiert, hat sie wie der Strom die Einheit Ampere.

Der Name ist auf das Durchflutungsgesetz zurückzuführen. Dieses besagt, dass die magnetische Durchflutung Θ gleich dem Gesamtstrom I einer von ihm durchflossenen Fläche ist (siehe Abbildung 6.4). Die Gleichung 6.1 gibt das Durchflutungsgesetz in der allgemeinen Form wieder. Die rechte Seite bezeichnet das Flächenintegral der Stromdichte \vec{J} . Dieses Integral drückt die Summe des Stromes aus, der durch die Fläche A fließt. Die linke Seite der Gleichung stellt das geschlossene Linienintegral über die magnetische Feldstärke \vec{H} dar. Diese geschlossene Linie $d\vec{s}$ entspricht dabei dem Rand der Fläche A .

$$\Theta = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} d\vec{A} \quad (6.1)$$

Da in den allermeisten Fällen der Strom durch einen Leiter transportiert wird und folglich die Richtung des Stromes als auch die Stromstärke eindeutig bekannt sind, genügt es in diesem Fall, das Integral (wie in der Gleichung 6.2 dargestellt) durch die Anzahl der stromführenden Leiter N multipliziert mit der Stromstärke I zu ersetzen.

$$\Theta = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = N \cdot I \quad [\text{A}] \quad (6.2)$$

Merke: Magnetische Durchflutung

Die magnetische Durchflutung Θ entspricht dem Gesamtstrom einer von ihm durchflossenen Fläche.

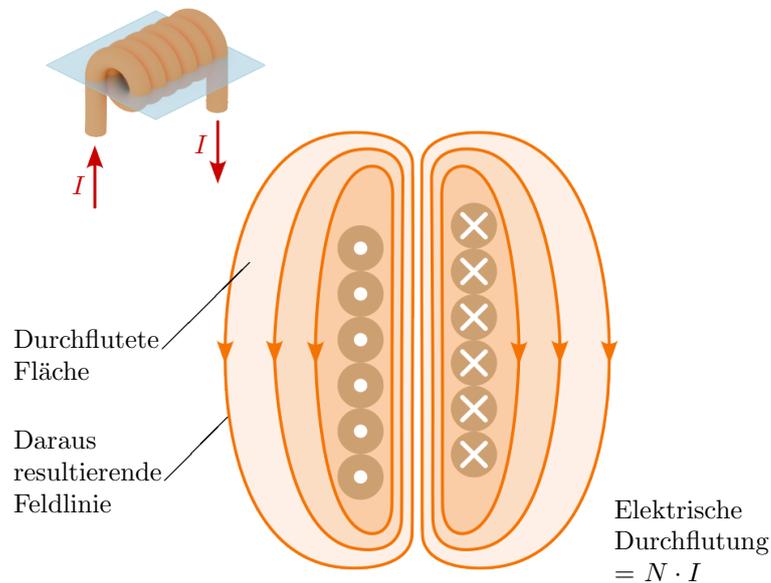


Abbildung 6.4: **Durchflutung einer Spule.** Die Durchflutung entspricht dem Gesamtstrom durch eine durchflossene Fläche. Die elektrische Durchflutung einer Spule ist daher abhängig von der Wicklungszahl und der Stromstärke. Für die Darstellung in einer zweidimensionalen Grafik wird das Symbol \otimes für den Stromfluss „in die Bildfläche hinein“, \odot für „aus der Bildfläche heraus“ verwendet.

Ist die magnetische Feldstärke über dem Integrationsweg $d\vec{s}$ konstant, kann der Vektor \vec{H} vor das Integral gezogen werden. Diese Bedingung ist in der Regel erfüllt, wenn sich die Feldlinie über dem ganzen Integrationsweg im gleichen Material befindet. Ein Beispiel wäre ein kreisförmiges Feld um einen Leiter im Kreismittelpunkt oder eine Ringkernspule, wie in Abbildung 6.5 gezeigt. In dem Fall wird das Integral $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$ zur Länge des Integrationsweges (Gleichung 6.3). Diese Länge wird mittlere Feldlinienlänge genannt und mit ℓ_m bezeichnet. Sie steht für den Mittelwert der Summe aller Feldlinien, die sich innerhalb des kreisförmigen Feldes befinden. Die magnetische Feldstärke kann in solchen Anordnungen einfach mit der Gleichung 6.4 ermittelt werden.

$$\Theta = \oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = |\vec{H}| \cdot \ell_m \quad (6.3)$$

$$|\vec{H}| = \frac{\Theta}{\ell_m} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (6.4)$$

Merke: Berechnungshilfe magnetische Feldstärke

Ist die magnetische Feldstärke über den ganzen Weg konstant, kann sie durch den Quotienten von Durchflutung Θ und Weglänge ℓ_m berechnet werden. Ihre Einheit ist Ampere pro Meter.

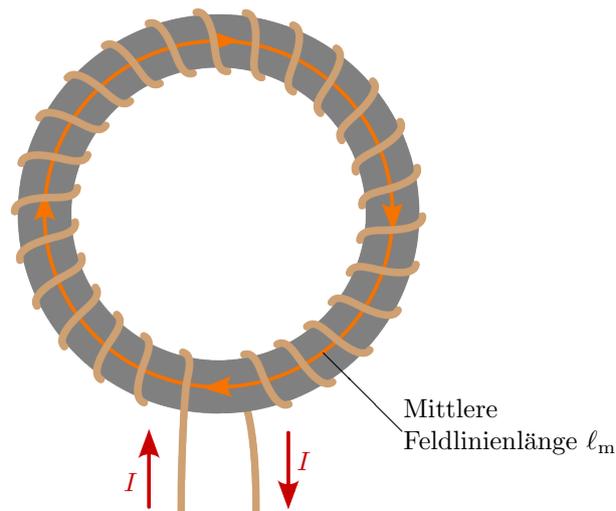


Abbildung 6.5: **Ringkernspule mit mittlerer Feldlinienlänge.** Die mittlere Feldlinienlänge repräsentiert den Mittelwert aller Feldlinien innerhalb der Spule, womit die Feldstärke einfach rechnerisch ermittelt werden kann.

Beispiel 6.1: Magnetische Feldstärke über die mittlere Feldlinienlänge

Eine Ringspule (Abbildung 6.5) mit 1000 Windungen und einer mittleren Feldlinienlänge von 50 cm wird von einer Stromstärke von 100 mA durchflossen. Wie groß ist die magnetische Feldstärke?

$$\Theta = H \cdot \ell_m = N \cdot I$$

$$H = \frac{N \cdot I}{\ell_m} = \frac{1000 \cdot 0,1 \text{ A}}{0,5 \text{ m}} = 200 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Beispiel 6.2: Magnetische Feldstärke über den Kreisumfang

Ein gerader Leiter wird mit einem Strom von $I = 50 \text{ A}$ durchflossen. Wie groß ist die magnetische Feldstärke in einem Abstand von $r = 20 \text{ cm}$?

$$H = \frac{N \cdot I}{\ell_m} = \frac{1 \cdot 50 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,2 \text{ m}} = 39,79 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Die mittlere Feldlinienlänge ℓ_m kann durch den Kreisumfang ermittelt werden und wird deshalb mit der Formel zur Berechnung des Kreisumfangs $2\pi \cdot r$ ersetzt.

6.2.2 Magnetischer Fluss und Flussdichte

Der magnetische Fluss ist analog zum elektrischen Kreis mit dem Strom vergleichbar. Entgegen der Terminologie findet jedoch kein Fluss von magnetischen Teilchen statt, sondern er ist sinnbildlich als „die Menge an Magnetfeld“ zu verstehen und wirkt in Folge der magnetischen Spannung. Das Formelzeichen des magnetischen Flusses ist Φ , die Einheit ist Weber (Wb). Ein Weber (Wb) ist gleichbedeutend mit einer Volt-Sekunde (Vs).

Die Kraftwirkung eines Magneten ist abgesehen vom magnetischen Fluss auch von der durchfluteten Fläche abhängig. Je dichter die Feldlinien konzentriert sind, desto größer ist die magnetische Wirkung. Das wird durch die magnetische Flussdichte B beschrieben, die im einfachsten Fall (nicht gekrümmte Fläche, homogene Flussdichte) durch den Quotienten aus dem magnetischen Fluss Φ und der Fläche A definiert ist. Die Einheit der Flussdichte ist Tesla (T). Die Richtung der Flussdichte \vec{B} ist senkrecht zur Fläche, was durch den Normalenvektor zur Fläche \vec{A} ausgedrückt wird.

$$\vec{B} = \frac{\Phi}{\vec{A}} \quad [\text{T}] \quad (6.5)$$

Im allgemeinen Fall (ohne die oben genannten Einschränkungen) gilt:

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (6.6)$$

Merke: Magnetische Flussdichte

Die magnetische Flussdichte \vec{B} beschreibt die Konzentration des magnetischen Flusses Φ senkrecht auf einer Fläche A .

Sowohl die magnetische Feldstärke als auch die magnetische Flussdichte sind vektorielle Größen. Sie lassen sich daher grafisch durch Feldlinien zeichnen. Der magnetische Fluss Φ ist dagegen eine skalare Größe.

Die magnetische Flussdichte \vec{B} und die magnetische Feldstärke \vec{H} sind über die Permeabilität μ verbunden. Die Permeabilität besteht aus dem Produkt einer materialunabhängigen Kenngröße, der magnetischen Feldkonstanten $\mu_0 = 1,256\,637\,062 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, und einer materialspezifischen Permeabilität μ_r . Die magnetische Feldkonstante beschreibt die Permeabilität im Vakuum und war bis zur Neuordnung der SI-Einheiten im Jahr 2019 mit dem Wert $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ genau definiert. Jetzt ist sie mit einer Messunsicherheit behaftet.

Tabelle 6.1: **Materialabhängige Permeabilität.** Exemplarische Übersicht zur Permeabilitätszahl μ_r unterschiedlicher Materialien:

Material	Permeabilitätszahl μ_r
Wasser	$1 - 9,1 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$1 - 6,4 \cdot 10^{-6}$
Luft	$1 + 4 \cdot 10^{-7}$
Aluminium	$1 - 2,2 \cdot 10^{-5}$
Eisen	300 bis 140000

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (6.7)$$

In einem ferromagnetischen Material verläuft der Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke \vec{H} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} nicht linear. Die Permeabilität geht mit steigender Magnetisierung in Sättigung, sodass die relative Permeabilität μ_r von einem materialabhängigen Anfangswert gegen 1 läuft. Wird das magnetische Feld wieder reduziert (oder auf Null gesetzt), bleibt die Magnetisierung in einem gewissen Maße erhalten (Punkt B_r in Abbildung 6.7). Dieser Vorgang wird Remanenz genannt. Die verbleibende magnetische Flussdichte bei einer magnetischen Feldstärke

von Null ist die Remanenzflussdichte B_r . Um den Stoff wieder komplett zu unmagnetisieren, wird eine umgekehrte magnetische Feldstärke, die Koerzitivfeldstärke H_c , benötigt.

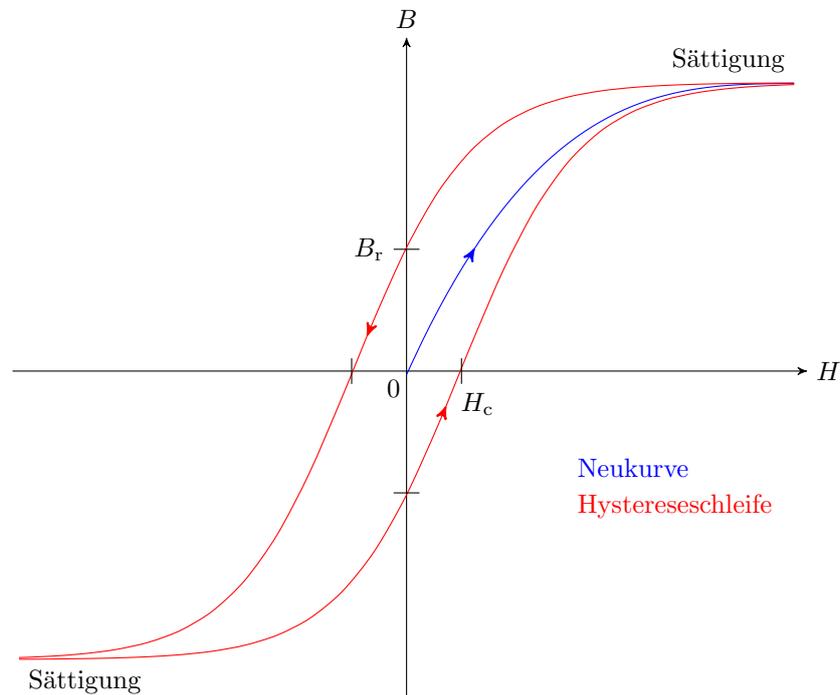


Abbildung 6.6: **Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Materials.** Die magnetische Feldstärke und die magnetische Flussdichte verhalten sich nicht linear zueinander.

Anhand der Koerzitivfeldstärke werden ferromagnetische Materialien in hart- und weichmagnetische Materialien unterschieden. Hartmagnetische Werkstoffe (z. B. starke Dauermagnete aus Neodym-Eisen-Bor) verfügen dabei über einen Wert für H_c größer als $10 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}$, bei weichmagnetischen Werkstoffen (z. B. Magnetkerne aus Mangan-Zink-Ferrit) liegt H_c bei kleiner als $500 \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Hartmagnetische Werkstoffe werden hauptsächlich für Permanentmagnete eingesetzt.

Beispiel 6.3: Magnetische Flussdichte

Im Inneren einer dicht gewickelten Ringspule soll die magnetische Feldstärke $H = 100 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ erzeugt werden. Die Spule hat einen mittleren Radius von 5 cm.

1. Berechnen Sie die erforderliche Stromstärke I wenn die Spule mit $N = 200$ Wicklungen versehen ist.

Aus Gleichung 6.2 und 6.3:

$$\Theta = H \cdot \ell_m = N \cdot I$$

$$I = \frac{H \cdot \ell_m}{N} = \frac{100 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{200} = 157,08 \text{ mA}$$

2. Wie groß wird die Flussdichte B im Falle einer Luftspule ($\mu_r = 1$) oder einer eisengefüllten Spule ($\mu_r = 2000$ im Arbeitspunkt)?

Aus Gleichung 6.10:

$$\begin{aligned} B_{\text{Luft}} &= \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 100 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 125,6 \mu\text{T} \\ B_{\text{Eisen}} &= 2000 \cdot B_{\text{Luft}} = 251,2 \text{ mT} \end{aligned}$$

6.3 Magnetischer Fluss und Flussdichte

Der magnetische Fluss ist analog zum elektrischen Kreis mit dem Strom vergleichbar. Entgegen der Terminologie findet jedoch kein Fluss von magnetischen Teilchen statt, sondern er ist sinnbildlich als „die Menge an Magnetfeld“ zu verstehen und wirkt in Folge der magnetischen Spannung. Das Formelzeichen des magnetischen Flusses ist Φ , die Einheit ist Weber (Wb). Ein Weber (Wb) ist gleichbedeutend mit einer Volt-Sekunde (Vs).

Die Kraftwirkung eines Magneten ist abgesehen vom magnetischen Fluss auch von der durchfluteten Fläche abhängig. Je dichter die Feldlinien konzentriert sind, desto größer ist die magnetische Wirkung. Das wird durch die magnetische Flussdichte B beschrieben, die im einfachsten Fall (nicht gekrümmte Fläche, homogene Flussdichte) durch den Quotienten aus dem magnetischen Fluss Φ und der Fläche A definiert ist. Die Einheit der Flussdichte ist Tesla (T). Die Richtung der Flussdichte \vec{B} ist senkrecht zur Fläche, was durch den Normalenvektor zur Fläche \vec{A} ausgedrückt wird.

$$\vec{B} = \frac{\Phi}{\vec{A}} \quad [\text{T}] \quad (6.8)$$

Im allgemeinen Fall (ohne die oben genannten Einschränkungen) gilt:

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (6.9)$$



Merke: Magnetische Flussdichte

Die magnetische Flussdichte \vec{B} beschreibt die Konzentration des magnetischen Flusses Φ senkrecht auf einer Fläche A .

Sowohl die magnetische Feldstärke als auch die magnetische Flussdichte sind vektorielle Größen. Sie lassen sich daher grafisch durch Feldlinien zeichnen. Der magnetische Fluss Φ ist dagegen eine skalare Größe.

Die magnetische Flussdichte \vec{B} und die magnetische Feldstärke \vec{H} sind über die Permeabilität μ verbunden. Die Permeabilität besteht aus dem Produkt einer materialunabhängigen Kenngröße, der magnetischen Feldkonstanten $\mu_0 = 1,256\,637\,062 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$, und einer materialspezifischen Permeabilität μ_r . Die magnetische Feldkonstante beschreibt die Permeabilität im Vakuum und war bis zur Neuordnung der SI-Einheiten im Jahr 2019 mit dem Wert $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ genau definiert. Jetzt ist sie mit einer Messunsicherheit behaftet.

Tabelle 6.2: **Materialabhängige Permeabilität.** Exemplarische Übersicht zur Permeabilitätszahl μ_r unterschiedlicher Materialien:

Material	Permeabilitätszahl μ_r
Wasser	$1 - 9,1 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$1 - 6,4 \cdot 10^{-6}$
Luft	$1 + 4 \cdot 10^{-7}$
Aluminium	$1 - 2,2 \cdot 10^{-5}$
Eisen	300 bis 140000

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \quad (6.10)$$

In einem ferromagnetischen Material verläuft der Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke \vec{H} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} nicht linear. Die Permeabilität geht mit steigender Magnetisierung in Sättigung, sodass die relative Permeabilität μ_r von einem materialabhängigen Anfangswert gegen 1 läuft. Wird das magnetische Feld wieder reduziert (oder auf Null gesetzt), bleibt die Magnetisierung in einem gewissen Maße erhalten (Punkt B_r in Abbildung 6.7). Dieser Vorgang wird Remanenz genannt. Die verbleibende magnetische Flussdichte bei einer magnetischen Feldstärke von Null ist die Remanenzflussdichte B_r . Um den Stoff wieder komplett zu unmagnetisieren, wird eine umgekehrte magnetische Feldstärke, die Koerzitivfeldstärke H_c , benötigt.

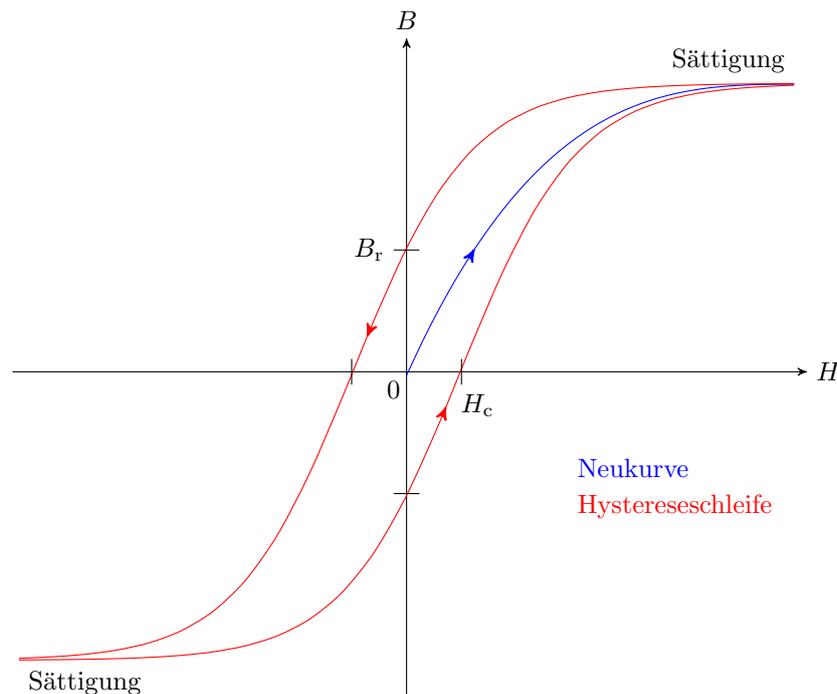


Abbildung 6.7: **Magnetisierungskurve eines ferromagnetischen Materials.** Die magnetische Feldstärke und die magnetische Flussdichte verhalten sich nicht linear zueinander.

Anhand der Koerzitivfeldstärke werden ferromagnetische Materialien in hart- und weichmagnetische Materialien unterschieden. Hartmagnetische Werkstoffe (z. B. starke Dauermagnete aus Neodym-Eisen-Bor) verfügen dabei über einen Wert für H_c größer als $10 \cdot 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}$, bei weichmagnetischen Werkstoffen (z. B. Magnetkerne aus Mangan-Zink-Ferrit) liegt H_c bei kleiner als $500 \frac{\text{A}}{\text{m}}$. Hartmagnetische Werkstoffe werden hauptsächlich für Permanentmagnete eingesetzt.

Beispiel 6.4: Magnetische Flussdichte

Im Inneren einer dicht gewickelten Ringspule soll die magnetische Feldstärke $H = 100 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ erzeugt werden. Die Spule hat einen mittleren Radius von 5 cm.

1. Berechnen Sie die erforderliche Stromstärke I wenn die Spule mit $N = 200$ Wicklungen versehen ist.

Aus Gleichung 6.2 und 6.3:

$$\Theta = H \cdot \ell_m = N \cdot I$$

$$I = \frac{H \cdot \ell_m}{N} = \frac{100 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{200} = 157,08 \text{ mA}$$

2. Wie groß wird die Flussdichte B im Falle einer Luftspule ($\mu_r = 1$) oder einer eisengefüllten Spule ($\mu_r = 2000$ im Arbeitspunkt)?

Aus Gleichung 6.10:

$$B_{\text{Luft}} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 100 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 125,6 \mu\text{T}$$

$$B_{\text{Eisen}} = 2000 \cdot B_{\text{Luft}} = 251,2 \text{ mT}$$

6.4 Der magnetische Widerstand

Im Kapitel 6.2.1 wurde bereits die magnetische Spannung thematisiert, die auch Durchflutung genannt wird, sowie im Kapitel 6.3 der magnetische Fluss, der das Äquivalent zum elektrischen Strom darstellt. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass es in einem magnetischen Kreis äquivalent zum ohmschen Widerstand auch einen magnetischen Widerstand gibt. Er hat das Formelzeichen R_m und die Einheit $\frac{\text{A}}{\text{Vs}}$ und wird auch Reluktanz genannt.

Ein Beispiel für einen magnetischen Kreis ist in Abbildung 6.8 durch einen einfachen Eisenring mit einer einseitigen Spule dargestellt. Die Spule erzeugt eine Durchflutung Θ analog zur elektrischen Spannung. Der Eisenkreis besteht aus vier Teilwiderständen, da der magnetische Widerstand sowohl von der Länge als auch von dem durchflossenen Querschnitt abhängig ist. Die vier Widerstände werden vom magnetischen Fluss Φ durchströmt.

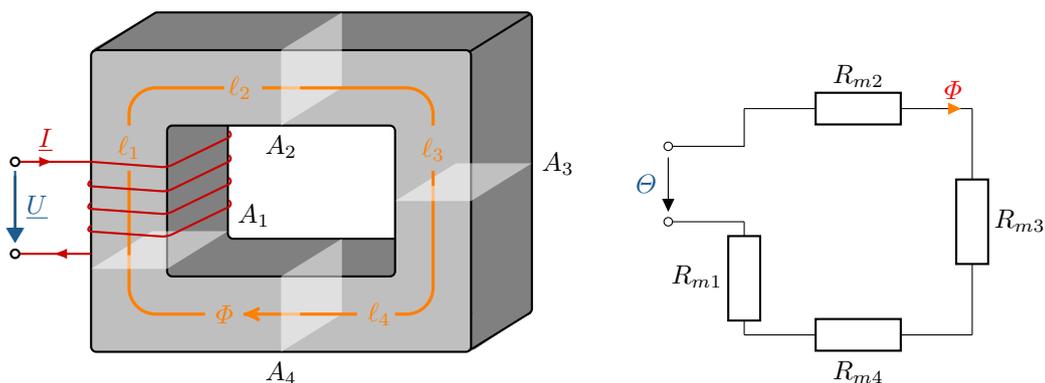


Abbildung 6.8: **Magnetischer Kreis mit einem Eisenring.** Die vier magnetischen Teilwiderstände sind abhängig von der Länge, vom Material und dem Querschnitt des durchflossenen Eisenrings.

In einfachen Anordnungen (wie beispielsweise in Abbildung 6.8 zu sehen) kann unter Vernachlässigung der Ecken der Widerstand durch die Gleichung 6.11 ausgedrückt werden. ℓ_m ist wie bei der magneti-

schen Feldstärke die mittlere Feldlinienlänge des Widerstandes innerhalb des magnetischen Kreises. Zur Ermittlung der mittleren Feldlinienlänge ℓ_m werden die Längen aller Seiten addiert. A ist die Querschnittsfläche, die vom magnetischen Fluss durchflossen wird. μ ist die Permeabilität des Materials. Der magnetische Widerstand R_m berechnet sich nun aus der aufsummierten Länge der mittleren Feldlinienlänge ℓ_m geteilt durch das Produkt der durchflossenen Querschnittsfläche A und der Permeabilität $\mu_r \cdot \mu_0$.

$$R_m = \frac{\ell_m}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} \quad \left[\frac{\text{A}}{\text{V} \cdot \text{s}} \right] \quad (6.11)$$

Merke: Magnetischer Widerstand

Für die Berechnung des magnetischen Widerstands R_m wird die mittlere Feldlinienlänge ℓ_m durch das Produkt aus der Permeabilität des Materials $\mu_r \cdot \mu_0$ und der Querschnittsfläche A geteilt. Bei unterschiedlicher Materialbeschaffenheit oder unterschiedlicher Querschnittsflächen innerhalb des magnetisierten Körpers werden zunächst die Teilwiderstände errechnet und anschließend zum Gesamtwiderstand aufsummiert.

6.4.1 Der magnetische Kreis

Werden nun alle bekannten magnetischen Größen in ihrer Zusammenwirkung betrachtet, ergibt sich die magnetische Analogie zum Ohmschen Gesetz. Sie beschreibt, dass die magnetische Spannung Θ dem Produkt aus dem magnetischen Widerstand R_m und dem magnetischen Fluss Φ entspricht.

$$\Theta = R_m \cdot \Phi \quad (6.12)$$

Merke: Zusammenhänge der magnetischen Feldgrößen

Die magnetische Feldstärke H im Spezialfall einer Ringkernspule errechnet sich aus dem Produkt der Windungszahl N und dem Stromfluss I , geteilt durch die mittlere Feldlinienlänge ℓ_m .

$$H = \frac{N \cdot I}{\ell_m}$$

Die magnetische Flussdichte B wird durch Multiplikation der magnetischen Feldstärke H mit der Permeabilität $\mu_r \cdot \mu_0$ bestimmt.

$$B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H$$

Der magnetische Fluss Φ ergibt sich aus dem Integral der magnetischen Flussdichte B über einer Fläche A .

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

6.5 Lorentzkraft

Befindet sich in einem Magnetfeld ein Leiter, der mit Strom durchflossen wird, wirkt auf ihn eine Kraft, die senkrecht zum Leiter und dem Magnetfeld steht. Diese Kraft wird Lorentzkraft genannt. Verläuft der Leiter senkrecht zu den magnetischen Feldlinien, ist die Kraft am größten.

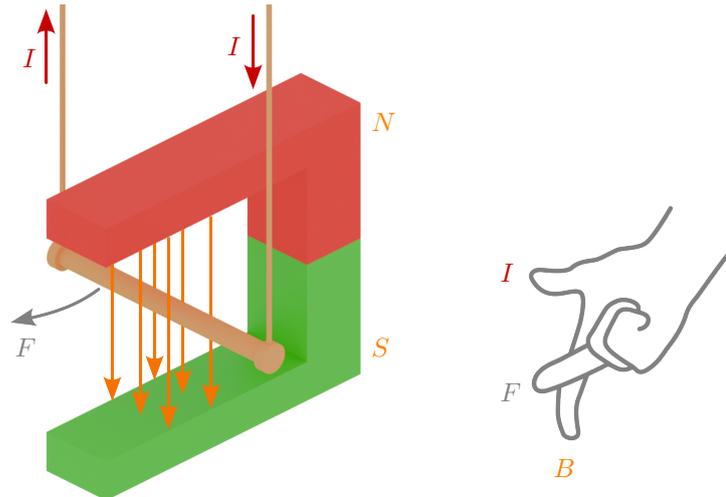
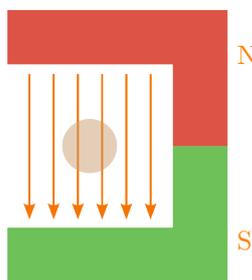
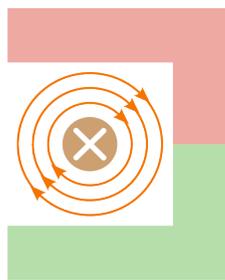


Abbildung 6.9: **Versuchsaufbau zur Lorentzkraft.** Ablenkung eines freischwingenden stromdurchflossenen Leiters im Feld eines Permanentmagneten, wodurch sich der Leiter in die Richtung der Kraft bewegt. Die Richtung kann mit der Drei-Finger-Regel der rechten Hand bestimmt werden. Der Daumen orientiert sich dabei an der Richtung des Stromflusses, der Zeigefinger an der Richtung der magnetischen Feldlinien. Der Mittelfinger zeigt dann in die Richtung, in die die Kraft wirkt.

Schrittweise Erklärung zum in Abbildung 6.9 gezeigten Versuchsaufbau mit einem stromdurchflossenen Leiter im Feld eines Permanentmagneten:



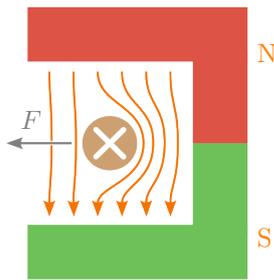
+



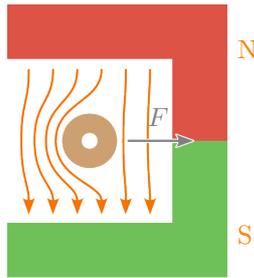
↓

- Ein Leiter befindet sich zwischen den Polen eines Hufeisenmagneten.
- Der Leiter ist hier nicht stromdurchflossen, sodass das Feld des Permanentmagneten einzeln betrachtet werden kann.
- Die Magnetfeldlinien verlaufen außerhalb des Permanentmagneten vom Nord- zum Südpol und schließen sich innerhalb des Magneten.

- Nun wird der Leiter stromdurchflossen betrachtet, ohne das Feld des Permanentmagneten zu berücksichtigen.
- Um den stromdurchflossenen Leiter entsteht ein magnetisches Feld in Abhängigkeit der Flussrichtung des Stroms (Rechte-Hand-Regel).



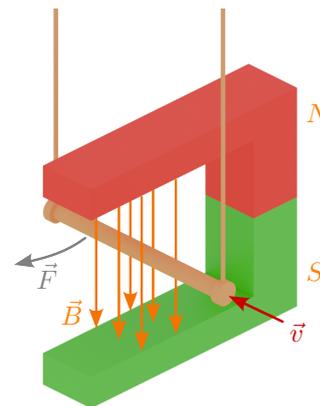
- Das Feld des Permanentmagneten und das magnetische Feld des stromdurchflossenen Leiters werden nun zusammen betrachtet.
- Beide Felder überlagern sich, sodass auf der Rechten Seite eine Feldverstärkung und links eine Feldschwächung auftritt.
- Das System versucht diese Feldverzerrung auszugleichen, wodurch eine Kraft auf den Leiter wirkt, die senkrecht zum Leiter und dem Magnetfeld steht (Drei-Finger-Regel).
- Der Leiter bewegt sich in die Richtung, in die die Kraft wirkt.



- Hier wird die Flussrichtung des stromdurchflossenen Leiters umgekehrt.
- Die Lorentzkraft wirkt entsprechend in die umgekehrte Richtung (Drei-Finger-Regel).
- Der Leiter bewegt sich in die Richtung, in die die Kraft wirkt.

Zur Berechnung der Lorentzkraft kann die vektorielle oder die skalare Darstellung genutzt werden. Bei der vektoriellen Berechnung (Gleichung 6.13) bewirkt eine bewegte Einheitsladung q mit der Geschwindigkeit \vec{v} im Magnetfeld \vec{B} die Kraft \vec{F} :

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.13)$$



Bei der skalaren Berechnung entfallen die Vektoren, stattdessen wird der Winkel $\sin \alpha$ im Bezug auf die Geschwindigkeit v und das Magnetfeld B in die Rechnung einbezogen. Dabei gilt, dass die Lorentzkraft sowohl zu der Flussdichte, als auch auf der Geschwindigkeit der Ladung senkrecht steht. Der Betrag der Kraft ergibt sich bei geraden Leitern und konstantem Magnetfeld zu:

$$F = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha \quad (6.14)$$

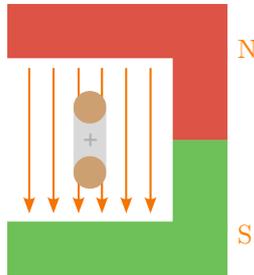
$$F = I \cdot \ell \cdot N \cdot B \cdot \sin \alpha \quad (6.15)$$

Die Gleichung 6.15 illustriert die skalare Berechnung in einem stromdurchflossenen Leiter. ℓ ist die wirksame Leiterlänge mit der Anzahl von N parallelen Leitern, die mit dem Strom I durchflossen werden. α ist der Winkel zwischen dem Leiter und der Richtung der magnetischen Flussdichte \vec{B} . Stehen Leiter und Magnetfeld senkrecht zueinander, entfällt $\sin \alpha$.

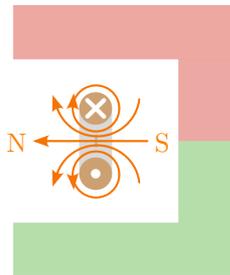
Merke: Lorentzkraft

Die Lorentzkraft beschreibt die Kraft, die auf eine bewegte Ladung in einem Magnetfeld wirkt. Fließt die Ladung durch einen Leiter, so wirkt die Lorentzkraft senkrecht sowohl zum Stromfluss als auch zur magnetischen Flussdichte.

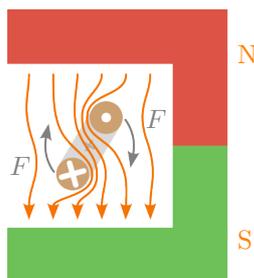
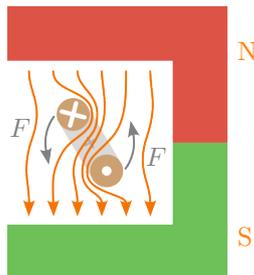
Zur Veranschaulichung des Prinzips eines Elektromotors wird eine stromdurchflossene Leiterschleife, die beweglich auf einem drehbar gelagerten Rotor befestigt ist, im Feld eines Permanentmagneten betrachtet:



+



↓



- Eine Leiterschleife befindet sich auf einem drehbaren Element, dem Rotor, im Magnetfeld eines Hufeisenmagneten.
- Der Leiter ist hier noch nicht stromdurchflossen, sodass das Feld des Permanentmagneten einzeln betrachtet werden kann.
- Die Magnetfeldlinien verlaufen außerhalb des Permanentmagneten vom Nord- zum Südpol.

- Nun wird die Leiterschleife stromdurchflossen betrachtet, ohne das Feld des Permanentmagneten zu berücksichtigen.
- Um die stromdurchflossene Leiterschleife entsteht ein magnetisches Feld in Abhängigkeit der Flussrichtung des Stroms (Rechte-Hand-Regel).

- Das Feld des Permanentmagneten und das magnetische Feld der stromdurchflossenen Leiterschleife werden nun zusammen betrachtet.
- Die Lorentzkraft, die je Leiter senkrecht zum Leiter und dem Magnetfeld steht, wirkt auf die Leiterschleife.
- Die Leiterschleife beginnt sich aufgrund der Lorentzkraft zu drehen.

- Hier wird die Flussrichtung des stromdurchflossenen Leiters umgekehrt.
- Entsprechend kehrt sich auch die Polung der stromdurchflossenen Leiterschleife und damit die Drehrichtung der Leiterschleife um (Drei-Finger-Regel).

Beispiel 6.5: Lorentzkraft

Ein Gleichstrommotor hat im Luftspalt eine magnetische Flussdichte von $B = 0,8 \text{ T}$. Unter den Polen befinden sich insgesamt $N = 400$ Wicklungen, die mit einem Strom von $I = 10 \text{ A}$ durchflossen werden. Die wirksame Leiterlänge ist $\ell = 150 \text{ mm}$.

Berechnen Sie die Kraft F am Umfang des Ankers.

$$\begin{aligned}
 F &= B \cdot I \cdot \ell \cdot N \\
 &= 0,8 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 10 \text{ A} \cdot 0,15 \text{ m} \cdot 400 \\
 &= 480 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{A} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \cdot \text{A} \cdot \text{m}^2} = 480 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Zwei parallele Leiter, die von Strom durchflossen werden, üben ebenfalls eine Lorentzkraft aufeinander aus, da jeder stromdurchflossene Leiter um sich herum ein Magnetfeld aufbaut (siehe Abbildung 6.10). Ist die Stromrichtung in beiden Leitern gleich, entsteht eine Anziehungskraft, bei umgekehrter Stromrichtung wirkt die Kraft abstoßend.

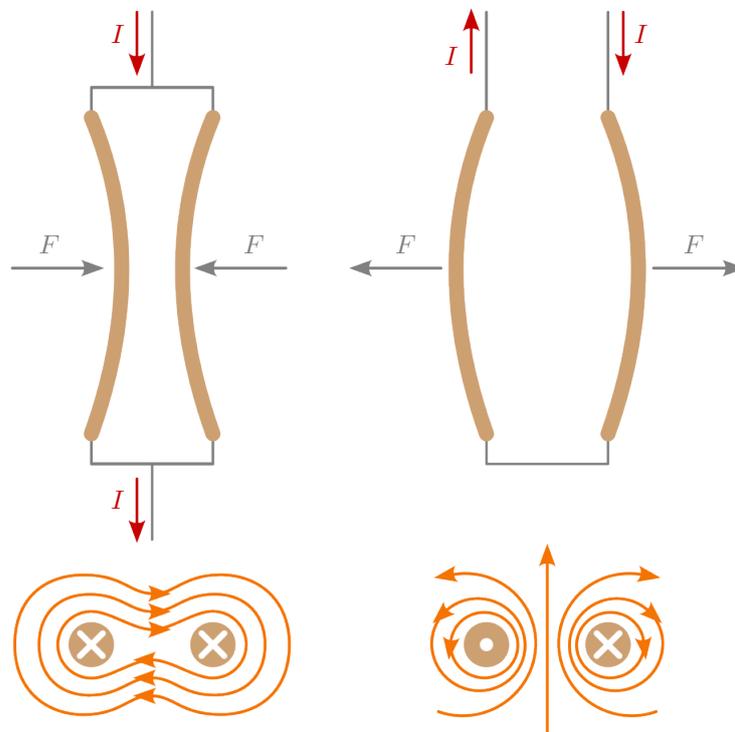


Abbildung 6.10: **Lorentzkraft zwischen zwei parallelen Leitern.** Ist die Flussrichtung des Stroms gleich, ziehen sie sich an. Bei gegensätzlicher Flussrichtung stoßen sich die Leiter ab.

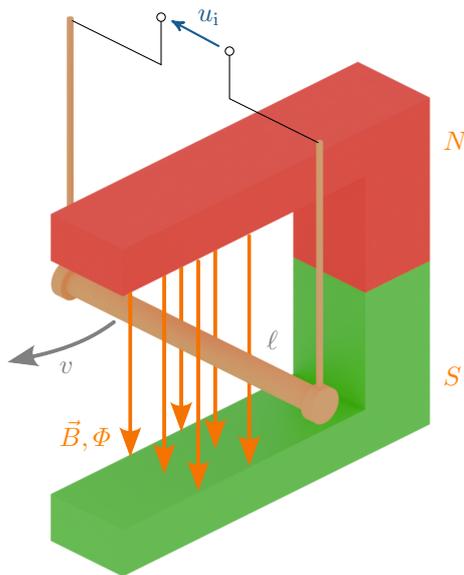
Für den theoretischen Spezialfall zweier geraden, parallelen, dünnen und unendlich langen Drähte gilt das Verhältnis:

$$F_{1,2} = \frac{\ell \cdot \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (6.16)$$

Da in der Praxis diese speziellen Voraussetzungen nicht zutreffen, dient die Formel lediglich als Näherung an reale Fälle, um die Krafteinwirkung der Lorentzkraft abschätzen zu können.

6.6 Induktion

Die Induktion beschreibt das Entstehen einer elektrischen Spannung in einem Leiter durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses. Die Änderung des magnetischen Flusses lässt sich auf verschiedene Weisen hervorrufen. In Abbildung ?? wird die Induktion anhand eines sich bewegenden Leiters in einem magnetischen Feld dargestellt. Wie im vorangegangenen Beispiel (Abbildung 6.9) wird auch hier ein Leiter vom Magnetfeld eines Permanentmagneten durchsetzt, jedoch mit dem Unterschied, dass diesmal kein Strom durch den Leiter fließt. Stattdessen sind die Enden des Leiters an ein Spannungsmessgerät angeschlossen. Wird nun der Leiter mit einer äußeren Kraft bewegt, wirkt die Lorentzkraft auf die Elektronen im Leiter. Durch die Bewegung entsteht eine Ladungstrennung im Leiter. Diese Ladungstrennung wird Induktionsspannung genannt. Solange der Leiter oder das induzierende Magnetfeld in Bewegung ist, kann eine Spannung am Messgerät abgelesen werden.



Vereinfacht lässt sich die induzierte Spannung mittels der Gleichung 6.17 berechnen. Die Höhe der induzierten Spannung u_i hängt von der magnetischen Flussdichte B , der Länge des Leiters im Magnetfeld ℓ , der Geschwindigkeit der Bewegung oder Flussänderung v und der Anzahl der Leiter im Magnetfeld N ab. Da diese Spannung zeitveränderlich ist, wird das Formelzeichen u_i klein geschrieben.

$$u_i = B \cdot \ell \cdot v \cdot N \quad (6.17)$$

Allgemein gilt, dass die induzierte Spannung u_i die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses $d\Phi/dt$ multipliziert mit der Anzahl der Leiter N ist. Dies spiegelt sich im allgemeinen Induktionsgesetz (Gleichung 11.4) wider. Das negative Vorzeichen ist auf die Lenzsche Regel zurückzuführen. Diese besagt, dass Ursache und Wirkung sich immer entgegengesetzt verhalten.

$$u_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.18)$$

Merke: Induktion

Die Induktion ist die elektrische Spannung u_i , die durch eine Änderung des magnetischen Flusses $d\Phi/dt$ entsteht.

6.7 Induktivität

Die Induktivität beschreibt die Fähigkeit, elektrische Energie in einem magnetischen Feld zu speichern. Bauelemente, die diese Fähigkeit besitzen, werden Spule (Abbildung 6.11), Drossel oder auch Induktivität genannt.

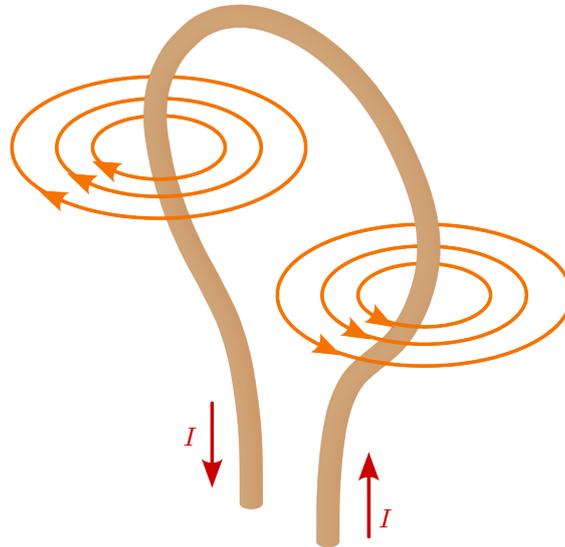


Abbildung 6.11: **Elektromagnetisches einer Induktivität.** Die Induktivität beschreibt, in welchem Maße sich ein Magnetfeld um eine stromdurchflossene Leiterschleife aufbaut.

Die Funktionsweise einer Induktivität beruht auf dem elektromagnetischen Feld, das durch den Stromfluss erzeugt wird. Dieses elektromagnetische Feld induziert einen Strom in benachbarten Leiterspulen des Bauelements. Durch diesen Effekt kann elektrische Energie vorübergehend in einem magnetischen Feld gespeichert werden. Zum besseren Verständnis wird im Folgenden die Funktion der Induktivität schrittweise erklärt. Eine Leiterschleife wird von Strom durchflossen. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld, dessen Stärke proportional zur Stromstärke ist – je stärker der Strom, desto stärker das Magnetfeld. Wird die Stromstärke kontinuierlich geändert, erzeugt dies ebenso eine Änderung des Magnetfeldes, welche wiederum (wie in Kapitel 6.6 beschrieben) eine Spannung in benachbarten Leiterschleifen induziert. Diese induzierte Spannung wirkt gemäß der Lenzschen Regel der Änderung des Stroms entgegen. Folglich wirkt beim Einschalten der Stromquelle an der Spule die induzierte Spannung dem Stromfluss entgegen, sodass der Strom erst allmählich ansteigt. Beim Ausschalten der Spule bewirkt die induzierte Spannung, dass der Strom noch eine Zeit lang nachfließt. Diese Gegebenheit, auch Selbstinduktion genannt, ermöglicht eine magnetische Speicherung. Die Induktivität gibt folglich an, wie stark sich ein elektrisches Bauteil selbstinduziert. Die Höhe der Induktivität L hängt ab von der Anzahl der Windung N , der Permeabilität des Spulenkerns μ_r , der Querschnittsfläche des Kerns und der geometrischen Form des Bauteils. Für Induktivitäten gilt im Allgemeinen, dass das magnetische Feld sich proportional zum Wert des Stroms verhält.

Rechnerisch lässt sich die Induktivität L mit der Einheit Henry (H) auf zwei unterschiedliche Weisen ermitteln. Zum einen kann sie mittels der Relation des entstehenden Magnetfelds $N \cdot \Phi$ zu dem verursachenden Strom I (wie in Gleichung 6.19) berechnet werden.

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} \quad [\text{H}] \quad (6.19)$$

Zum anderen kann die Induktivität bei einfachen geometrischen Strukturen, wie zum Beispiel zylindrische, rechteckige oder Ringerspulen, über die Relation der Windungen N^2 zu dem magnetischen

Widerstand R_m bestimmt werden (Gleichung 6.20).

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad [\text{H}] \quad (6.20)$$



Abbildung 6.12: **Foto einer Ringkernspule.** Die ringförmige Bauweise bringt die Besonderheit mit sich, dass sich der magnetische Fluss vor allem innerhalb des Kerns bewegt, wodurch magnetische Störfelder reduziert werden.

Merke: Induktivität

Die Induktivität L beschreibt ein Bauelement, das in der Lage ist, elektrische Energie in einem magnetischen Feld zu speichern.

Die Berechnung der Spannung einer Induktivität lässt von der Berechnung der Spannung einer Induktion ableiten (Gleichung 11.4).

$$u_i = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (11.4)$$

Die Spannung einer Induktivität u ist eine zeitliche Änderung des Stromes di/dt multipliziert mit der Induktivität L . Auch hier findet die Lenzsche Regel Anwendung, welche ein negatives Vorzeichen zur Folge hat.

$$u = -L \cdot \frac{di}{dt} \quad (6.21)$$

In Schaltplänen werden Induktivitäten mittels schwarz gefüllter Rechtecke, wie in der oberen der beiden Abbildungen 6.13 dargestellt. Seltener wird ein gewindeter Leiter, wie in der unteren Abbildung 6.13 für die Darstellungen einer Induktivität genutzt.

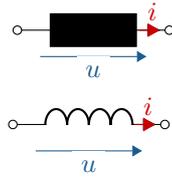


Abbildung 6.13: Schaltzeichen der Induktivität

Um die Induktivität einer Struktur zu bestimmen, gibt es zwei Möglichkeiten: Den Weg der Ermittlung über die Feldgrößen und den Weg über den magnetischen Widerstand.

Weg 1 über die Feldgrößen:

1. Annahme einer Stromstärke $I \rightarrow$ Durchflutung
 $\Theta = N \cdot I$
2. Feldstärke berechnen
 $H = \frac{\Theta}{\ell_m}$
3. Flussdichte berechnen
 $B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot H$
4. Magnetischen Fluss bestimmen
 $\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$
5. Induktivität
 $L = \frac{N \cdot \Phi}{I}$

Weg 2 über den magnetischen Widerstand:

1. Magnetkreis in Teilabschnitte zerlegen und magnetischen Widerstand R_m berechnen
 $R_m = \frac{\ell_m}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A}$
2. Gesamtwiderstand berechnen (bei Reihenstruktur)
 $R_{m,ges} = \sum R_m$
3. Induktivität
 $L = \frac{N^2}{R_{m,ges}}$

Beispiel 6.6: Induktivität

Bei einer Ringkernspule mit Luftspalt soll der Einfluss des Luftspaltes d auf die Induktivität L untersucht werden. Die Spule hat $N = 100$ Windungen. Die relative Permeabilität beträgt $\mu_r = 2000$. Die mittlere Eisenkernlänge beträgt $\ell_m = 5$ cm. Die Querschnittsfläche beträgt $A = 1$ cm².

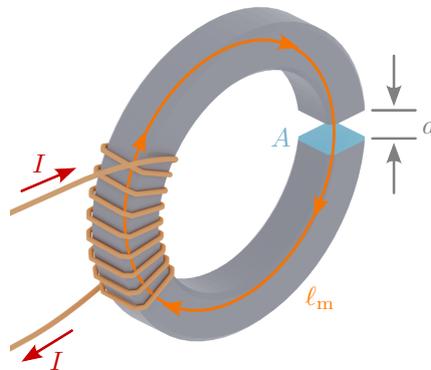


Abbildung 6.14: Ringkernspule mit Luftspalt.

- Der Luftspalt ist vorerst nicht vorhanden: $d = 0$. Wie groß ist die Induktivität L ?

$$\begin{aligned}
 R_m &= \frac{\ell_m}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} \\
 L &= \frac{N^2}{R_m} \\
 &= \frac{100^2 \cdot 2000 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{0,05 \text{ m}} \\
 L &= 0,05 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 50 \text{ mH}
 \end{aligned}$$

- Der Luftspalt beträgt nun $d = 1 \text{ mm}$. Wie groß ist die Induktivität?

$$\begin{aligned}
 R_m &= R_{m,\text{Fe}} + R_{m,\text{L}} \\
 L &= \frac{\ell_m - d}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} + \frac{d}{\mu_0 \cdot A} \\
 L &= \frac{0,05 \text{ m} - 0,001 \text{ m}}{2000 \cdot 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} + \frac{0,001 \text{ m}}{1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \\
 L &= 1,226 \text{ mH}
 \end{aligned}$$

6.8 Energie im magnetischen Feld

Um die Energie, die in einer Spule gespeichert ist, zu berechnen, wird die in der Abbildung 6.15 illustrierte Ringkernspule an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Spannungsquelle eingeschaltet. Die Spannung an der Spule ist dadurch zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ gleich der Quellenspannung U . Der durch die Spule geleitete Strom wird nach Gleichung 6.21 linear ansteigen. Die dadurch zugeführte Energie erzeugt eine Flussdichte im Spulenkern. Um die Energie zu berechnen, die der Spule zugeführt wird, kann bekannte Gleichung der elektrischen Leistung 6.22 umgeformt werden und anschließend die Spannung durch Gleichung 6.21 ersetzt werden. Als Ergebnis dieser Umformung erhält die Änderung der magnetischen Energie dW_L , welche aus der Multiplikation von Induktivität L , dem Strom durch die Induktivität i_L und der Änderungsrate des Stroms durch die Induktivität di_L errechnet (siehe Gleichung 6.23).

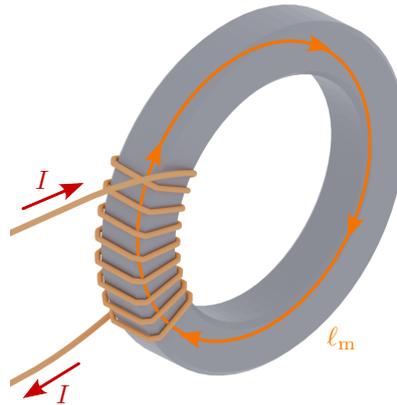


Abbildung 6.15: Geschlossene Ringkernspule.

$$p = \frac{dW}{dt} = u \cdot i \quad (6.22)$$

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (6.21)$$

$$dW_m = u_L \cdot i_L \cdot dt = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i_L \cdot dt = L \cdot i_L \cdot di_L \quad (6.23)$$

Die Gesamtenergie ist das Integral über dW_m vom Anfangswert $i_L = 0$ bis zum statischen Endwert $i_L = I$. Unter der Voraussetzung einer konstanten Induktivität L gilt dann:

$$W_m = L \cdot \int_0^{I_L} i_L \cdot di_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \Phi \cdot I \quad (6.24)$$

Die magnetische Energie kann auch aus den Feldgrößen durch Integration mit der magnetischen Flussdichte errechnet werden:

$$W_m = \ell_m \cdot A \cdot \int_0^{B_L} H dB = \ell_m \cdot A \cdot \frac{B_L^2}{2 \cdot \mu_r \cdot \mu_0} \quad (6.25)$$

Bei einem Elektromagneten hat die Energiedichte im Luftspalt (also die Energie pro Volumen des Luftspalts) eine besondere Bedeutung: Sie steht für die „Kraft des Elektromagneten“. Die maximale Kraftwirkung befindet sich genau am Übergang vom Luftspalt zum Eisenkern – entspricht also einem theoretisch unendlich schmalen Luftspalt. Da der Luftspalt, wie der Name schon sagt, meistens mit Luft gefüllt ist, ist im Normalfall $\mu_r = 1$ und kann weggelassen werden.

$$\frac{W_m}{V} = \frac{B_L^2}{2 \cdot \mu_0} = \frac{F}{A} \quad (6.26)$$

6.9 Skin-Effekt

Der Skin-Effekt beschreibt das Phänomen, dass sich die Stromübertragung eines mit Wechselstrom durchflossenen Leiters vom Kern zu dessen äußerem Rand verlagert. Dieser Effekt basiert auf dem Prinzip der Induktion und tritt daher ausschließlich bei der Wechselstromübertragung auf.

Der Wechselstrom verursacht stetig sich ändernde magnetische Felder. Diese magnetischen Felder wirken gemäß der Lenz'schen Regel der Ursache entgegen und sind im Leiterinneren stärker ausgeprägt als in den Randbereichen. Es kommt zu einer elektrischen Feldschwächung im Leiterinneren, sodass die Stromübertragung an den Rand des Leiters stattfindet. Wie weit der Wechselstrom in den Leiter eindringt, wird mit der Skin-Tiefe δ (Delta) beschrieben. Dabei gilt, dass mit steigender Frequenz die Feldschwächung im Kern zunimmt. Die Tabelle 6.3 veranschaulicht die Auswirkungen des Skin-Effekts am Beispiel einer Kupferleitung. Während bei einer Frequenz von 5 Hz die Skin-Tiefe 29,7 mm beträgt, so schrumpft diese bei einer Frequenz von 500 Hz auf 2,97 mm.

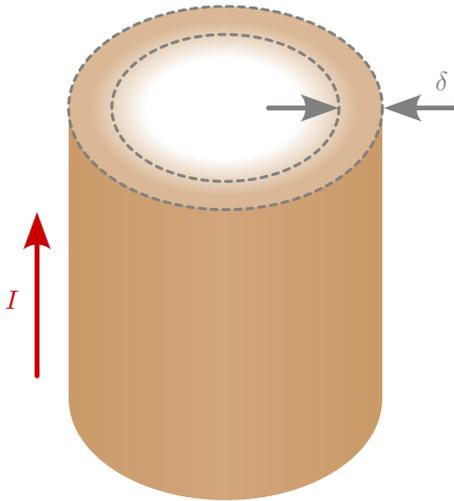


Tabelle 6.3: **Exemplarische Übersicht zur Skin-Tiefe.** Eindringtiefe in eine Kupferleitung in Abhängigkeit der Frequenz:

Frequenz	Skin-Tiefe δ_{Cu}
5 Hz	29,7 mm
50 Hz	9,38 mm
500 Hz	2,97 mm
500 kHz	93,8 μm

Abbildung 6.16: **Skin-Effekt.** Die Skin-Tiefe δ beschreibt, wie tief der Wechselstrom in den Leiter eindringt.

Zur Berechnung des Skin-Effekts wird die Skin-Tiefe δ ermittelt. Die Skin-Tiefe wird durch die Wurzel des spezifischen Widerstands ρ_R geteilt durch das Produkt der Frequenz f , der Zahl Pi π und der materialabhängigen magnetischen Permeabilität μ errechnet (siehe Gleichung 6.27).

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho_R}{\pi \cdot \mu \cdot f}} \quad (6.27)$$

Merke: Skin-Effekt

Der Skin-Effekt verursacht die Verdrängung von Wechselstrom an den Rand des Leiters.

Beispiel 6.7: Skin-Tiefe

Ein Kupferleiter wird mit Strom der Frequenz $f = 50 \text{ Hz}$ durchflossen. Für den Leiter sind folgende Werte gegeben:

- Absolute magnetische Permeabilität: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
- Spezifischer Widerstand: $\rho_R = 0,01721 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

Berechnen Sie die Skin-Tiefe δ des Leiters.

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho_R}{\pi \cdot \mu \cdot f}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{0,01721 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}}{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 50 \text{ Hz}}}$$

$$\delta \approx 9,34 \text{ mm}$$

6.10 Hall-Effekt

Der Hall-Effekt beschreibt das Auftreten einer elektrischen Spannung innerhalb eines stromdurchflossenen Leiters aufgrund der Ladungsverschiebung durch ein magnetisches Feld.

In der Abbildung 6.17 wird der Leiter, ähnlich wie im Versuchsaufbau zur Lorentzkraft, von einem magnetischen Feld durchflossen. Der Leiter ist hier allerdings plattenförmig dargestellt, so dass sich die Ladungsträger über die gesamte Leiterfläche bewegen können. Wird nun der Leiter mit Strom durchflossen, wirkt auf die bewegten Ladungen die Lorentzkraft. Diese verursacht gemäß der Rechten-Hand-Regel eine senkrechte Ablenkung der Ladungsträger im Leiter zum Rand. Durch die Ladungsverschiebung entsteht im Leiter ein elektrisches Feld, welches der Lorentzkraft entgegengerichtet ist. An den Rändern des Leiters kann die aus der Ladungsverschiebung resultierende Spannungsdifferenz gemessen werden. Sie wird als Hall-Spannung U_H bezeichnet.

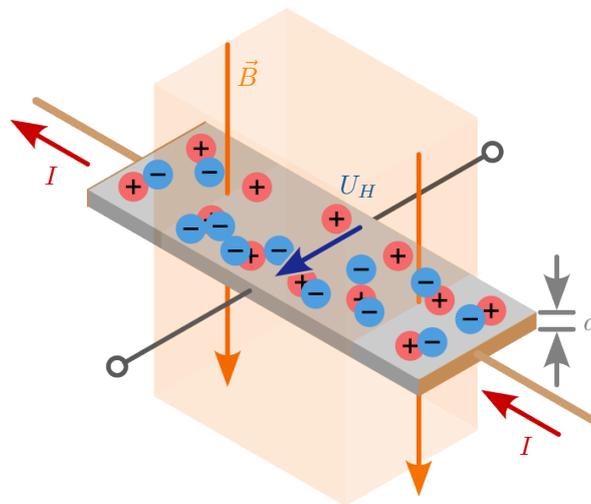


Abbildung 6.17: **Versuchsaufbau zum Hall-Effekt.** Die durch das Magnetfeld entstehende Lorentzkraft lenkt die bewegten Ladungsträger senkrecht an den Rand ab. Diese Ladungsverschiebung erzeugt eine elektrisch messbare Spannung – die Hall-Spannung.

Zur Ermittlung der Hall-Spannung U_H wird die Hall-Konstante A_H benötigt. Die Hall-Konstante A_H ist eine Materialgröße, die Aufschluss über die Ladungsträgerdichte und damit über die Leitfähigkeit des Materials gibt.

Die Hall-Spannung kann (wie in Gleichung 6.28 dargestellt) durch die Multiplikation der Hall-Konstante A_H mit dem Produkt der Stromstärke I und der magnetischen Flussdichte B dividiert

durch die Dicke des stromdurchflossenen Plättchens d errechnet werden.

$$U_H = A_H \cdot \frac{I \cdot B}{d} \quad (6.28)$$

Merke: Hall-Effekt

Die Hall-Spannung U_H beschreibt das Auftreten einer elektrischen Spannung innerhalb des stromdurchflossenen Leiters senkrecht zum Stromfluss aufgrund eines einwirkenden Magnetfeldes.

Beispiel 6.8: Hall-Spannung

Ein mit der Stromstärke $I = 2 \text{ A}$ stromdurchflossenes Metallplättchen mit der Dicke $d = 1 \text{ cm}$ befindet sich in einem Magnetfeld mit der Flussdichte $B = 0,5 \text{ T}$. Die Hall-Konstante des Materials beträgt $A_H = 3,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$. Berechnen Sie die Hall-Spannung.

$$\begin{aligned} U_H &= A_H \cdot \frac{I \cdot B}{d} \\ U_H &= 3,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{C}} \cdot \frac{2 \text{ A} \cdot 0,5 \text{ T}}{0,01 \text{ m}} \\ U_H &= 0,32 \text{ V} \end{aligned}$$

Modul 7

Periodische Größen

7.1 Einleitung

In den vorangegangenen Modulen wurden die grundsätzlichen physikalischen Gegebenheiten und die Grundbauteile besprochen. Außerdem wurden die grundlegenden technischen Verhaltensweisen in Gleichstromnetzwerken geklärt. Bei den Gleichstromnetzwerken werden die elektrischen Netzwerke mit einem DC-Strom (Direct Current) versorgt, Wechselstromnetzwerke mit einem AC-Strom (Alternating Current). Der DC-Strom fließt dauerhaft in eine Richtung. Beim AC-Strom wechselt die Stromrichtung regelmäßig seine Richtung. Die Regelmäßigkeit des Wechsels der Stromrichtung des Wechselstromes erfolgt periodisch nach einer bestimmten Frequenz. Beispielsweise ist der ideale elektrische Widerstand als Bauteil nicht frequenzabhängig. Zusätzlich Bauteile, wie der Kondensator oder eine Spule, weisen bei unterschiedlichen Frequenzen verschiedene komplexe Widerstände auf. Um diese periodischen Größen zu bestimmen werden die folgenden Themengebiete besprochen:

- Zeigerdiagramm
- Komplexe Wechselstromrechnung
- Effektivwert
- Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung
- Drehstrom
- Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem

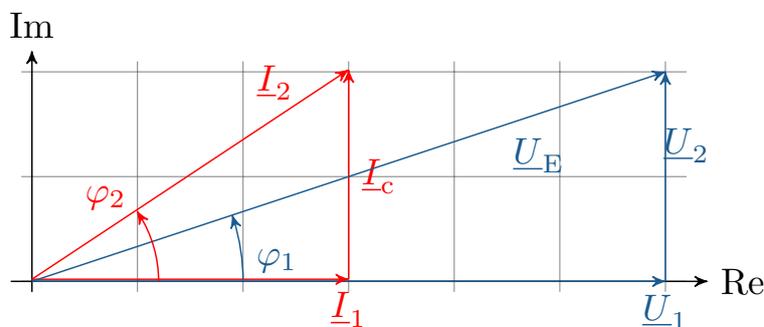


Abbildung 7.1: **Zeigerdiagramm.** Die Größen Spannung und Strom in der Darstellung als Zeiger.

7.2 Grundlagen Komplexe Zahlen

Die in der Wechselstromtechnik genutzten Zeigerdiagramme geben einen schnellen Überblick über die Größe und die Ausrichtung der Spannung und des Stromes. Die zugrunde liegenden Begriffe der komplexen Zahlenebene und der Aufbau von Zeigerdiagrammen wird folgend weiter Erläutert und an einem Beispiel erklärt.

Lernziele: Komplexe Zahlen

Die Studierenden können

- mit Zahlen in der komplexen Ebene umgehen.
- Zeigerdiagramme von komplexen Zahlen darstellen.
- komplexe Zahlen berechnen.

7.2.1 Komplexe Zahlenebene

Um den Aufbau von Zeigerdiagrammen zu überblicken ist ein grundlegendes Verständnis über die komplexe Zahlenebene nötig. Für die elementaren Rechenoperationen reichen die natürlichen Zahlen mit Null und die rationalen Zahlen aus. Die rationalen Zahlen können als endliche oder periodische Dezimalzahlen dargestellt werden. Die irrationalen Zahlen lassen sich hingegen als Dezimalzahlen darstellen, welche unendliche viele Stellen aufweisen und dabei nicht periodisch sind. Die reellen Zahlen setzen sich aus den rationalen Zahlen und den irrationalen Zahlen zusammen. Allerdings ist beispielsweise das Wurzelziehen aus einer negativen Zahl in der reellen Zahlenebene nicht möglich. Hierfür wird die komplexe Zahlenebene eingeführt. In der komplexen Zahlenebene wird der Raum der reellen Zahlen um die imaginäre Einheit j erweitert. So ergibt in der komplexen Zahlenebene das Wurzelziehen aus -1 die imaginäre Einheit j .

$$j = \sqrt{-1} \quad (7.1)$$

Das Quadrieren der imaginären Einheit ergibt wiederum -1 .

$$j^2 = -1 \quad (7.2)$$

Eine komplexe Zahl \underline{Z} beschreibt einen Ort in der komplexen Ebene. Um in einem zweidimensionalen Koordinatensystem einen Ort eindeutig festzulegen werden zwei Koordinaten benötigt. Die beiden Koordinaten zur Beschreibung einer komplexen Zahl \underline{Z} werden in der komplexen Ebene als Realteil und Imaginärteil beschrieben (vgl. Gleichung 7.3). Komplexe Zahlen werden meist durch einen Unterstrich gekennzeichnet, wobei der Realteil und der Imaginärteil reelle Zahlen darstellen.

$$\underline{Z} = \text{Realteil} + j \cdot \text{Imaginärteil} \quad (7.3)$$

$$\underline{Z} = \text{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \text{Im}(\underline{Z}) \quad (7.4)$$

In der komplexen Ebene wird der Realteil auf die Abszisse und der Imaginärteil auf die Ordinate aufgetragen. Es werden die Abkürzungen $\text{Re} = \text{Realteil}$ und $\text{Im} = \text{Imaginärteil}$ verwendet. Das Koordinatensystem einer komplexen Ebene wird in der Abbildung 7.2 erläutert. Der Ort der komplexen Zahl kann durch Richtungspfeile, welche auch als Vektoren oder Zeiger bezeichnet werden, dargestellt

werden. Die Darstellung der komplexen Zahl in kartesischen Koordinaten erfolgt durch die Zerlegung in Realteil der komplexen Zahl $\operatorname{Re}(\underline{Z})$ und Imaginärteil der komplexen Zahl $\operatorname{Im}(\underline{Z})$ kombiniert mit der imaginären Einheit j . Komplexe Zahlen können auch in Polar-Koordinaten dargestellt werden. Dies erfolgt durch den Betrag $|\underline{Z}|$ der komplexen Zahl \underline{Z} und durch den Winkel φ , den der Zeiger der komplexen Zahl mit der reellen Achse einschließt.

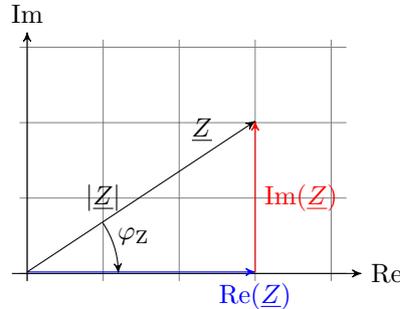


Abbildung 7.2: **Zeigerdiagramm einer komplexen Zahl.** Eine komplexe Zahl \underline{Z} , welche sich durch $\operatorname{Re}(\underline{Z})$ und $\operatorname{Im}(\underline{Z})$ in kartesischen Koordinaten und durch den Betrag der komplexen Zahl $|\underline{Z}|$ sowie den zugehörigen Winkel φ in Polar-Koordinaten darstellen lässt.

Die beiden Darstellungsformen lassen sich ineinander transformieren. Behilflich ist hier die Euler'sche Formel. Die Euler'sche Formel zeigt, dass sich der Ordinatenwert und der Abszissenwert des Einheitskreises durch die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus berechnen lassen. Die Euler'sche Formel wird in der Gleichung 7.5 dargestellt.

$$e^{j \cdot x} = \cos(x) + j \cdot \sin(x) \quad (7.5)$$

Unter Verwendung der Euler'schen Formel können durch die Hinzunahme des Betrages der komplexen Zahl die Polar-Koordinaten in kartesische Koordinaten transformiert werden. Dies wird durch die Gleichung 7.6 erläutert.

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot \cos(\varphi) + j \cdot |\underline{Z}| \cdot \sin(\varphi) = \operatorname{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z}) \quad (7.6)$$

Über den Satz des Pythagoras lässt sich aus den bekannten Realteil und Imaginärteil der Betrag der komplexen Zahl für die Polar-Koordinaten bestimmen. Der dazugehörige Winkel ergibt sich aus dem arctan mit dem Verhältnis aus Imaginärteil zu Realteil im Argument. Mit diesen Informationen kann eine komplexe Zahl wie in der Gleichung 7.7 in Polar-Koordinaten transformiert werden.

$$\underline{Z} = \sqrt{(\operatorname{Re}(\underline{Z}))^2 + (\operatorname{Im}(\underline{Z}))^2} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})}\right)} = |\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \varphi} \quad (7.7)$$

Merke: Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Darstellung:

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z})$$

Polarform:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

Trigonometrische Darstellung:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

Zu den Operationen bei komplexen Zahlen zählt die Konjugation. Beim Konjugieren einer komplexen Zahl wird der j durch $-j$ ersetzt (Negation des Imaginärteils). Die Konjugation wird wie in Gleichung 7.8 dargestellt mit einem Stern gekennzeichnet.

$$\underline{Z}^* = (\operatorname{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z}))^* = \operatorname{Re}(\underline{Z}) - j \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z}) \quad (7.8)$$

Der Betrag einer komplexen Zahl lässt sich durch die Multiplikation der komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten bestimmen (vgl. Gleichung 7.9). Statt des Betrages, welcher eine Wurzel enthält, wird auch das Betragsquadrat verwendet. Es stellt ebenfalls ein Maß für den Abstand der Zahl zum Ursprung dar, ist aber einfacher zu berechnen.

$$|\underline{Z}| = \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Z}^*} \rightarrow |\underline{Z}|^2 = \underline{Z} \cdot \underline{Z}^* \quad (7.9)$$

Bei der Addition und der Subtraktion von komplexen Zahlen empfiehlt es sich, diese zunächst in kartesische Koordinaten umzuwandeln. Auf diese Weise lassen sich der Realteil und der Imaginärteil der komplexen Zahl separat miteinander verrechnen.

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \operatorname{Re}(\underline{Z}_1) + \operatorname{Re}(\underline{Z}_2) + j \cdot (\operatorname{Im}(\underline{Z}_1) + \operatorname{Im}(\underline{Z}_2)) \quad (7.10)$$

$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = \operatorname{Re}(\underline{Z}_1) - \operatorname{Re}(\underline{Z}_2) - j \cdot (\operatorname{Im}(\underline{Z}_1) - \operatorname{Im}(\underline{Z}_2)) \quad (7.11)$$

Die Darstellung in Polar-Koordinaten empfiehlt sich für die Verrechnungen von komplexen Zahlen durch Multiplikation und Division. Die Multiplikation von komplexen Zahlen setzt sich auf dem Produkt der Beträge und der Summe der jeweiligen Winkel zusammen (vgl. Gleichung 7.12). Bei der Division werden die Beträge dividiert und die Winkel voneinander subtrahiert (vgl. Gleichung 7.13).

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = |\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_2| \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (7.12)$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (7.13)$$

Merke: Grundrechenarten komplexer Zahlen

Für die **Addition und Subtraktion** wird in der Regel die **kartesische Darstellungsform** für komplexen Zahlen verwendet. Bei der **Multiplikation und Division** von komplexen Zahlen wird die **Polarform** gewählt.

Da die Division zunächst nur für reelle Zahlen außer Null definiert ist, wird die komplexe Zahl im Nenner so erweitert, dass dieser reell wird.

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_2^*}{\underline{Z}_2^*} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2^*}{|\underline{Z}_2|^*} \quad (7.14)$$

Durch die Addition einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen hebt sich ihr Imaginärteil auf (vgl. Gleichung 7.15). Entsprechend verschwindet durch die Subtraktion der Realteil (vgl. Gleichung 7.16).

$$\operatorname{Re}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z} + \underline{Z}^*}{2} \quad (7.15)$$

$$\operatorname{Im}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}^*}{2j} \quad (7.16)$$

7.2.2 Graphische Darstellung und Rechnungen mit komplexen Zahlen

Mithilfe von Zeigerdiagrammen lassen sich komplexe Zahlen auch zeichnerisch lösen. Werden die komplexen Zahlen wie empfohlen in der kartesischen Form dargestellt, können die Bestandteile der Realteile und der Imaginärteile direkt abgelesen werden und in ein Koordinatensystem eingetragen werden. Die komplexen Zahlen werden beispielsweise in der Abbildung 7.3 eingetragen. Bei der Addition von komplexen Zahlen wird entweder Z_1 an Z_2 gesetzt oder umgekehrt. Denn bei der Addition gilt weiterhin das Kommutativgesetz. Hier werden durch die gestrichelten Pfeile die Parallelverschiebungen von Z_1 und Z_2 angegeben. Die Verschiebungen enden beide an der selben Koordinate. Hier können separat der Realteil und der Imaginärteil aus der Summe der beiden komplexen Zahlen abgelesen werden.

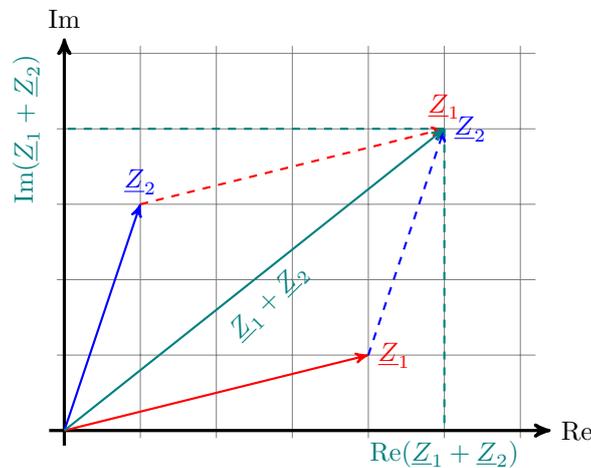


Abbildung 7.3: **Addition von komplexen Zahlen.** Zeichnerische Lösung einer Addition von zwei komplexen Zahlen im Zeigerdiagramm.

Die zeichnerische Lösung der Subtraktion von komplexen Zahlen erfolgt vergleichbar mit der Addition. Zu beachten ist dabei, dass wie in anderen Zahlensystemen bei der Subtraktion von zwei komplexen Zahlen das Kommutativgesetz nicht gilt. Wird von der komplexen Zahl Z_2 Z_1 subtrahiert, ändert sich die Richtung von Z_1 . Hier erfolgt dann wieder die Parallelverschiebung, allerdings lediglich von Z_1 . An dem sich ergebenden neuen Vektor können dann wieder der Realteil und der Imaginärteil abgelesen werden.

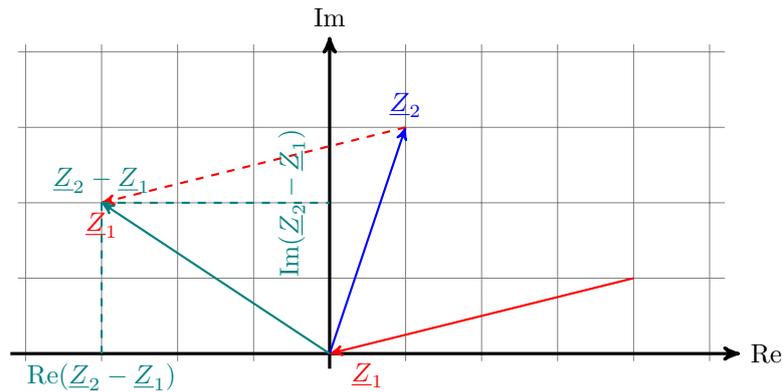


Abbildung 7.4: **Subtraktion von komplexen Zahlen.** Zeichnerische Lösung einer Subtraktion von zwei komplexen Zahlen im Zeigerdiagramm.

Die in der Abbildung 7.5 dargestellten komplexen Zahlen Z_1 und Z_2 werden zur Multiplikation in Polar-Koordinaten abgebildet. Durch die zuvor beschriebenen Rechenregeln der Multiplikation für komplexe Zahlen können die Werte für die für das Ergebnis Z_3 bestimmt werden. Die Multiplikation aus den Zeigerlängen gibt die Länge des Produktes an. Die Summe aus den beiden komplexen Zahlen den Winkel der neuen komplexen Zahl an.

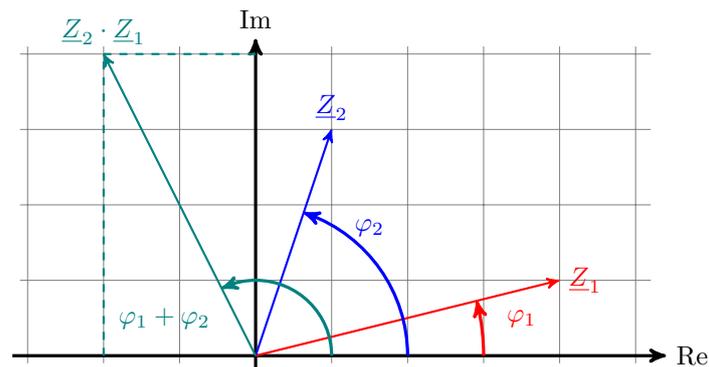


Abbildung 7.5: **Multiplikation von komplexen Zahlen.** Zeichnerische Lösung einer Multiplikation von zwei komplexen Zahlen in Polar-Koordinaten im Zeigerdiagramm.

7.3 Zeigerdiagramme in der Wechselstromtechnik

In der Wechselstromtechnik finden die komplexen Zahlen unter Anderem als Zeiger Verwendung. In linearen Netzwerken haben sinusförmige und monofrequente Quellengrößen nur sinusförmige und monofrequente Spannungen und Ströme zur Folge. Im Stationären Zustand unterscheiden sich die Spannungen und Ströme nur in ihrer Amplitude und der zugehörigen Phase. Alle Signale haben dabei eine identische Frequenz. Die Stationären und harmonischen Schwingungen können durch ihren Zeitverlauf im Liniendiagramm oder durch komplexe Zahlen durch Zeiger dargestellt werden. Die Beschreibung von Schwingungen durch komplexe Zahlen ermöglicht die Darstellung durch ruhende Zeiger, wobei nur die relative Lage zueinander ausgedrückt wird.

Lernziele: Zeigerdiagramme

Die Studierenden

- verstehen die Kenngrößen von periodischen Wechselspannungen.
- können mit den komplexen Drehzeigern der Amplituden umgehen.

7.3.1 Periodische Wechselspannung

In der Abbildung 7.6 wird ein Wechselspannungssignal mit dem Scheitelwert (Amplitudenwert) \hat{U} dargestellt. Der Versatz des Wechselspannungssignals auf der Abszisse wird durch den Zeitpunkt t_0 ausgedrückt. Der Punkt in dem das Wechselspannungssignal die Ordinate kreuzt gibt den Wechselspannungswert U zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

Das Wechselspannungssignal ist periodisch in T . Eine Periode wird bei dem angegebenen Wechselspannungssignal durch einen kompletten Durchlauf einer positiven und negativen Halbwelle definiert. So wird ab t_0 nach einer Periode der Zeitpunkt $t_0 + T$ und nach zwei Perioden der Zeitpunkt $t_0 + 2T$ erreicht.

Mit der Übertragung der angegebenen Werte auf ein Kreisdiagramm lässt sich der Zusammenhang der Wechselspannung mit der komplexen Darstellung erklären. Auf diese Weise kann die Wechselspannungsgröße $U(t = 0)$ zum Zeitpunkt 0 durch die Länge und Ausrichtung des Zeigers beschrieben werden. Der Scheitelwert entspricht der Länge des Zeigers im Kreisdiagramm. Der Winkel φ_u beschreibt den Phasenwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$.

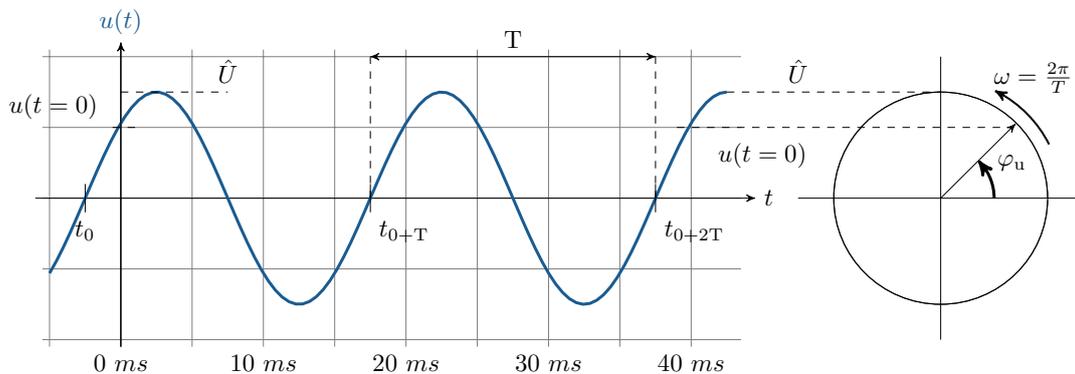


Abbildung 7.6: **Periodische Wechselspannung über der Zeit mit zwei Perioden.** Anhand der Wechselspannung lassen sich z.B. der Amplitudenwert und die Periodendauer ermitteln.

Die Kreisfrequenz ω kann mithilfe der Periodendauer T oder der Frequenz f angegeben werden. Weiter wird die Kreisfrequenz auch als Winkelgeschwindigkeit beschrieben. Über den Zusammenhang zwischen der Periodendauer und der Frequenz können die Größen ineinander umgerechnet werden. Die erläuterten Zusammenhänge werden in den Gleichungen 7.17 beschrieben.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{wird} \quad \omega = 2\pi f \quad (7.17)$$

Angenommen der Durchlauf einer kompletten Periode bei einer Frequenz von 50Hz dauert 20ms (vgl. Abbildung 7.7). Übertragen auf das Gradmaß und das Radmaß ergeben sich so Winkelangaben für den Durchlauf einer Periode. Der Winkel nach der kompletten Periode T entspricht dem Umlauf eines vollen Kreises. Der Umlauf eines vollen Kreises entspricht dazu Die Phasenverschieben t_0 lässt sich auch in der Winkeldarstellung als Phasenwinkel φ_N beschreiben.

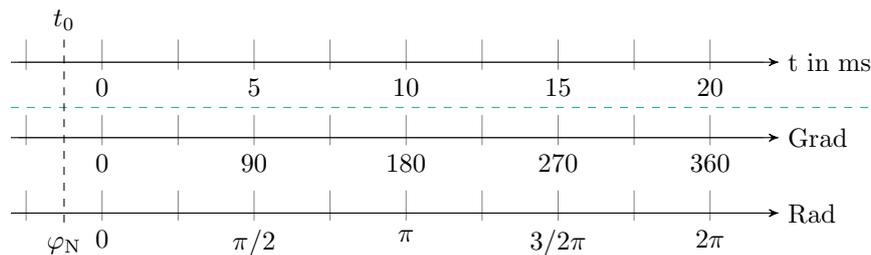


Abbildung 7.7: **Verschiedene Maßangaben.** Vergleich zwischen Gradmaß und Radmaß, der Umlauf eines Kreises entspricht 360° oder 2π .

Merke: Wechselgrößen

Eine Wechselspannung erklärt einen regelmäßigen Polaritätswechsel mit dem **Amplitudenwert** \hat{U} und der **Periodendauer** T .

Der zeitabhängige Spannungswert $u(t)$ einer Wechselspannung ist von mehreren Einflussgrößen abhängig. Dazu gehören der Scheitelwert und die Frequenz der Wechselspannung sowie der dazugehörige Phasenwinkel. Über das Verhältnis vom Zeitpunkt t zur Periodendauer lässt sich $u(t)$ bestimmen.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_N) = \hat{U} \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_N) = \hat{U} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_N\right) \quad (7.18)$$

7.3.2 Komplexer Drehzeiger der Amplitude

Der komplexe Spannungswert sowie der komplexe Stromwert können als Zeiger dargestellt werden. Hier wird auf die Darstellungsart der Polar-Koordinaten zurückgegriffen.

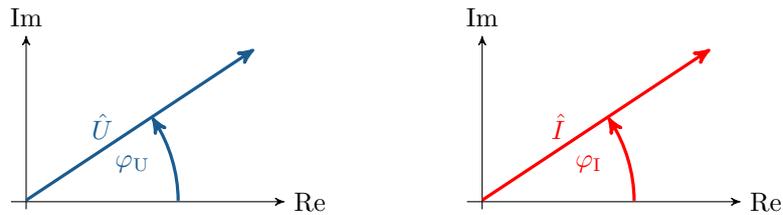


Abbildung 7.8: **Spannungs- und Stromzeiger.** Ein Spannungszeiger mit dazugehörigen Phasenwinkel und äquivalent dazu ein Stromzeiger mit Phasenwinkel

Eine harmonische Wechselgröße kann als mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Zeiger dargestellt werden. Die Zeitfunktion ist die Projektion des Zeigers auf die reelle Achse. Der rotierende Zeiger wird durch eine zeitabhängige komplexe Zahl beschrieben. Wie bei den komplexen Zahlen erklärt, können der Imaginärteil und der Realteil jeweils separat bestimmt werden. Über die Winkel-funktionen kann der Realteil und der Imaginärteil der komplexen Spannung berechnet werden.

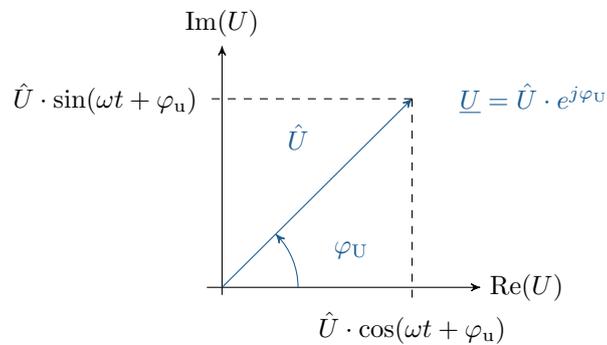


Abbildung 7.9: **Zeigerdarstellung einer komplexen Wechselspannung.** Wechselspannungszeiger mit der Aufteilung in Realteil und Imaginärteil.

Merke: Komplexe Drehzeiger von Spannung und Strom

Die Wechselgrößen Spannung und Strom werden als komplexe Drehzeiger dargestellt. Die Drehzeiger beschreiben dabei **Augenblickswerte** $u(t)$, welche sich mit konstanter **Winkelgeschwindigkeit** ω verändern.

Die Beschreibung von periodischen Größen an elektrischen Komponenten erfolgt durch feste Spannungszeiger und Stromzeiger. Das Verhalten der verschiedenen Komponenten ist dabei jeweils unterschiedlich. In der Abbildung 7.10 werden ein Widerstand, ein Kondensator als Kapazität und eine Spule als Induktivität mit ihren zugehörigen Spannungs- und Stromzeigern dargestellt. Das genaue Verhalten der drei Komponenten wird im folgenden Kapitel näher betrachtet.

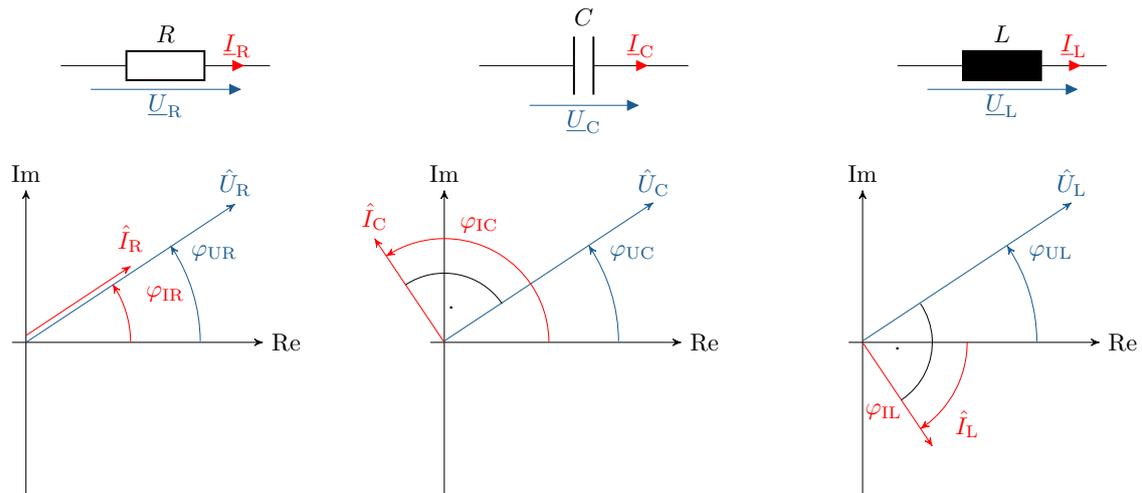


Abbildung 7.10: **Verschiedene Bauteile und die Wechselspannungszeiger.** Die Bauteile Widerstand, Kondensator und Spule mit zugehörigen Spannungs- und Stromzeigern.

7.4 Komplexe Wechselstromrechnung

In Gleichstromnetzwerken wird mit konstanten Spannungsquellen und Stromquellen gearbeitet. Im Gegensatz dazu kommen bei der komplexen Wechselstromrechnung Quellen mit sinusförmigen Wechselgrößen zum Einsatz. Die elektrische Analyse von Komponenten in einem Wechselspannungsnetzwerk erfolgt komplex. Die komplexen Spannungen \underline{U} und Ströme \underline{I} erzeugen zeitabhängige Spannungswerte $u(t)$ und Stromwerte $i(t)$. Die Gleichung 7.19 beschreibt den angegebenen Zusammenhang zwischen komplexen und zeitabhängigen Strom- und Spannungswerten für einen ohmschen Widerstand.

Komplexe und zeitabhängige Strom- und Spannungsangaben der Wechselstromrechnung:

$$\underline{U} = \underline{Z}_R \cdot \underline{I} \quad \rightarrow \quad u(t) = R \cdot i(t) \quad (7.19)$$

Abgesehen von der Komplexität der Wechselstromrechnungen, gelten weiterhin die Regeln zur Berechnung elektrischer Netzwerke, wie Maschen- und Knotenregeln, das Verhalten von Reihen- und Parallelschaltungen und die Knotenpotentialanalyse sowie die Maschenstromanalyse. Bei all diesen Beispielen ist darauf zu achten, mit den komplexen Wechselgrößen zu rechnen. Für die Erläuterung von elektrischen Netzwerken mit komplexen Wechselgrößen werden im Folgenden diese Teilgebiete näher betrachtet:

Für die Berechnung von elektrischen Netzwerken mit Wechselgrößen werden im Folgenden diese Teilgebiete näher betrachtet:

Lernziele: Wechselstromrechnung

Die Studierenden

- kennen die komplexe Impedanz und die komplexe Admittanz.
- verstehen das Verhalten eines Widerstandes, eines Kondensators und einer Spule an einer Wechselspannung.
- kennen Wechselquellen und die dazugehörigen Umwandlungsvorschriften.

7.4.1 Impedanz und Admittanz in der komplexen Ebene

Durch eine Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom kommt es zu einer Erzeugung eines Blindanteils der Impedanz. Der Blindanteil lässt sich jedoch auf der reellen Achse nicht darstellen, weshalb die reelle Achse um eine imaginäre Achse erweitert wird, welche gemeinsam die komplexe Ebene bilden. Die Abbildung 7.11 zeigt den Zeiger der komplexen Impedanz in der komplexen Ebene mit Imaginäranteil und Realanteil.

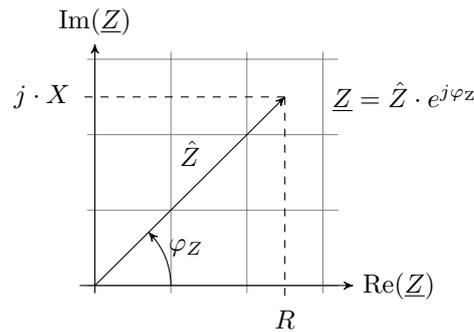


Abbildung 7.11: **Zeiger der komplexen Impedanz.** Die Impedanz in der komplexen Ebene mit der Aufteilung in Realanteil R und Imaginäranteil X .

So besteht auch die komplexe Impedanz \underline{Z} nach Gleichung 7.20 aus einem Realteil und aus einem Imaginärteil. Der Realteil besteht aus dem ohmschen Anteil, welcher den Wirkwiderstand einer Impedanz darstellt. Der Wirkwiderstand wird auch als Resistanz R bezeichnet. Zweiter Bestandteil der Impedanz ist der Imaginärteil, welcher auch als Reaktanz X bezeichnet wird. Die Reaktanz eines elektrischen Netzwerkes setzt sich beispielsweise aus den kapazitiven und induktiven Auswirkungen zusammen und wird mit der imaginären Einheit j versehen. Die Einheit der komplexen Impedanz ist wie in der Gleichstromtechnik Ohm Ω .

$$\text{Impedanz} = \text{Resistanz} + j \cdot \text{Reaktanz} \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = R + j \cdot X \quad (7.20)$$

$$[\underline{Z}] = 1 \text{ Ohm} = 1 \Omega$$

Wie in der Gleichstromtechnik existiert ein Leitwert des elektrischen Widerstandes in der komplexen Wechselstromtechnik. Dieser Kehrwert der komplexen Impedanz wird als Admittanz \underline{Y} bezeichnet (vgl. Gleichung 7.21). Die Einheit des komplexen Leitwertes bleibt wie in der Gleichstromtechnik Siemens S .

$$R = \frac{1}{G} \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \quad (7.21)$$

Auch die Admittanz lässt sich in einen Wirkleitwert und einen Blindleitwert differenzieren. Der Wirkleitwert G der Admittanz wird als Konduktanz und der Blindleitwert B der Admittanz wird als Suszeptanz bezeichnet (vgl. Gleichung 7.22).

$$\text{Admittanz} = \text{Konduktanz} + j \cdot \text{Suszeptanz} \quad \rightarrow \quad \underline{Y} = G + j \cdot B \quad (7.22)$$

$$[\underline{Y}] = 1 \text{ Siemens} = 1 S$$



Merke: Komplexe Impedanz und komplexe Admittanz

Der Gleichstromwiderstand wird bei einer **Wechselspannung** zur **komplexen Impedanz** \underline{Z} . Der Kehrwert des Widerstandes, der Leitwert, wird bei einer Wechselspannung zur **komplexen Admittanz** \underline{Y} .

7.4.2 Komplexer Widerstand

Der komplexe Widerstand eines ohmschen Verbrauchers besteht aus dem Wirkanteil R und dem Blindanteil des des ohmschen Widerstandes. Der ohmsche Widerstand R verkörpert die Eigenschaft leitfähiger Materialien elektrische Leistung in thermische Leistung umzuwandeln. Der Blindanteil des Widerstands wandelt die Leistung der Wechselströme nicht in Wärme um. Der Blindanteil des elektrischen Widerstands wird als X_R bezeichnet. Da der ideale elektrische Widerstand allerdings rein ohmsch und damit rein Real wirkt, wird in der Regel oft einfach das Formelzeichen R verwendet. Die Gleichung 7.23 erklärt diese Zusammenhänge.

$$\underline{Z}_R = R + j \cdot X_R \quad \rightarrow \quad X_{R\text{-ideal}} = j \cdot 0 \, \Omega \quad \rightarrow \quad \underline{Z}_R = R \quad (7.23)$$

An den zeitabhängigen Werten für die Spannung und den Strom ergeben sich die Zusammenhänge des idealen ohmschen Widerstandes nach Gleichung 7.24.

$$\underline{U} = \underline{Z}_R \cdot \underline{I} \quad \rightarrow \quad u(t) = R \cdot i(t) \quad (7.24)$$

Ein idealer elektrischer Widerstand ist ein reiner Wirkwiderstand und weist keinerlei Blindwiderstandanteile auf. Der reale elektrische Widerstand ist mit parasitären Effekten behaftet. Die Schaltbilder eines idealen und eines realen elektrischen Widerstandes werden in der Abbildung 7.12 gegenübergestellt. Diese parasitären Effekte wirken sich induktiv, verdeutlicht durch die Spule, und kapazitiv, verdeutlicht durch die Kapazität, auf die Schaltung aus. Neben der Frequenzabhängigkeit der parasitären Effekte, werden auch die Spannung und der Strom so aufgeteilt, dass nicht mehr die gesamte Leistung am Widerstand abfällt. die Impedanz des idealen elektrischen Widerstands ist nicht frequenzabhängig.

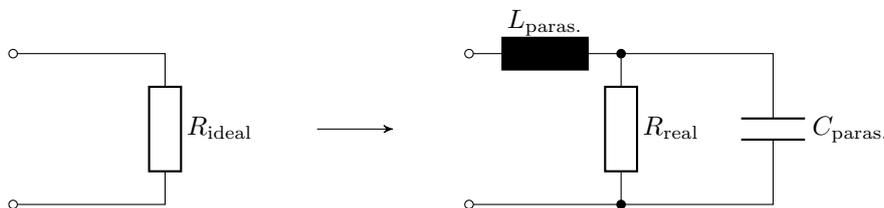


Abbildung 7.12: **Gegenüberstellung eines idealen und eines realen elektrischen Widerstandes.** Der reale Widerstand weist im Gegensatz zum idealen Widerstand seriell induktive und parallel kapazitive Effekte auf.

Zwischen der Spannung und dem Strom existiert beim idealen elektrischen Widerstand keine Phasenverschiebung. In der Abbildung 7.13 werden die Sinuswellen für die Spannung und den Strom an einem idealen Widerstand aufgetragen. Sie liegen ohne Phasenverschiebung übereinander, somit befinden sie sich in Phase.

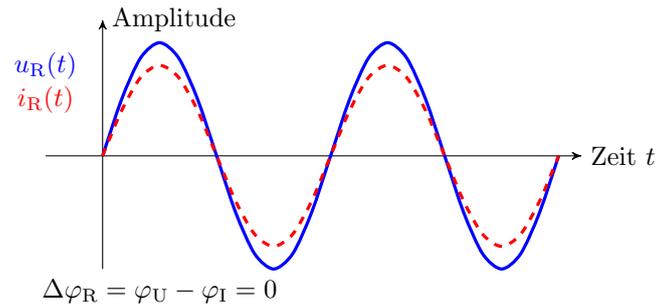


Abbildung 7.13: **Sinusschwingungen an einem Widerstand.** Wechselspannung (blau) und Wechselstrom (rot) an einem idealen Widerstand. Es resultiert an dem Widerstand keine Phasenverschiebung zwischen der Wechselspannung und dem Wechselstrom.

Merke: Sinusschwingung an einem Widerstand

Der **elektrische Widerstand** weist zwischen der Wechselspannung und dem zugehörigen Wechselstrom **keine Phasenverschiebung** auf.

7.4.3 Kapazität

Der Kondensator als Bauteil in der Elektrotechnik weist die Fähigkeit auf Energie zwischen den zwei Platten in dem elektrischen Feld zu speichern. Die Größe eines Kondensators wird in der Kapazität C angegeben. Die Einheit der Kapazität ist das Farad F . Die komplexe Impedanz eines Kondensators lässt sich nach Gleichung 7.25 berechnen. Im Gegensatz zum idealen Widerstand wirkt der ideale Kondensator im Wechselstromkreis nicht lediglich als Wirkwiderstand. Der reale Kondensator wirkt sowohl durch einen Wirkanteil, als auch durch einen Blindanteil. Die Kreisfrequenz ω ist frequenzabhängig. So ergeben sich bei hohen Frequenzen niedrige Impedanzwerte für den Kondensator. Andersherum ergeben sich hohe Impedanzwerte bei niedrigen Frequenzen. Der Blindanteil des Kondensators wirkt sich als kapazitive Reaktanz aus. Es kann beim Kondensator auch mit der komplexen Admittanz gerechnet werden. Die komplexe Admittanz ergibt sich aus dem Kehrwert der komplexen Impedanz des Kondensators.

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \rightarrow \quad \underline{Y}_C = j\omega C \quad (7.25)$$

Der ideale Kondensator wirkt rein im Blindanteil, so wird nach Gleichung 7.26 aus der komplexen Notation Z_C der Blindanteil des Kondensators X_C mit zeitabhängiger Spannung und Strom.

$$\underline{U} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I} \quad u(t) = \underline{X}_C \cdot i(t) \quad (7.26)$$

Es wird davon ausgegangen, dass die Wechselspannung an einem Kondensator mit der Phasenverschiebung von 0° anliegt. Mit dieser Feststellung kann die verursachte Phasenverschiebung des Stromes am Kondensator nach Gleichung 7.27 festgelegt werden. Durch die Phasenverschiebung des Stromes gleicht der Verlauf einer Cosinusfunktion im Gegensatz zur Sinusfunktion der Spannung. Sollen sowohl die Spannung als auch der Strom durch die Sinusfunktion beschrieben werden, wird die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ von $\pi/2$ ins Argument mit aufgenommen.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \quad i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \pi/2) \quad (7.27)$$

Bei Induktivitäten und Kapazitäten kommt es zu einer Phasenverschiebung zwischen der Wechselspannung und dem Wechselstrom. Beim Kondensator bedeutet dies, dass der Strom der Spannung um 90° (Gradmaß) voreilt. Der beschriebene Sachverhalt der Phasenverschiebung wird in der Abbildung 7.14 verdeutlicht. Der in rot dargestellte Strom an einem Kondensator erreicht den Maximalwert um 2π (Bogenmaß) früher als der blau gefärbte Maximalwert der Spannung.

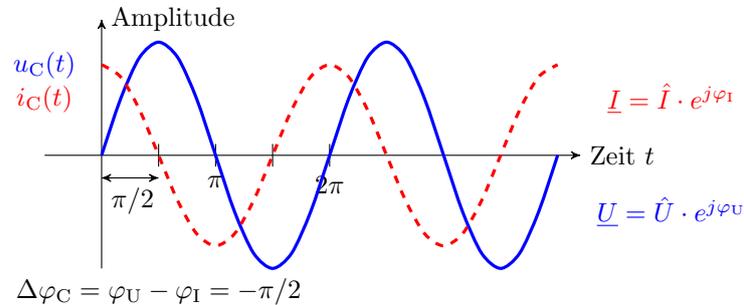


Abbildung 7.14: **Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an einem Kondensator.** Der Strom eilt der Spannung am Kondensator um 90° vor.

Merke: Sinusschwingung an einem Kondensator

An der idealen Kapazität eilt der Wechselstrom der Wechselspannung um 90° vor.

In der Regel wird mit idealen Bauteilen und deren Eigenschaften gerechnet. Jedoch weist der reale Kondensator, wie auch der zuvor beschriebene reale Widerstand, induktive und ohmsche parasitäre Effekte auf. Der ideale Kondensator wird in der Abbildung 7.15 dem realen Kondensator gegenübergestellt. Die Zu- und Ableitungen weisen induktive ($L_{\text{paras.}}$) und ohmsche ($R_{\text{paras.2}}$) Anteile auf. Außerdem ist der Kondensator einer ständigen Selbstentladung ausgesetzt. Diese Selbstentladung erfolgt symbolisch über den Parallellwiderstand $R_{\text{paras.1}}$.

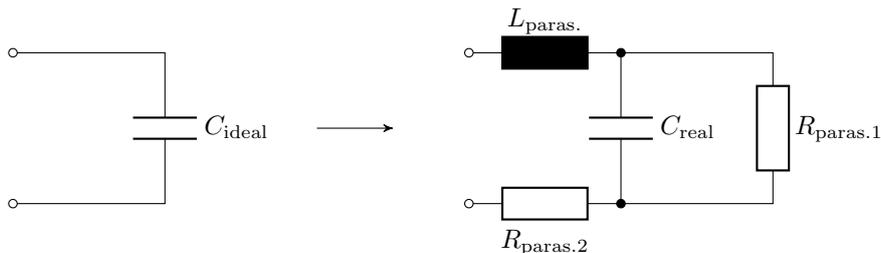


Abbildung 7.15: **Gegenüberstellung eines idealen und eines realen Kondensators.** Der reale Kondensator weist im Gegensatz zum idealen Widerstand seriell induktive und parallel kapazitive Effekte auf.

7.4.4 Induktivität

Die Spule stellt ebenso einen Energiespeicher dar, wie der Kondensator. Nur wird bei der Spule die Energie nicht in einem elektrischen Feld gespeichert, sondern in einem magnetischen Feld nach den Gegebenheiten der Induktionsgesetze. Die Größe einer Spule wird in der Induktivität L angegeben. Die Einheit der Induktivität ist Henry H. Die komplexe Impedanz einer Spule ergibt sich aus der Imaginären Einheit j , der Kreisfrequenz ω und der Induktivität L (vgl. Gleichung 7.28), die komplexe

Admittanz wird durch den Kehrwert der Spulenimpedanz berechnet. Das führt zu Zusammenhängen, welche sich entgegen der Impedanzberechnungen bei Kapazitäten entwickeln. Bei hohen Frequenzen werden die Impedanzen bei Spulen entsprechend ihrer Induktivität ebenfalls groß und bei niedrigen Frequenzen entsprechend gering.

$$\underline{Z}_L = j\omega L \quad \rightarrow \quad \underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} \quad (7.28)$$

Ebenso wie beim Kondensator wirkt die ideale Spule rein als Blindanteil der Impedanz. In der Gleichung 7.29 wird auf der linken Seite die komplexe Notation der Spulenimpedanz Z_L verwendet. Auf der rechten Seite wird die Zeitfunktion lediglich mit der Schreibweise des Blindanteils der Spule X_L dargestellt.

$$\underline{U} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} \quad u(t) = \underline{X}_L \cdot i(t) \quad (7.29)$$

Prinzipiell verhalten sich die Zeitfunktionen von Induktivitäten für die Spannung und den Strom vergleichbar, mit denen Zeitfunktionen von Kapazitäten. Lediglich die Phasenverschiebung des Stromes an Spulen ist der Phasenverschiebung der Kapazitäten entgegengesetzt. Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen der Spannung und dem Strom beträgt an einer Induktivität $\pi/2$.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \pi/2) \quad i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \quad (7.30)$$

Äquivalent zu der Phasenverschiebung an einem Kondensator existiert an der Induktivität ebenfalls eine Phasenverschiebung. Jedoch ist diese Phasenverschiebung des Stromes an der Induktivität der Phasenverschiebung der Kapazität entgegengerichtet. Im konkreten Fall in der Abbildung 7.16 wird gezeigt, dass der der Strom (rot) an einer Induktivität der Spannung (blau) nacheilt.

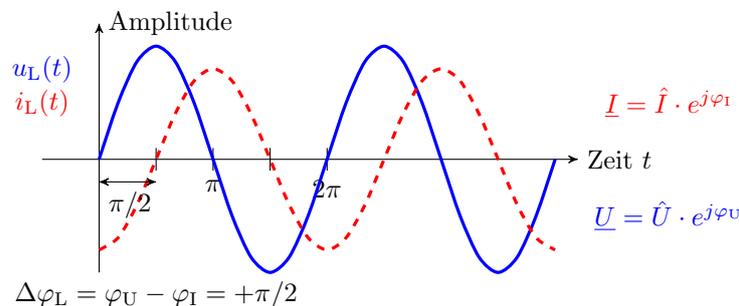


Abbildung 7.16: **Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an einer Spule.** Der Strom folgt der Spannung an der Spule um 90° nach.

Merke: Sinusschwingung an einer Spule

Bei einer idealen Induktivität folgt der Wechselstrom der Wechselspannung um 90° nach.

Wie auch der ohmsche Widerstand und der Kondensator weist die reale Spule parasitäre Effekte auf. Über den Spulendraht wirkt ein ohmscher Anteil ($R_{\text{paras.}}$) auf die komplexe Impedanz der Spule ein. Zusätzlich erzeugt die Wicklung der Spule kapazitive Effekte ($C_{\text{paras.}}$). In der Abbildung 7.17 wird das Ersatzschaltbild einer idealen Spule und einer realen Spule dargestellt.

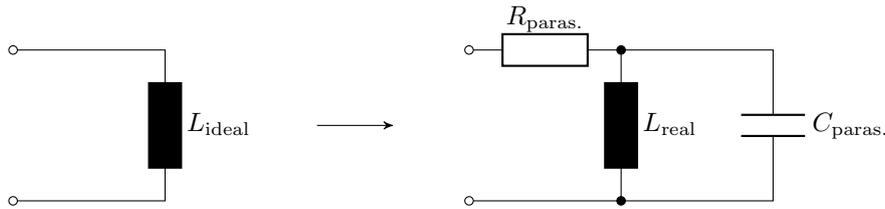


Abbildung 7.17: **Gegenüberstellung einer idealen und einer realen Spule.** Die reale Spule weist serielle ohmsche und parallele kapazitive parasitäre Effekte auf.

7.4.5 Quellen von Wechselgrößen

Wie bei Quellen von Gleichströmen und Gleichspannungen existieren Wechselquellen mit vergleichbaren Merkmalen. Bei der idealen Wechselspannungsquelle ist die Spannung eingepreist. Die Wechselspannung ändert sich nicht mit der Abhängigkeit des Stromes, welcher durch sie hindurchfließt. Die ideale Wechselstromquelle stellt einen eingepreisten Strom zur Verfügung. Dieser wird nicht durch die angeschlossene Last beeinflusst. Die Schaltungssymbole einer idealen Wechselspannungsquelle und einer idealen Wechselstromquelle werden in der Abbildung 7.18 dargestellt.



Abbildung 7.18: **Quellen von Wechselgrößen.** Ideale Wechselspannungsquelle und ideale Wechselstromquelle.

Bei den beiden vorgestellten Wechselquellen werden ideale Quellen abgebildet. Reale Wechselquellen weisen wie auch die Quellen von Gleichspannungen und Gleichströmen Innenwiderstände auf. Diese Innenwiderstände prägen sich bei Quellen von Wechselgrößen als komplexe Impedanzen aus. Die reale Wechselspannungsquelle hat also eine komplexe Innenimpedanz \underline{Z}_i , welche mit einer idealen Wechselspannungsquelle in Serie geschaltet ist. Bei realen Wechselspannungsquellen ist die Ausgangsspannung \underline{U} von der angeschlossenen Last abhängig. Die Gegenüberstellung einer idealen und einer realen Wechselspannungsquelle ist in der Abbildung 7.19 dargestellt.

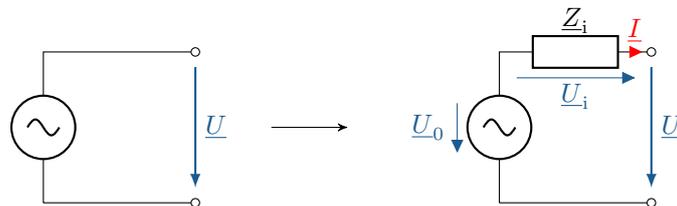


Abbildung 7.19: **Gegenüberstellung einer idealen und einer realen Wechselspannungsquelle.** Die reale Wechselspannungsquelle weist eine Serienimpedanz \underline{Z}_i auf.

Die Ausgangsspannung einer realen Wechselspannungsquelle lässt sich nach Gleichung 7.31 bestimmen. Hier liegt die Wechselspannung der Wechselspannungsquelle nicht direkt an den Klemmen an. Sie wird durch die Spannung über die Innenimpedanz \underline{Z}_i reduziert.

$$\underline{U} = \underline{U}_0 - \underline{Z}_i \cdot \underline{I} \quad (7.31)$$

Reale Wechselspannungsquellen weisen gewisse Charakteristika ohne Last beim Leerlauf und bei einem Kurzschluss auf. Beim Leerlauf liegt zwischen den Klemmen eine unendlich große Impedanz. Es wird kein geschlossener Stromkreis gebildet und es stellt sich kein Stromfluss ein (Gleichung 7.32). Die gesamte Spannung der Wechselspannungsquelle liegt an den offenen Klemmen an, siehe Gleichung 7.33.

$$\underline{I} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_i = \underline{I} \cdot \underline{Z}_i = 0 \quad (7.32)$$

$$\underline{U}_0 - \underline{U}_i - \underline{U} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U} = \underline{U}_0 \quad (7.33)$$

Beim Kurzschluss geht die Impedanz zwischen den Klemmen gegen null und es fällt dort keine Spannung ab. So stellt sich ein größter möglicher Kurzschlussstrom ein, welcher lediglich durch die Innenimpedanz begrenzt wird (Gleichung 7.34). Die Spannungs der Wechselspannungsquelle wirkt so in Gänze über die Innenimpedanz (Gleichung 7.35). Der Kurzschlussstrom lässt sich nach Gleichung 7.36 aus dem Verhältnis aus der Spannung über die Innenimpedanz \underline{U}_i und der Innenimpedanz \underline{Z}_i bestimmen.

$$\underline{U} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{I} = \underline{I}_k \quad (7.34)$$

$$\underline{U}_0 - \underline{U}_i - \underline{U} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_i = \underline{U}_0 \quad (7.35)$$

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}_i} \quad (7.36)$$

Beispiel 7.1: Reale Spannungsquelle

Eine Reale Spannungsquelle (230 V, 50 Hz) verfügt nach der unten stehenden Abbildung über eine Innenimpedanz \underline{Z}_i , welche sich aus einer Spule $L = 20 \text{ mH}$ und einem ohmschen Widerstand $R = 10 \text{ m}\Omega$ zusammensetzt.

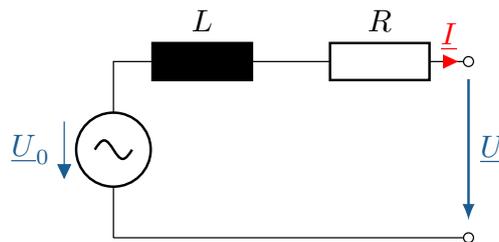


Abbildung 7.20: **Beispiel.** Wechselspannungsquelle mit einer Innenimpedanz aus einer Spule und einem Widerstand.

Bestimmen Sie die **Leerlaufspannung** und den **Kurzschlussstrom** der Wechselspannungsquelle.

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= 230 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ} \\ \underline{Z}_i &= R + jX_L \\ \underline{Z}_i &= 0,01 \, \Omega + j \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 20 \text{ mH} \\ \underline{Z}_i &= 0,01 \, \Omega + j6,28 \, \Omega\end{aligned}$$

Leerlaufspannung:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_0 \\ \underline{U} &= 230 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}\end{aligned}$$

Kurzschlussstrom:

$$\begin{aligned}\underline{I}_k &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_i} \\ \underline{I}_k &= \frac{230 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}}{0,01 \, \Omega + j6,28 \, \Omega} \\ \underline{I}_k &= (0,058 - j36,6) \text{ A} = 36,6 \text{ A} \cdot e^{-j89,9^\circ}\end{aligned}$$

Die reale Wechselstromquelle in der Abbildung 7.21 verfügt wie die Wechselspannungsquelle über eine Innenimpedanz \underline{Z}_i , wobei diese Innenimpedanz nicht wie bei der Wechselspannungsquelle in serie geschaltet ist, sondern parallel zu einer idealen Wechselstromquelle liegt. Der sich ergebende Ausgangsstrom \underline{I} der Quelle ist von der angeschlossenen Last, bzw. von der Ausgangsspannung \underline{U} abhängig.

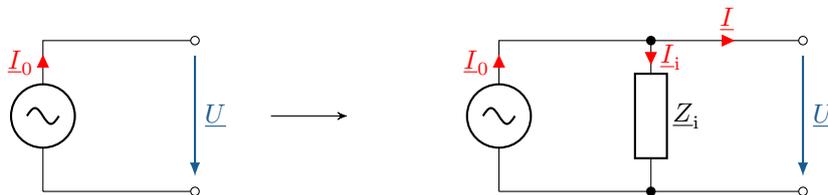


Abbildung 7.21: **Quellen von Wechselgrößen.** Ideale Wechselstromquelle und ideale Wechselstromquelle.

Der Wechselstrom der idealen Wechselstromquelle wird durch einen Anteil durch die Innenimpedanz reduziert. Der Ausgangsstrom der realen Wechselstromquelle lässt sich über die Gleichung 7.37 bestimmen. Hier wird ausgehend vom Quellstrom \underline{I}_0 der ausgangsspannungsabhängige (\underline{U}) Wechselstromanteil \underline{I}_i durch die Innenimpedanz \underline{Z}_i abgezogen.

$$\underline{I} = \underline{I}_0 - \underline{I}_i = \underline{I}_0 - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_i} \quad (7.37)$$

Wechselquellenumwandlung

Wechselstrom- und Wechselspannungsquellen können ineinander umgewandelt werden, wenn beide Wechselquellen den identischen Kurzschlussstrom und die gleiche Leerlaufspannung aufweisen.

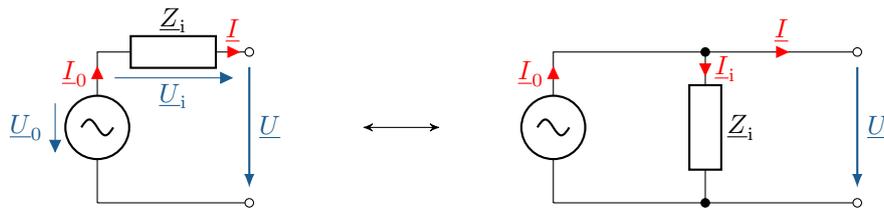


Abbildung 7.22: **Gegenüberstellung einer realen Wechselspannungsquelle und einer realen Wechselstromquelle.** Die reale Wechselspannungsquelle und die reale Wechselstromquelle sind ineinander umwandelbar.

Beide Wechselquellen sind äquivalent, wenn nach Gleichung 7.38 und Gleichung 7.39 das ohmsche Gesetz mit identischen Innenimpedanzen für die Wechselspannungsquelle und die Wechselstromquelle gilt.

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}_0 \quad (7.38)$$

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_0 \quad (7.39)$$

Hierbei soll der Kurzschlussstrom \underline{I}_K gleich dem Quellstrom \underline{I}_0 der Wechselstromquelle sein, welcher identisch zu dem Ausgangsstrom \underline{I} ist. Die Ausgangswechselspannung \underline{U} der Wechselquellen entspricht der Leerlaufspannung \underline{U}_L .

$$\underline{I} = \underline{I}_K = \underline{I}_0 \quad \text{und} \quad \underline{U} = \underline{U}_L = \underline{U}_0 \quad (7.40)$$

Beispiel 7.2: Wechselquellenumwandlung

Gegeben ist eine reale Wechselspannungsquelle mit $\underline{U}_0 = 20 \text{ kV} \cdot e^{j30^\circ}$ und $\underline{Z}_0 = (0,01 + j \cdot 2) \Omega$. Wandeln Sie die Wechselspannungsquelle in eine äquivalente Wechselstromquelle um, berechnen Sie hierzu den Kurzschlussstrom.

Kurzschlussstrom:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \frac{20 \text{ kV} \cdot e^{j30^\circ}}{(0,01 + j \cdot 2) \Omega} = (5,04 + j \cdot 8,64) \text{ kA}$$

7.4.6 Komplexer Spannungsteiler und komplexer Stromteiler

Wie bei der Betrachtung von Gleichstromnetzwerken gelten die Grundgesetze zur Analyse von Wechselstromnetzen. Die Knotenregel und die Maschenregel sind hier äquivalent anzuwenden. Der bereits vorgestellte Beispieldknoten und die Beispielmache werden in der Abbildung 7.23 mit komplexen Wechselgrößen noch einmal dargestellt. Hieraus resultiert die Ausformulierung der folgenden Gleichung 7.41 als Beispiel der komplexen Knotenregel:

$$\sum_{k=1}^N \underline{I}_k = 0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 \quad (7.41)$$

Sowie die Gleichung 7.42 als Beispiel der komplexen Maschenregel:

$$\sum_{k=1}^N \underline{U}_k = \underline{U}_{Z2} - \underline{U}_{Z1} = 0 \quad (7.42)$$

Hier ist im Gegensatz zur Gleichstrombetrachtung, wo ausschließlich mit reellen Werten gerechnet wird, lediglich darauf zu achten, dass mit komplexen Wechselgrößen gearbeitet wird.

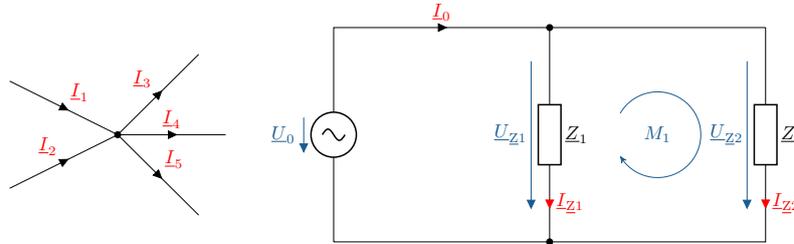


Abbildung 7.23: **Knotenregel und Maschenregel mit komplexen Wechselgrößen.** Die Knotenregel und die Maschenregel verhalten sich mit komplexen Wechselgrößen identisch wie bei Gleichstromnetzwerken.

Der komplexe Spannungsteiler dient der Reduzierung einer Gesamtspannung z.B. der Anpassung eines Signalpegels an dem Eingangsspannungsbereich einer Messschaltung. In der Abbildung 7.24 wird ein komplexer Spannungsteiler aus zwei komplexen Impedanzen dargestellt. Die komplexe Gesamtspannung \underline{U}_0 wird über die beiden Impedanzen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 in die Teilspannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 aufgeteilt.

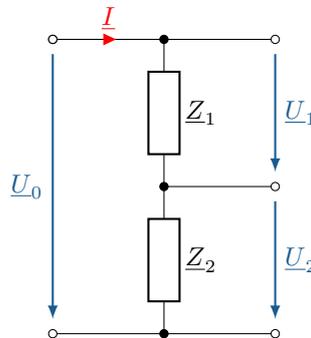


Abbildung 7.24: **Ein komplexer Spannungsteiler bestehend aus zwei Impedanzen in Serie.** Die komplexe Gesamtspannung \underline{U}_0 wird in die Teilspannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 aufgeteilt.

Die Gesamtspannung teilt sich im Verhältnis der komplexen Impedanzen auf (vgl. Gleichung 7.43). Basierend auf dem komplexen Strom \underline{I} , welcher die gesamte Serienschaltung durchströmt, lassen sich die komplexen Teilspannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 und ihre komplexen Impedanzen \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 im Verhältnis zu der komplexen Gesamtspannung \underline{U}_0 und der gesamten komplexen Impedanz $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ bestimmen.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \quad (7.43)$$

Durch das Umstellen der Gleichung 7.43 kann das komplexe Teilverhältnis \underline{T} für die Gleichung 7.44 aufgestellt werden:

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (7.44)$$

Hier entspricht das Verhältnis aus der komplexen Teilspannung \underline{U}_2 und der komplexen Gesamtspannung \underline{U}_0 dem Verhältnis aus der komplexen Impedanz \underline{Z}_2 und der gesamten komplexen Impedanz der Serienschaltung $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$. Das Aufstellen des komplexen Teilverhältnisses funktioniert in gleicher Weise für die komplexe Teilspannung \underline{U}_1 .

Der komplexe Spannungsteiler findet beispielsweise im ohmsch-kapazitiven Teiler in der Hochspannungstechnik Anwendung. In der Abbildung 7.25 werden vier verschiedene Teiler dargestellt, welche beispielsweise in der Hochspannungstechnik verwendet werden.

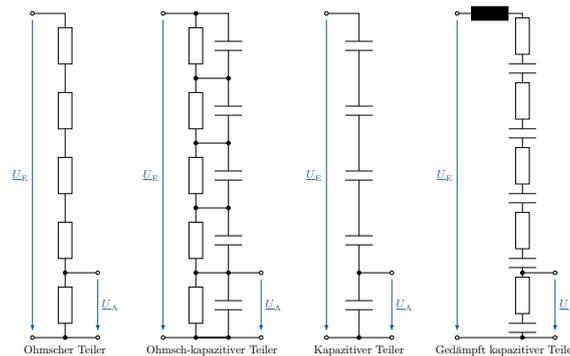


Abbildung 7.25: **Gegenüberstellung von verschiedenen Teilern der Hochspannungstechnik.** Ohmscher Teiler zur Verwendung mit Gleichspannung und der kapazitive Teiler und der gedämpft kapazitive Teiler zur Verwendung mit Wechselspannung. Der ohmsch-kapazitive Teiler ist für beide Spannungsarten verwendbar.

Neben dem ohmsch-kapazitiven Teiler werden noch der ohmsche Teiler, der kapazitive Teiler und der gedämpft kapazitive Teiler vorgestellt. Der ohmsche Teiler besteht rein aus ohmschen Widerständen, welche seriell verschaltet sind und der kapazitive Teiler besteht rein aus Kondensatoren. Der gedämpft kapazitive Teiler besteht aus mehreren Modulen mit einer vorgeschalteten Spule. Die Module setzen sich aus Reihenschaltungen aus einem ohmschen Widerstand und einem Kondensator zusammensetzen.

Das einfache Beispiel eines solchen ohmsch-kapazitiven Teilers wird in der Abbildung 7.26 gezeigt. Der ohmsch-kapazitive Teiler setzt sich aus mindestens zwei in serie geschalteten Parallelschaltungen aus einem ohmschen Widerstand und einem Kondensator, einem sogenannten RC-Glied zusammen. In der Abbildung 7.26 besteht das erste RC-Glied aus dem Widerstand R_1 und dem Kondensator C_1 . Das zweite RC-Glied besteht aus dem Widerstand R_2 und Kondensator C_2 . Die komplexe Gesamtspannung \underline{U}_0 liegt über beide RC-Glieder an. Die komplexe Teilspannung \underline{U}_2 liegt über dem zweiten RC-Glied an. Das Teilverhältnis hat somit ohmsche und kapazitive Anteile. So liegt durch die Kapazität des Kondensators ein frequenzabhängiges Teilverhältnis vor.

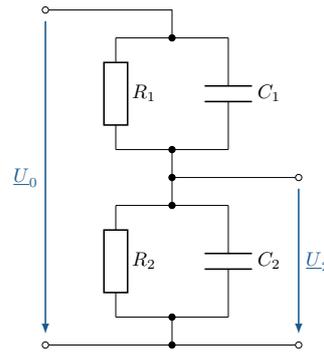


Abbildung 7.26: **Ein ohmsch-kapazitiver Spannungsteiler aus zwei RC-Gliedern.** Die RC-Glieder bestehen jeweils aus einer Parallelschaltung eines Widerstandes und eines Kondensators.

Ein besonderer Zustand liegt vor, wenn der komplexe Spannungsteiler abgeglichen ist. Dieser Zustand beschreibt das identische Verhältnis der Bauteile zueinander. Dieser Zustand wird durch die Gleichung 7.45 beschrieben. Hier muss das Produkt aus dem Widerstand R_1 und dem Kondensator C_1 identisch mit dem Produkt aus dem Widerstand R_2 und dem Kondensator C_2 sein. Diese Abgleichbedingung lässt sich in der Praxis durch veränderliche Bauteile, wie Trimmkondensatoren, realisieren.

$$R_1 \cdot C_1 = R_2 \cdot C_2 \quad (7.45)$$

Ein weiteres Anwendungsbeispiel für einen ohmsch-kapazitiven Teiler ist der Tastkopf eines Oszilloskops. Solch ein Teiler wird in der Abbildung 7.27 vorgestellt. Im Prinzip unterscheidet sich das Bild nicht erheblich vom ohmsch-kapazitiven Teiler. Jedoch sind hier das erste und das zweite RC-Glied von einander räumlich getrennt und mit einem Gehäuse umgeben. So steht das erste RC-Glied für den Tastkopf und das zweite RC-Glied für die Beschaltung im Oszilloskop. Mit dem ohmschen Teilverhältnis:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (7.46)$$

und dem kapazitiven Teilverhältnis:

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad (7.47)$$

kann zum Abgleichen des Tastkopfes das ohmsche und das kapazitive Teilverhältnis gleichgesetzt werden, da die Teilverhältnisse identisch sein müssen:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad (7.48)$$

Die Abgleichbedingung nach Gleichung 7.45 gilt weiterhin. Über die verstellbare Kapazität C_1 wird der Abgleich des Teilers vorgenommen.

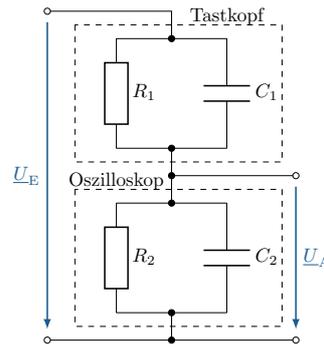


Abbildung 7.27: **Ein ohmsch-kapazitiver Spannungsteiler als Tastkopf eines Oszilloskops.** Über den Kondensator C_1 wird der komplexe Spannungsteiler abgeglichen.

Der komplexe Stromteiler, wie er in der Abbildung 7.28 vorgestellt wird, teilt den komplexen Gesamtstrom \underline{I} auf in die Teilströme \underline{I}_1 und \underline{I}_2 auf. Die beiden Teilströme \underline{I}_1 und \underline{I}_2 durchfließen die Admittanzen \underline{Y}_1 und \underline{Y}_2 .

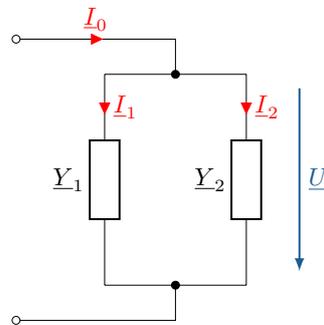


Abbildung 7.28: **Ein komplexer Stromteiler bestehend aus zwei Admittanzen.** Der komplexe Strom \underline{I} teilt sich auf in die Ströme \underline{I}_1 und \underline{I}_2 .

Die komplexe Spannung \underline{U} lässt sich nach Gleichung 7.49 über das Verhältnis aus dem Gesamtstrom \underline{I} und der Gesamtadmittanz $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ oder aus den Verhältnissen der einzelnen Stromzweige:

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{Y}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{Y}_2} \quad (7.49)$$

Das Teilverhältnis lässt sich nach Gleichung 7.50 für die beiden Stromzweige definieren:

$$\underline{T}_{i1} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \quad (7.50)$$

$$\underline{T}_{i2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \quad (7.51)$$

7.5 Effektivwert

Durch die periodischen Spannungsverläufe weist jeder Zeitschritt einen anderen Spannungswert auf. Hierbei kann direkt lediglich der Spitzenwert angegeben werden, mit welchem jedoch nicht immer gearbeitet werden kann. Um eine nützliche Vergleichbarkeit von Spannungswerten zu gewährleisten wird der Effektivwert herangezogen. Der Effektivwert beschreibt beispielsweise die identische Leistung, welche an einem Widerstand anfallen würde, würde dieser an einer Gleichstromquelle angeschlossen sein. Zur weiteren Erklärung des Effektivwertes und der dafür erforderlichen Grundlagen werden in diesem Kapitel die folgenden Inhalte besprochen:

Lernziele: Effektivwert

Die Studierenden

- verstehen die Funktion des Effektivwertes.
- kennen die Einflüsse von Amplitude und Kurvenform auf den Effektivwert.
- können den Effektivwert einer Wechselspannung bzw. eines Wechselstromes berechnen.

7.5.1 Grundlagen: Quadratischer Mittelwert und Additionstheorem

Neben dem arithmetischen Mittelwert, welcher in der Wechselstromrechnung zur Bestimmung des Mittelwerts genutzt wird, dient der quadratische Mittelwert der Bestimmung des Effektivwertes. Der quadratische Mittelwert (RMS - Root Mean Square) wird herangezogen, um die Vergleichbarkeit von Wechselspannungsgrößen zu ermöglichen. Hierbei wird eine Funktion $f(t)$ zunächst quadriert. Daraufauf folgt der Mittelwert der quadrierten Funktion berechnet. Im letzten Schritt folgt das Radizieren des berechneten Mittelwertes. Der mathematische Zusammenhang des RMS wird in der Gleichung 7.52.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt} \quad (7.52)$$

Bei der Bildung des Quadratischen Mittelwerts wird auch die Sinusfunktion quadriert. Als Hilfestellung wird ein Additionstheorem vorgestellt, mit welchem diese Berechnung vereinfacht werden soll. Additionstheoreme beziehen sich auf die Zusammenhänge der Trigonometrie um eine Funktionen umzuformen. Die Umformung der quadratischen Sinusfunktion anhand des Additionstheorems wird in der Gleichung 7.53 dargestellt. Hier wird aus der quadratischen Sinusfunktion eine Funktion, welche lediglich von einer einfachen Cosinusfunktion abhängig ist.

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad (7.53)$$

7.5.2 Amplitude

Die Amplitude einer Funktion beschreibt den maximalen Ausschlag während einer Periode. Bei einer Wechselspannung gibt der Amplitudenwert den höchsten momentanen Spannungswert der Spannung an. In der Abbildung 7.29 werden Spannungssignale mit einer Frequenz von 50 Hz und somit mit

einer identischen Periodendauer von $T = 20 \text{ ms}$ dargestellt. Sie unterscheiden sich dabei beim Amplitudenwerten. Die Scheitelwerte der Amplituden der dargestellten Spannungen betragen $\hat{U}_1 = 1 \text{ V}$, $\hat{U}_2 = 2 \text{ V}$ und $\hat{U}_3 = 4 \text{ V}$. Die Amplitude ist eine Art Faktor für die Berechnung des Effektivwertes. So hängt die Höhe des Effektivwertes direkt von dem Amplitudenwert ab.

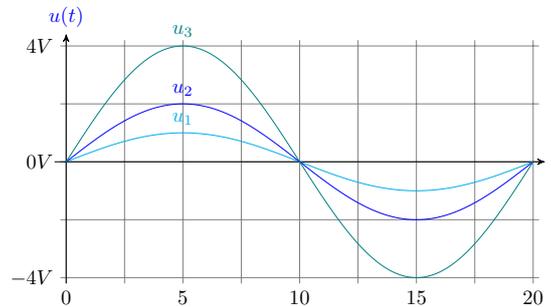


Abbildung 7.29: **Sinusspannungen mit unterschiedlichen Amplitudenwerten.** Gewichtung von den Amplitudenwerten $\hat{U}_1 = 1 \text{ V}$, $\hat{U}_2 = 2 \text{ V}$ und $\hat{U}_3 = 4 \text{ V}$.

7.5.3 Kurvenform

Neben der Amplitude eines Signals ist die Kurvenform des Signals ausschlaggebend für den Effektivwert. Bei der Berechnung des Effektivwertes wird der Scheitelfaktor C (engl. für crest factor) bestimmt, welcher mit dem Amplitudenwert verrechnet wird. In der Gleichung 7.54 wird die Beziehung zwischen dem Amplitudenwert und den Effektivwert über den Scheitelfaktor angegeben.

$$\hat{U} = C \cdot U_{\text{EFF}} \quad (7.54)$$

Dieser Scheitelfaktor beträgt für Sinussignale $C_S = \sqrt{2}$, für Dreiecksignale $C_D = \sqrt{3}$ und für Rechtecksignale $C_R = 1$. Somit beträgt der Effektivwert einer Sinusspannung etwa 70,7 Prozent des Scheitelwertes der Amplitude. Neben dem Scheitelfaktor als Zusammenhang zwischen Scheitelwert und Effektivwert findet noch der Formfaktor F Anwendung. Der Formfaktor wird als Quotient aus dem Effektivwert und dem Gleichrichtwert definiert.

Tabelle 7.1: **Kurvenformen und Scheitelfaktoren.** Die Scheitelfaktoren für sinusförmige, Dreieck- und Rechtecksignale.

Kurvenform:	Sinus	Dreieck	Rechteck
Scheitelfaktor (C):	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1

Merke: Einflüsse auf den Effektivwert

Der Effektivwert ist linear proportional zum Scheitelwert. Der Umrechnungsfaktor vom Effektivwert zum Scheitelwert heißt Scheitelfaktor und hängt von der Kurvenform des Signals ab.

7.5.4 Effektivwert

Der Effektivwert, beispielsweise einer Sinusspannung, soll für die Leistungsaufnahme als ein Momentanwert verwendet werden, welcher die gleiche Leistungsaufnahme bewirkt, die dem Leistungswert einer Gleichspannung unter vergleichbaren Gegebenheiten entsprechen würde. Der Effektivwert ist auch beim Ohm'schen Gesetz und bei den Kirchhoffschen Gesetzen anwendbar und somit für alle grundlegenden Gesetze geeignet.

Anhand eines Wechselstromsignales $i(t)$ soll die Berechnung des Effektivwertes erläutert werden. Wird die Definition des Stromsignales in die Gleichung 7.55 eingesetzt, so ergibt sich:

$$f(t) = i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{I}^2 \cdot \sin^2(\omega t) dt} \quad (7.55)$$

Die Quadratur des Scheitelwerts ist nicht zeitabhängig und kann vor das Integralzeichen gezogen werden. Außerdem kann der Faktor aus dem Additionstheorem aus dem Integral gezogen werden, sodass die nachfolgende Gleichung 7.56 entsteht:

$$I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2T} \int_0^T 1 - \cos(2\omega t) dt} \quad (7.56)$$

Nach der Differenzregel können Differenzen in einem Integranden gesondert bestimmt werden. Auf diese Weise werden in der nachfolgenden Gleichung 7.57 die Integrale für die beiden Operanden der Differenz separat bestimmt.

$$\text{mit } \int_0^T 1 dt = T \quad \text{und} \quad \int_0^T \cos(2\omega t) dt = 0 \quad (7.57)$$

Durch das Auflösen des Integrals entsteht:

$$I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2T} \cdot (T - 0)} \quad (7.58)$$

Hier lässt sich die Periodendauer T aus dem Zähler und dem Nenner kürzen, sodass folgender Zusammenhang entsteht:

$$I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2}} \quad (7.59)$$

Nun wird noch aus dem Zähler und dem Nenner getrennt die Wurzel gezogen. Der selbe Zusammenhang lässt sich so auch für die Spannung definieren:

$$I_{\text{Eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad U_{\text{Eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad (7.60)$$

Merke: Effektivwert einer Sinusschwingung

Für rein sinusförmige Spannungen und Ströme gilt der Scheitelfaktor $\sqrt{2}$:

$$I_{\text{Eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad U_{\text{Eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

In der Abbildung 7.30 wird eine Sinusspannung mit einem Amplitudenwert von 4 V dargestellt. Dazu wird der zu der Sinusspannung zugehörige Effektivwert bei $4\text{ V}/\sqrt{2}$ eingezeichnet. Vergleichbar verhält es sich mit den Spannungen im Haushalt. So würde bei einer Spannungsmessung im Haushalt ein Effektivwert von 230 V angezeigt werden. Der Amplitudenwert der eigentlich anliegenden Wechselspannung beträgt dabei allerdings $230\text{ V} \cdot \sqrt{2}$ also 325 V .

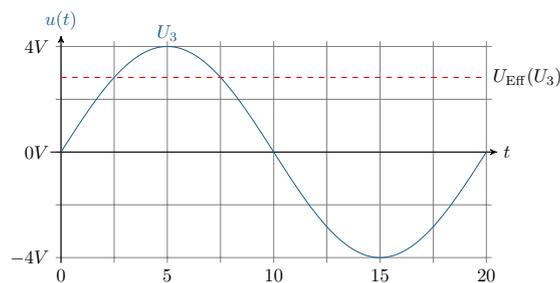


Abbildung 7.30: **Formverlauf einer Sinusspannung.** Sinusspannung mit einem Amplitudenwert von 4 V und zugehörigem Effektivwert von $4\text{ V}/\sqrt{2}$.

Beispiel 7.3: Effektivwert

Wird die Spannung beispielsweise an einer Haushaltssteckdose gemessen, so wird der Effektivwert von 230 V angegeben.

Die folgenden Aufgaben sollen zum besseren Verständnis des Effektivwertes bearbeitet werde:

- a) Berechnung des Amplitudenwertes der Spannung an einer Haushaltssteckdose.
 - b) Berechnung des Effektivwertes davon ausgehend, dass es sich um ein Rechtecksignal handeln würde.
- a) Der Amplitudenwert an einer Steckdose mit einem Effektivwert von 230 V beträgt:

$$\hat{U} = I_{\text{Eff}} \cdot \sqrt{2} = 230\text{ V} \cdot \sqrt{2}$$

$$\hat{U} = 325,269\text{ V}$$

- b) Der Effektivwert einer Rechteckspannung mit einem Scheitelwert von 325 V beträgt:

$$U_{\text{Rechteck}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}} = \frac{325\text{ V}}{\sqrt{3}}$$

$$U_{\text{Rechteck}} = 187,639\text{ V}$$

7.6 Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung

In der Gleichstrombetrachtung elektrischer Netzwerke ergab sich lediglich eine Wirkleistung an den Komponenten. In der Wechselstrombetrachtung elektrischer Netzwerke werden durch die resultierenden Blindströme auch Blindleistungen erzeugt. Die sich daraus ergebende Scheinleistung teilt sich auf die Wirkleistung und die Blindleistung auf. Die folgenden Grundlagen und Leistungsarten, welche durch eine Wechselspannung hervorgerufen werden, werden folgend besprochen:

Lernziele: Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung

Die Studierenden

- kennen den Unterschied zwischen der Augenblicksleistung, der Wirkleistung und der Blindleistung.
- können die Scheinleistung bestimmen und kategorisieren.

7.6.1 Grundlagen: Additionstheorem und Arithmetischer Mittelwert

Für die Berechnung des Effektivwertes wurde bereits ein Additionstheorem vorgestellt. Ein weiteres Additionstheorem wird in der Gleichung 7.61 vorgestellt. Hier wird aus dem Produkt zweier Sinusfunktionen mit unterschiedlichen Argumenten ein Zusammenhang mit Summen und Differenzen in Cosinusfunktionen. Hierdurch wird das Produkt eliminiert und eine Summe zweier Cosinusfunktionen erstellt. Das Integrieren der Summe lässt sich durch das Aufteilen der Summe in zwei separate Integrationvorgänge vereinfachen.

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) \quad (7.61)$$

Mit dem arithmetische Mittelwert einer Funktion soll ein konstanter Wert errechnet werden, welcher nicht mehr zeitabhängig ist. In der Elektrotechnik soll dieser Wert in bestimmten Fällen, ähnlich wie der Effektivwert bei sinusförmigen Strom- und Spannungsverläufen, zur besseren Veranschaulichung herangezogen werden. Berechnet wird der arithmetische Mittelwert über folgende Integralformel:

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt \quad (7.62)$$

In der Formel steht T für die Periodenlänge. Hier ist t dabei ein beliebig wählbarer Zeitpunkt, ab welchem die Betrachtung starten soll (meistens $t = 0$). Vereinfacht ausgedrückt steht im Integral die Fläche zwischen der Funktionskurve und der Abszisse und im Nenner des Bruches die Periodenlänge. Als Beispiel soll eine sogenannte Sägezahnspannung herangezogen werden, welche in der Abbildung 7.31 dargestellt wird.

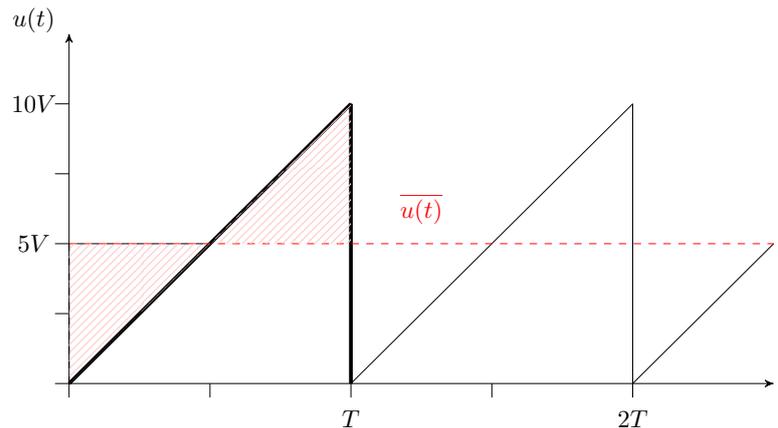


Abbildung 7.31: **Verlauf einer Sägezahnspannung.** Über die Sägezahnspannung wird die Ermittlung des rot gekennzeichneten Mittelwertes erläutert.

Soll der arithmetische Mittelwert errechnet werden, muss zuerst eine Funktion über eine Periode aufgestellt werden. In diesem Fall kann eine Periode folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\overline{u(t)} = \frac{10 \text{ V}}{T} \cdot t \quad (7.63)$$

Diesen Zusammenhang eingefügt in die Gleichung 7.62 und für die Integrationsgrenzen $t = 0$ bis T ergibt sich die Gleichung:

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{10 \text{ V}}{T} \cdot t \, dt \quad (7.64)$$

Wird das Integral aufgelöst erhält man den arithmetischen Mittelwert für die Sägezahnspannung:

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \left[\frac{10 \text{ V}}{T} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ V} \quad (7.65)$$

Somit beträgt der arithmetische Mittelwert die Hälfte der maximalen Spannung. Liegt eine ideale Sinusschwingung vor, ist der arithmetische Mittelwert immer null. Relevant wird der arithmetische Mittelwert, wenn die Leistung von sinusförmigen Strömen und Spannungen errechnet werden soll.

7.6.2 Wirkleistung und Blindleistung

Wirkleistung bei Gleichstrom: In elektrischen Gleichstromnetzwerken wird die Leistung nach der bekannten Gleichung $P = U \cdot I$ bestimmt. Bei bekanntem elektrischen Widerstand kann die Gleichung dahingehend umgestellt werden, dass nach dem ohmschen Gesetz entweder die Spannung oder der Strom eliminiert werden.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \quad (7.66)$$

In einem System mit Wechselgrößen ist die Leistung, wie auch die Größen Strom und Spannung, zeitabhängig. In der Gleichung 7.67 wird dies dadurch ausgedrückt, dass die Formelzeichen klein geschrieben sind und abhängig von der Zeit t sind:

$$P = U \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (7.67)$$

Weil die Größen der Spannung und des Stromes zeitabhängig sind, ist auch diese Funktion der Leistung zeitabhängig. Aufgrund der Zeitabhängigkeit wird auch von der **Augenblicksleistung** für einen Zeitpunkt t gesprochen. Die Maßeinheit der elektrischen Augenblicksleistung ist weiterhin das Watt.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_U) \quad i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_I) \quad (7.68)$$

Werden die Augenblickswerte der Spannung und des Stromes in die Gleichung 7.67 der Augenblicksleistung eingesetzt, so ergibt sich in der folgenden Gleichung 7.70 die Augenblicksleistung. Hier lässt sich die Gleichung in einen Vorfaktor, einen konstanten Anteil und einen zeitabhängigen Anteil aufteilen. Der Vorfaktor besteht aus der Hälfte des Produktes der Amplitudenwerte von Spannung und Strom. Der konstante Anteil besteht aus dem ersten Cosinussummanden, hier sind lediglich die Phasenwinkel von Spannung und Strom ausschlaggebend. Der zeitabhängige Anteil wird durch den zweiten Cosinus dargestellt. Hier werden neben den Phasenwinkeln auch die Kreisfrequenz und der Zeitpunkt wichtig.

$$\text{allgemein: } p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (7.69)$$

$$\text{sinusförmig: } p(t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \left(\underbrace{\cos(\varphi_U - \varphi_I)}_{\text{konstanter Anteil}} + \underbrace{\cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)}_{\text{zeitabhängiger Anteil}} \right) \quad (7.70)$$

Merke: Augenblicksleistung

Die Augenblicksleistung ist das Produkt aus den Augenblickswerten der Spannung und des Stromes.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Wird die gesamte Leistung eines Systems über einen idealen ohmschen Widerstand aufgenommen, bedeutet dies, dass die Spannung in der Strom keine Phasenverschiebung aufweisen. Der Konstante Anteil der Augenblicksleistung ist positiv. Die Augenblicksleistung pulsiert mit doppelter Frequenz im Vergleich zur Frequenz von Spannung und Strom. Dabei hat die Leistung stets ein positives Vorzeichen.

Häufig ist es nicht erheblich, wie der genaue zeitliche Verlauf der Augenblicksleistung ist. Vielmehr ist bei Anwendungen lediglich die im Mittel umgesetzte Leistung, beispielsweise Wärmeanwendungen, von Interesse. Die Mittlere Leistung der zeitveränderlichen Augenblicksleistung ist nach Gleichung 7.62 definiert. Für rein sinusförmige Spannungen und Ströme lässt sich eine mittlere Leistung nach Gleichung 7.71 bestimmen. Die Angaben der Spannung U und des Stromes I bilden die Effektivwerte. Der Winkel φ ergibt sich aus der Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom. Der gesamte Ausdruck $\cos(\varphi)$ wird auch als **Leistungsfaktor** bezeichnet.

$$\bar{p}_{\text{Sin}} = P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \quad (7.71)$$

Ohne die Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom an einem ideale Widerstand ist der Term des Leistungsfaktors Vernachlässigbar. So lässt sich die mittlere Leistung in der Wechselstromtechnik bei sinusförmigen Spannungs- und Stromverläufen analog zur Gleichstromtechnik auf

zwei zeitunabhängige Größen zurückführen. Der Effektivwert der Spannung und des Stromes werden für rein sinusförmige Größen zur Ermittlung der mittleren Leistung herangezogen.

$$\bar{p}_{\text{Ohm}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = U \cdot I \quad (7.72)$$

Ähnlich verhält es sich mit der Augenblicksleistung an Spulen und Kondensatoren. An einer Induktivität eilt der Strom der Spannung um 90° nach $(+\pi/2)$. Der Verlauf der Spannung und des Stromes an einer Induktivität wird in der Abbildung 7.32 dargestellt. Dazu wird in grün die Augenblicksleistung an der Induktivität dargestellt. Der Konstante Anteil der Augenblicksleistung an einer Induktivität beträgt Null. An dem Verlauf lässt sich das Pulsieren der Augenblicksspannung mit der doppelten Frequenz der Spannung bzw. des Stromes feststellen. Die positiven und negativen Halbwellen der Augenblicksleistung heben sich gegenseitig im Mittel auf. Das heißt, dass die aufgenommene Leistung wieder vollständig abgegeben wird und so von der Induktivität keine Leistung aufgenommen wird.

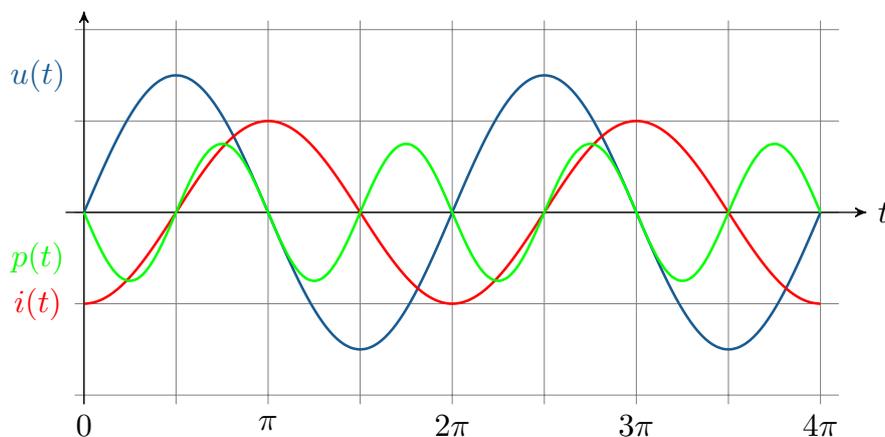


Abbildung 7.32: **Verlauf des Stromes, der Spannung und der zeitabhängigen Leistung an einer induktiven Last.** Die Augenblicksleistung weist die doppelte Frequenz gegenüber der Spannung bzw. des Stromes auf. Die positiven und negativen Halbwellen heben sich gegenseitig auf, die aufgenommene Leistung wird vollständig wieder abgegeben.

Beim Kondensator verhält es sich dem Prinzip nach äquivalent zur Induktivität. Hier eilt der Strom der Spannung um 90° ($-\pi/2$). Der konstante Anteil der Augenblicksleistung beträgt Null und die Leistung pulsiert mit doppelter Frequenz um die Nulllinie. Wie auch bei der Induktivität wird von einer Kapazität die aufgenommene Leistung wieder vollständig abgegeben, sodass im Mittel keine Leistung aufgenommen wird. Das Verhalten der zeitabhängigen Leistung an einer kapazitiven Last wird in der Abbildung 7.33 vorgestellt.

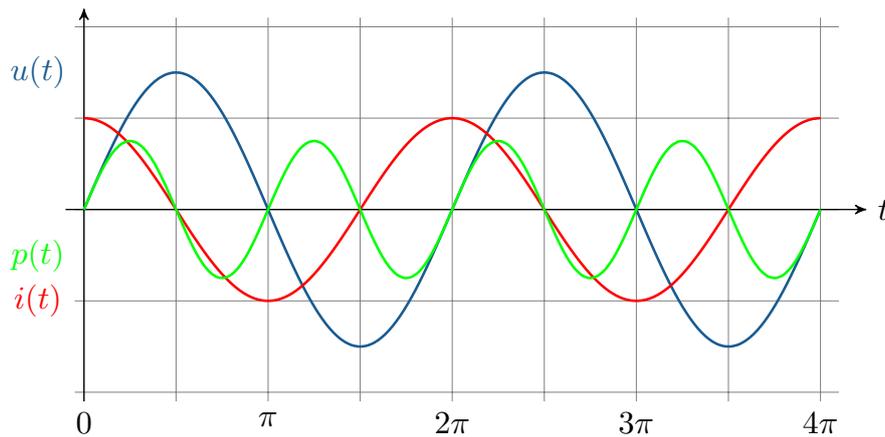


Abbildung 7.33: Verlauf des Stromes, der Spannung und der zeitabhängigen Leistung an einer kapazitiven Last. Die Augenblicksleistung weist die doppelte Frequenz gegenüber der Spannung bzw. des Stromes auf. Die positiven und negativen Halbwellen heben sich gegenseitig auf, die aufgenommene Leistung wird vollständig wieder abgegeben.

Ist die Augenblicksleistung größer Null, wird Leistung aufgenommen. Entgegengesetzt wird Leistung abgegeben, wenn die Augenblicksleistung kleiner Null ist. Durch die nicht vorhandene Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der Spannung am ohmschen Widerstand ist die mittlere Leistung stets größer null. Der ohmsche Widerstand nimmt also stets Leistung auf. Die Leistung wird hier als Wirkleistung P bezeichnet, welche für Anwendungen genutzt werden kann. Sie wird anhand der bereits vorgestellten Gleichung 7.71 für sinusförmige Spannungen und Ströme berechnet. Die beschriebenen Leistungen erklären Wirkleistungsanteile und Blindleistungsanteile. Die Blindleistung beschreibt dabei denjenigen Anteil der Leistung, welcher für die Erzeugung von elektrischen und magnetischen Feldern notwendig ist. Ist die elektrische Impedanz rein induktiv oder kapazitiv, liegt eine Phasenverschiebung von $\pm 90^\circ$ vor. Der rein induktive oder rein kapazitive Zweipol nimmt Leistung auf, welche anschließend wieder vollständig abgegeben wird. Das dadurch resultierende Mittel der Leistung beträgt immer null. Diese Leistung wird als Blindleistung Q bezeichnet. Es wird dabei zwischen induktiver und kapazitiver Blindleistung unterschieden. Für die induktive Blindleistung ergibt sich eine positive Phasenverschiebung für die Leistung, was genau dem Verlauf der Sinusfunktion entspricht. Die kapazitive Blindleistung wird entgegengesetzt verschoben, sodass sich ebenfalls eine Sinusfunktion, jedoch mit negativem Vorzeichen definieren lässt. In den Gleichungen 7.73 und 7.74 werden die Gleichungen für die Berechnungen der induktiven und kapazitiven Blindleistung vorgestellt. Die Maßeinheit für die induktive und kapazitive Blindleistung ist das var (Volt-Ampere-reaktiv).

$$Q_{\text{Ind}} = U \cdot I \cos(\varphi + 90^\circ) = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \quad (7.73)$$

$$Q_{\text{Kap}} = U \cdot I \cos(\varphi - 90^\circ) = -U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \quad (7.74)$$

$$[Q] = 1 \text{ Volt} - \text{Ampere} - \text{reaktiv} = 1 \text{ var}$$

Bei idealen kapazitiven oder induktiven Widerständen wird keine Energie in Form von Wärme umgesetzt. Es ändert sich lediglich das magnetische oder elektrische Feld, so wird also Energie gespeichert oder abgegeben.

Merke: Wirkleistung und Blindleistung

In der komplexen Ebene wird die Leistung durch die Wirkleistung und die Blindleistung erklärt. Die Wirkleistung beschreibt den Realteil und die Blindleistung den Imaginärteil der komplexen Scheinleistung. Die Wirkleistung und die Blindleistung werden wie folgt definiert:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \quad Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

7.6.3 Scheinleistung

Bisher wurden die Grundlagen der Leistungsbetrachtung von idealen ohmschen und induktiven/-kapazitiven Impedanzen betrachtet. Jedoch treten in den meisten Netzwerken sowohl ohmsche als auch induktive oder kapazitive Impedanzen auf. In solchen Netzen wird dann unterschieden zwischen Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung. Die Scheinleistung steht dabei für die Gesamtleistung des Systems. Um die Scheinleistung zu berechnen, wird mit dem Maximalwert gerechnet, also wenn keine Phasenverschiebung vorliegen würde. Damit ist dieser Wert gleich der Leistung eines idealen ohmschen Widerstands:

$$S = U \cdot I = P_{\text{R}} \quad (7.75)$$

Wird die Scheinleistung in der komplexen Ebene betrachtet, kommen die Festzeiger zum Einsatz. Wird die komplexe Spannung mit dem komplexen Strom multipliziert, würden nach den Regeln des komplexen Rechnens die Phasenwinkel addiert werden. Um eine korrekte Leistungsberechnung durchzuführen, muss jedoch eine Differenz zwischen den Phasenwinkeln vorliegen. Um diesem Problem abhilfe zu schaffen, wird mit dem konjugierten komplexen Wert des Stroms gerechnet:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ \text{mit } \underline{U} &= U \cdot e^{j\varphi_u} \\ \text{und } \underline{I}^* &= I \cdot e^{-j\varphi_i} \end{aligned} \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned} \text{folgt } \underline{S} &= U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i} \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= U \cdot I \cdot e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (7.77)$$

Über den komplexen Wert der Spannung und den konjugiert komplexen Wert des Stromes lässt sich separat die Wirkleistung und die Blindleistung oder direkt die komplexe Scheinleistung bestimmen:

$$U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ = \underline{S} \quad (7.78)$$

Außerdem lässt sich über den Leistungsfaktor auch direkt ein Zusammenhang zwischen der Wirkleistung bzw. der Blindleistung und der Scheinleistung nach Gleichung 7.79 festlegen.

$$P = \cos(\varphi) \cdot S \quad Q = S \cdot \sin(\varphi) \quad (7.79)$$

Merke: Komplexe Scheinleistung

Die komplexe Scheinleistung setzt sich aus der Wirkleistung und der Blindleistung zusammen. Sie kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = P + jQ$$

Die Größen Wirkleistung und Blindleistung sind in der komplexen Zahlenebene zu finden. Dabei ist die Wirkleistung ein rein reeler Wert und die Blindleistung stellt einen rein imaginären Wert dar. Die Scheinleistung, welche auch eine komplexe Größe ist, kann als Betrag des Weges von Wirk- und Blindleistung dargestellt werden (vgl. Abbildung 7.34). Die hier dargestellte Scheinleistung S mit zugehörigen Phasenwinkel φ ist im I . Quadranten verortet. Dies wird durch einen positiven Wirkleistungsanteil und einen positiven Blindleistungsanteil verursacht. Die positive Wirkleistung deutet an, dass von etwas elektrische Leistung aufgenommen wird, also eine elektrische Last darstellt. Deswegen wird hier vom Lastbetrieb gesprochen. Die positive Blindleistung spricht für die vorherrschenden Effekte einer Spule und wirkt somit induktiv. Die Scheinleistung im I . Quadranten wird im induktiven Lastbetrieb betrieben. Wirkt eine negative Wirkleistung in die Scheinleistung, wird Wirkleistung abgegeben, wie bei einem Generator, welcher Leistung abgibt. Bei einer positiven Blindleistung liegt hier ein induktiver Generatorbetrieb vor (II . Quadrant). Ist die Blindleistung negativ, überwiegen kapazitive Effekte. Bei negativer Wirkleistung wird diese Betriebsform kapazitiver Generatorbetrieb genannt (III . Quadrant). Als letztes wird im IV . Quadranten ein kapazitiver Lastbetrieb beschrieben. Hier wirkt eine positive Wirkleistung und eine negative Blindleistung in die Scheinleistung ein.

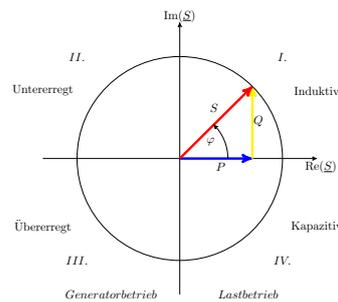


Abbildung 7.34: **Zeigerdiagramm der Leistung.** Zusammensetzung von Blind-, Wirk- und Scheinleistung in Abhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Hier eine induktive Last im positiven Imaginärteil.

Die Blindleistung wird unter anderem benötigt, um Magnetfelder in elektrischen Maschinen zu erzeugen. Der Blindleistungsbedarf entsteht durch Komponenten im System, welche entweder induktiv oder kapazitiv wirken. Wenn der Strom zur Erzeugung des Magnetfeldes (Erregerstrom) höher ist, als es für die nominale Leistung des Generators erforderlich wäre, ist ein Generator übererregt. In diesem Fall ist der Generator in der Lage, Blindleistung in das Netz abzugeben. Die hierdurch erhöhte Blindleistung im Netz führt zu einer Spannungsanhebung. Steigt der Energiebedarf im Netz, kann diese Gegebenheit dafür genutzt werden, einem Absinken der Netzspannung entgegenzuwirken. Andersherum arbeitet ein Generator mit einem geringeren Erregerstrom als benötigt im untererregten Zustand. Der Generator nimmt hier Blindleistung aus dem Netz auf, um das erforderliche Magnetfeld aufrecht zu halten. Der Bezug von Blindleistung führt dann wiederum zu einer Spannungsabsenkung im Netz. Bei einer starken untererregung eines Generators kann es zum Ausfall der elektrischen Maschine kommen.

Die Einheiten der drei Leistungsarten sind theoretisch alle vergleichbar. Um zwischen den Leistungsarten zu unterscheiden, wurden für die Scheinleistung und die Blindleistung neue Einheiten gewählt, welche physikalisch jedoch dasselbe aussagen. Für die Scheinleistung wurde die Einheit Volt-Ampere

[VA] festgelegt und für die Blindleistung Volt-Ampere-reaktiv [var]. Die Wirkleistung wird in der bekannten Einheit Watt [W] angegeben.

Tabelle 7.2: **Zusammenfassung der Leistungsarten.** Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung welche durch Wechselgrößen hervorgerufen werden, aufgelistet mit den Formelzeichen und Einheiten.

Leistungsart		Einheit	
Wirkleistung	P	W	(Watt)
Blindleistung	Q	var	(Volt-Ampere-reaktiv)
Scheinleistung	S	VA	(Volt-Ampere)

7.6.4 Leistung und elektrische Energie

Neben der elektrischen Leistung ist auch die elektrische Energie eine genutzte Größe, um beispielsweise Verbräuche von Haushalten zu erfassen. Hier wird die elektrische Leistung pro Zeiteinheit gemessen. Nach der Definition aus der Thermodynamik ist die Energie die über einen bestimmten Zeitraum aufgebrauchte Leistung. Es wird also gemäß Gleichung 7.80 die elektrische Leistung während einer Zeit zwischen t_1 und t_2 aufintegriert um die elektrische Energie zu bestimmen.

$$E_{\text{el}} = \int_{t_1}^{t_2} p_{\text{el}}(t) dt \quad (7.80)$$

Vergleichbar mit der Wirkleistung und der Blindleistung lässt sich auch die Energie in eine Wirkarbeit und eine Blindarbeit unterteilen. Die Blindarbeit beschreibt dabei denjenigen Anteil der elektrischen Energie, welcher nicht in Nutzenergie, bzw. Wirkarbeit, umgewandelt wird.

$$W_{\text{N}} = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad W_{\text{Q}} = \int_{t_1}^{t_2} Q dt \quad (7.81)$$

Im stationären Zustand werden lediglich die Effektivwerte von Spannung und Strom und somit auch von der Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung betrachtet und sind somit zeitlich konstant.

$$W_{\text{N}} = P \cdot (t_2 - t_1) \quad W_{\text{Q}} = Q \cdot (t_2 - t_1) \quad (7.82)$$



Beispiel 7.4: Leistungsberechnung

An einer Wechselstromlast werden die folgenden Werte für die Wechselspannung und den Wechselstrom gemessen:

Gegeben sind:

$$\hat{U} = 12 \text{ V} \quad \hat{I} = 2 \text{ A} \quad \varphi = 60^\circ$$

Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

- Berechnung von Wirkleistung und Blindleistung.
- Berechnung der Scheinleistung mit dem konjugierten komplexen Strom.

a) Die Wirkleistung beträgt:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi) = \frac{12 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(60^\circ)$$
$$P = 6 \text{ W}$$

Die Blindleistung beträgt:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\varphi) = \frac{12 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(60^\circ)$$
$$Q = 10,392 \text{ var}$$

b) Die Scheinleistung beträgt:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}^*}{\sqrt{2}} = \frac{12 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(2\pi \cdot 20 \text{ Hz})} \cdot \frac{2 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(2\pi \cdot 20 \text{ Hz} + \frac{\pi}{3})}$$
$$\underline{S} = 12 \text{ VA} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 6 \text{ W} + j10,392 \text{ var}$$

7.7 Drehstrom

Um einen möglichst effizienten Energietransport zu gewährleisten wird in vielen Netzsystemen Drehstrom eingesetzt. Grundlage des Drehstrom ist der Wechselstrom, welcher nicht als einzelne Phase, sondern als Zusammenschluss von mehreren Phasen genommen wird. Erzeugt wird Wechselstrom mit Generatoren, die nicht nur eine einzelne Wicklung im Rotor verbaut haben, sondern mehrere. Werden diese Wicklungen mit einem symmetrischen Abstand zu einander verbaut, werden je nach Anzahl der Wicklungen Phasen erzeugt. Es wird dann von einem Mehrphasensysteme gesprochen. Wenn genau drei Phasen vorliegen, wird das System Drehstrom genannt. Für das Verständnis von Drehstrom sind besonders die Grundlagen zum Wechselstrom und dem komplexen Rechnen relevant.

Lernziele: Drehstrom

Die Studierenden

- verstehen die grundsätzlichen Gegebenheiten des Drehstroms und der dazugehörigen Operatoren.
- können Drehstromsysteme mit gleicher Belastung (Symmetrische Komponenten) analysieren.
- kennen die Gegebenheiten von Drehstromsystemen mit unterschiedlicher Phasenbelastung (Unsymmetrische Komponenten).

7.7.1 Symmetrische Komponenten

Im Bereich der Energieerzeugung, -übertragung und -verteilung wird hauptsächlich mit Drehstrom gearbeitet. Der Begriff „Drehstrom“ kommt aus der technischen Gegebenheit, dass die Systeme mit dem räumlich rotierenden Magnetfeld des Generators verbunden sind: Dem Drehfeld. Alle Phasen in einem Mehrphasensystem werden mit der gleichen Frequenz erzeugt, die bekanntermaßen in Europa bei 50 Hz liegt. Die erzeugten Phasen werden am Ort der Erzeugung, also dem Generator, und hinter den Verbrauchern verschaltet. Im Drehstromsystem, also einem Drei-Phasen-System, stehen dafür die Sternschaltung oder die Dreiecksschaltung zur Verfügung. Im symmetrischen Fall erzeugt der Generator so viele Phasen, wie Wicklungen im Rotor verbaut sind. Die Wicklungen sind dabei mit immer im gleichen Winkel verbaut. Dieser Winkel bekommt den griechischen Buchstaben α zugeordnet:

$$\alpha = \frac{2\pi}{m} \quad (7.83)$$

Das m steht in der Formel für die Anzahl an Phasen, die in dem System erzeugt werden. Bei einem Drehstromsystem sind drei Phasen vorhanden. Daraus ergibt sich ein α von 120° .

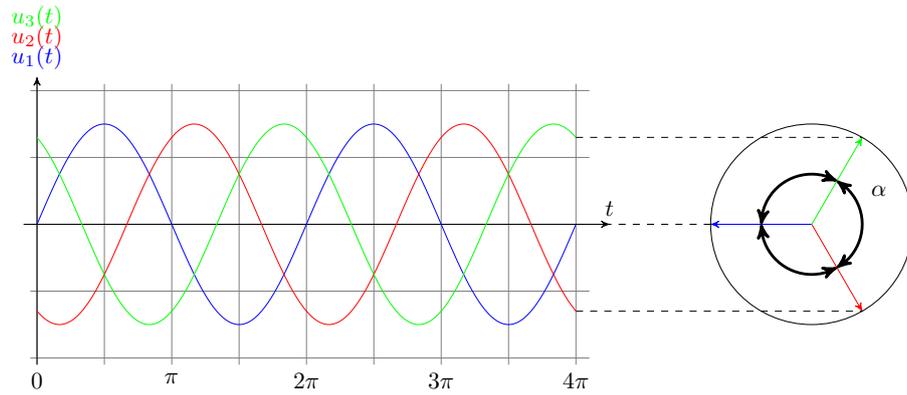


Abbildung 7.35: **Drei Phasen des Drehstroms.** Die drei Phasen des Drehstromsystems sind alle zueinander um 120° phasenverschoben. Hieraus ergibt sich der Winkel α von 120° .

Im nächsten Schritt soll ein Drehoperator aus dem Winkel α abgeleitet werden. Dieser Drehoperator dient der Umrechnung der Spannungen und Ströme zur Bezugsspannung/zum Bezugsstrom.

$$\underline{a} = e^{j\alpha} = e^{j\frac{2\pi}{m}} \quad (7.84)$$

Für $m = 3$:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \underline{a}^2 &= e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a}^* \\ \underline{a}^3 &= e^{j2\pi} = 1 \\ \underline{a}^4 &= e^{j\frac{8\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a} \\ \underline{a}^5 &= e^{j\frac{10\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a}^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Merke: Drehoperator

Der Winkel α gibt die Phasenverschiebung zwischen den Phasen an. Mithilfe des Drehoperators \underline{a} können Spannungen und Ströme umgerechnet werden.

Die komplexen Spannungen der jeweiligen Außenleiter gegenüber einem Neutraleiter können mit der folgenden Gleichung formuliert werden:

$$\underline{U}_{Lm} = U_{L1} \cdot e^{-j(m-1)\alpha} \quad (7.85)$$

Die Spannung U_1 ist dabei eine reelle Bezugsgröße für das Mehrphasensystem.

Nun werden die Gleichungen für den Drehoperator mit der für die Spannung zusammengebracht und ergeben folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{L1} &= \underline{a}^m \cdot U_{L1} = 1 \cdot U_{L1} \\ \underline{U}_{L2} &= \underline{a}^{m-1} \cdot U_{L1} \\ &\vdots \\ \underline{U}_{L_{m-1}} &= \underline{a}^2 \cdot U_{L1} \\ \underline{U}_{Lm} &= \underline{a} \cdot U_{L1}\end{aligned}$$

Mit einer Anzahl von drei Phasen, also $m = 3$, ergibt sich folgender Zusammenhang der drei Spannungen und dem Drehoperator:

$$\underline{U}_{L1} + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{L3} = U_1(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) \quad (7.86)$$

Anmerkung:

In der Literatur sind die Indizes für die Spannungen nicht immer einheitlich gewählt. Die häufigste Alternative sind die Buchstaben u, v, w für die Phasen 1, 2, 3. Es werden noch weitere Indizes verwendet, die hier jedoch nicht weiter erwähnt werden sollen.

In Abb. 7.36 soll nochmals deutlich gemacht werden, wie sich die Drehoperatoren im Komplexen zusammensetzen.

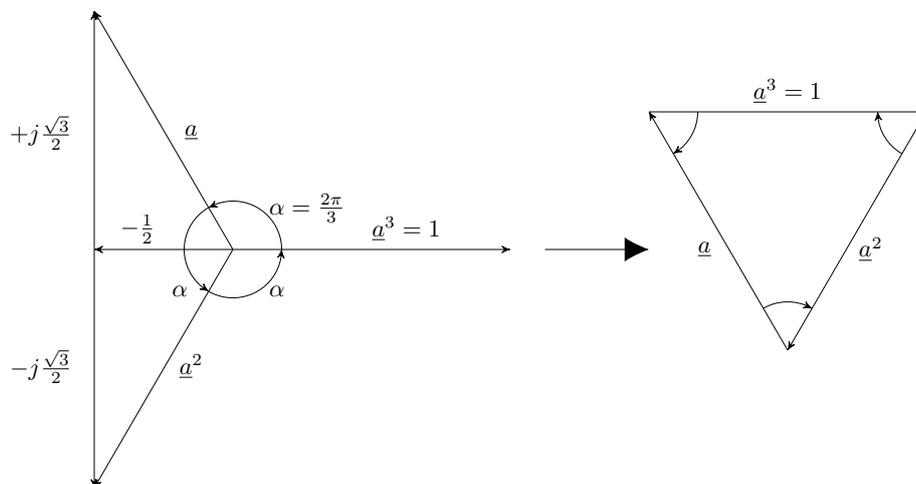


Abbildung 7.36: **Zeigerdiagramm des Drehoperators im Drehstromsystem.** Werden die Drehoperatoren aufsummiert, ergibt sich als Ergebnis Null.

Wird dem Weg über die drei Drehoperatoren gefolgt, gelangt man zurück zum Ursprung und erhält Null.

$$\begin{aligned}1 + \underline{a} + \underline{a}^2 &= 0 \\ \underline{U}_{L1} + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{L3} &= 0\end{aligned}$$

7.7.1.1 Verkettete Systeme im Stern

In den folgenden Kapiteln soll darauf eingegangen werden, welche Formen der Verschaltung in einem Drehstromsystem vorkommen können. Zuerst soll auf die sogenannte Sternschaltung eingegangen werden. Sternschaltung bedeutet, dass die Stränge so zusammengeführt werden, dass sich ein sogenannter Sternpunkt bildet. Ein System kann sowohl auf Generator-, als auch auf Verbraucherseite verschaltet werden. In Abb. 7.37 sind die die typischen Komponenten einer Sternschaltung in einem dreiphasigen Ersatzschaltbild eingetragen. Für jede Phase, die der Generator erzeugt wird eine Spannungsquelle eingetragen. Wenn der Generator eine Sternschaltung aufweist, werden in dem ESB auf die einzelnen Spannung in einem Knotenpunkt zusammengeführt. Dieser Knotenpunkt soll den Buchstaben N_Q erhalten. Von jeder Spannungsquelle geht ein Strang aus, welcher die jeweilige Phase widerspiegeln soll. Auf Grund der physikalischen Gegebenheiten weisen die Komponenten, die nach dem Generator angeschlossen sind, also vor allem die Leitung und der Verbraucher, sowohl Wirk- wie auch Blindwiderstände auf. Diese werden in dem ESB zu jeweils einer Impedanz pro Strang zusammengefasst. Die Impedanzen der Stränge werden in der Sternschaltung wie auch die Spannungsquellen zu dem Knotenpunkt N_V zusammengeführt. In einem System, in dem sowohl die Generator- als auch die Verbraucherseite im Stern verschaltet sind, kann es zu den Strängen der Phasen noch einen Neutralleiter oder Rückleiter geben, welcher die beiden Knotenpunkte miteinander verbindet.

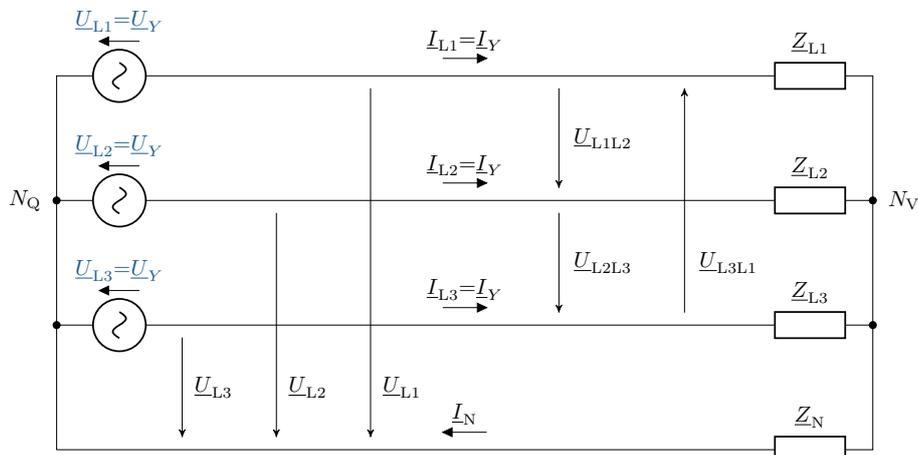


Abbildung 7.37: **ESB für ein Drehstromsystem.** Erzeugern und Verbraucher im Stern und ein Neutralleiter zwischen den Knotenpunkten.

Spannungen

Grundsätzlich gibt es in einem Drehstromsystem drei Spannungen, welche spezifisch genannt werden sollten:

- Außenleiter-Neutralleiter-Spannung (Sternspannung) U_Y : Spannung des Leiters gegenüber dem Neutralleiter (U_{L1} , U_{L2} , U_{L3})
- Außenleiter-Spannung (verkettete Spannung) U : Spannung zwischen zwei Leitern (U_{L1L2} , U_{L2L3} , U_{L3L1}) – diese Spannung wird auch als Dreiecksspannung bezeichnet
- Strangspannung U_{str} : Spannung über die Impedanz des Leiters gegenüber dem Neutralleiter. Je nach Verschaltung ist die Strangspannung entweder gleich der Sternspannung oder der Dreiecksspannung

Ströme

Für Ströme in einem Sternsystem ist es hilfreich das 1. Kirchhoffsche Gesetz anzuwenden. Die Summe der Ströme der Stränge muss gleich dem Strom im Neutralleiter sein:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} \quad (7.87)$$

Im Bezug zu den Spannungen und Impedanz ergibt sich nach dem Ohmschen Gesetz:

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{L2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{L3}}{\underline{Z}_3} = \underline{U}_{1m}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{2m}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{3m}\underline{Y}_3 \quad (7.88)$$

Wenn von einem symmetrischen System gesprochen wird, gilt das nicht nur für den Generator, sondern auch für die Impedanzen. Demnach sind die Impedanzen der drei Stränge alle gleich groß:

$$\underline{Z}_{L1} = \underline{Z}_{L2} = \underline{Z}_{L3} = \underline{Z} \quad (7.89)$$

Wird dieser Zusammenhang für ein symmetrisches System für die Gleichung 7.89 berücksichtigt, kann die Impedanz herausgezogen werden. Nun ist bereits bekannt, dass die Summe der Spannungen in einem symmetrischen System null ergibt. Somit lässt sich beweisen, dass die Summe der Ströme auch null ergeben muss.

$$\underline{I}_N = \frac{1}{\underline{Z}}(\underline{U}_{L1} + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{L3}) = 0 \quad (7.90)$$

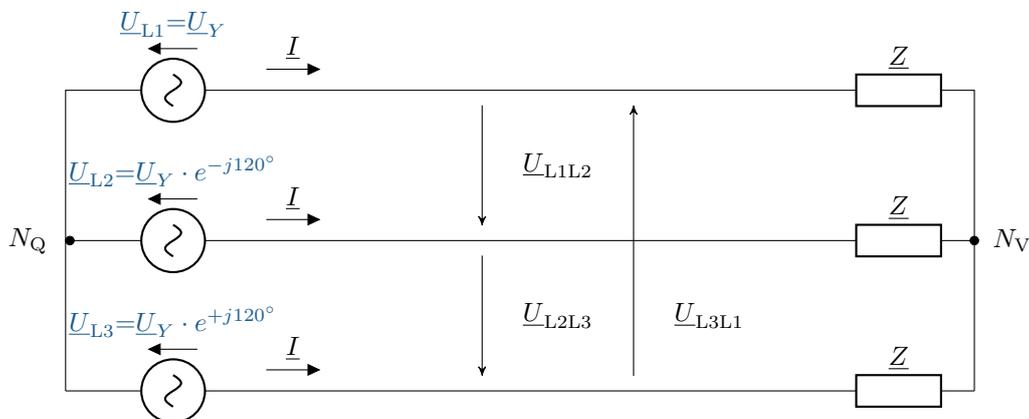


Abbildung 7.38: **Dreiphasiges Ersatzschaltbild Stern-Stern.** ESB mit symmetrischen Verbrauchern im Stern

Um nicht immer das vollständige dreiphasige ESB zeichnen zu müssen, wie in Abb 7.38, gibt es die Möglichkeit, ein vereinfachtest einphasiges ESB zu zeichnen. Wichtig bei der Aufstellung des einphasigen ESB (natürlich auch bei jedem anderen ESB) ist, dass die korrekten Bezeichnungen für die Ströme, Spannungen und Impedanzen über die Indizes gewählt wird. Für die Sternschaltung ist das einphasige ESB in Abb. 7.39 abgebildet.

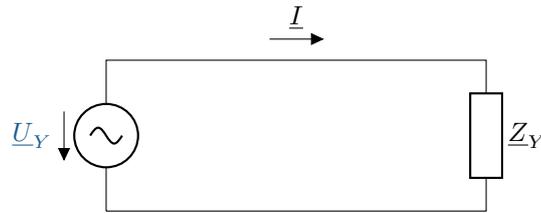


Abbildung 7.39: **Einphasiges Ersatzschaltbild Stern-Stern.** ESB mit symmetrischen Verbrauchern im Stern

Merke: Symmetrische Komponenten

Symmetrischen Komponenten beschreiben eine **gleiche Belastung der Phasen**, beispielsweise in einem Dreiphasensystem. Hier werden alle drei Phasen durch identische Verbraucher belastet.

7.7.1.2 Verkettete Systeme im Dreieck

Alternativ zu der Verschaltung im Stern können die Quellen und Verbraucher im Dreieck verschaltet werden. Für die Generatorseite gilt jedoch, dass diese in den meisten Fällen im Stern verschaltet ist. Hintergrund ist, dass bei kleinsten unsymmetrien Ausgleichströme fließen, die den Betrieb des Generators beeinflussen würden. Das soll möglichst vermieden werden, wodurch eine Sternschaltung eine bessere Betriebsweise darstellt. Deswegen wird angenommen, dass die Generatorseite grundlegend im Stern verschaltet ist. Wenn also von einer Dreieckschaltung die Rede ist, wird, außer es wird explizit erwähnt, nur die Verbraucherseite gemeint.

Es wurde bereits definiert, dass die Außenleiter-Spannung auch Dreiecksspannung genannt wird. Nach dem Maschen-Gesetz ergibt sich die Dreiecksspannung zweier Leiter aus der Differenz der jeweiligen Sternspannung:

$$\underline{U}_{L1L2} = \underline{U}_{L1} - \underline{U}_{L2} \quad (7.91)$$

Wenn nun der Wert der jeweiligen Außenleiterspannung errechnet werden soll, müsste nach der Gleichung 7.91 komplex gerechnet werden. Es kann jedoch mit Hilfe einer trigonometrischen Herleitung ein Verhältnis zwischen Sternspannung und Dreiecksspannung beschrieben werden.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{G}{H} \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\underline{U}_{L1L2}}{\underline{U}_{L1}} \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\underline{U}_{L1L2}}{\underline{U}_{L1}} \end{aligned} \quad (7.93)$$

$$\underline{U}_{L1} = \frac{\underline{U}_{L1L2}}{\sqrt{3}}$$

Merke: Stern-Dreieck-Umrechnungsfaktor

Die Sternspannung und die Dreieckspannung können über den Umrechnungsfaktor $\sqrt{3}$ ineinander umgewandelt werden:

$$U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}}$$

In Abb. 7.40 soll mit Hilfe des Zeigerdiagramm der komplexen Drehspannungen das Verhältnis zwischen Stern- und Dreieckspannung aufgezeigt werden. Dafür werden die trigonometrischen Grundlagen genommen, um die Länge der Außenleiterspannung (also der Dreieckspannung) anders darzustellen. In Gleichung 7.92 ist zuerst allgemein beschrieben, wie in einem Mehrphasensystem der Sinus verwendet werden kann. Diese Gleichung gilt allgemein, unabhängig wie viele Phasen das System aufweist. In Gleichung 7.93 wird für m 3 eingesetzt. Der Winkel wird dadurch immer halb so groß, wie der eigentliche Winkel zwischen den Phasen wäre. Dadurch ist die Gegenkathete des Sinus die halbe Dreieckspannung. Mit Umstellung und Umwandlung des Wertes $\sin(\frac{\pi}{3})$ in $\frac{\sqrt{3}}{2}$ erhält man schließlich den Faktor, um Stern- und Dreieckspannung umrechnen zu können.

In der Praxis wird die Sternspannung immer gekennzeichnet mit einem Sternsymbol als Index, bei der Dreieckspannung wird meistens auf ein Index verzichtet.

$$U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{U}{\sqrt{3}} \quad (7.94)$$

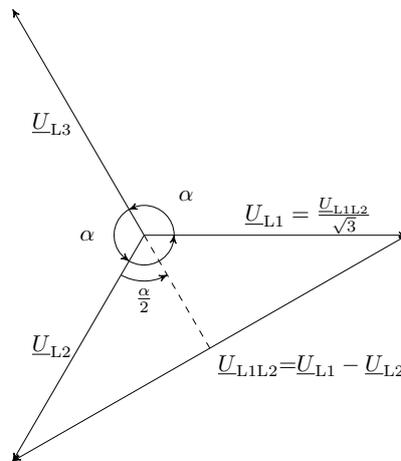


Abbildung 7.40: Zeigerdiagramm zur Darstellung der Herleitung des Faktors zwischen Stern- und Dreieckschaltung. Die verkettete Spannung zwischen zwei Außenleitern \underline{U}_{L1L2} lässt sich über den Umrechnungsfaktor $\sqrt{3}$ in die Außenleiterspannung \underline{U}_{L1} umwandeln.

Wie in der Abbildung 7.41 zu sehen, sind die Impedanzen der Verbraucher nun so geschaltet, dass es keinen Sternpunkt mehr gibt. In dieser Schaltung entsprechen die Strangspannungen nun den Außenleiter- oder Dreieckspannung.

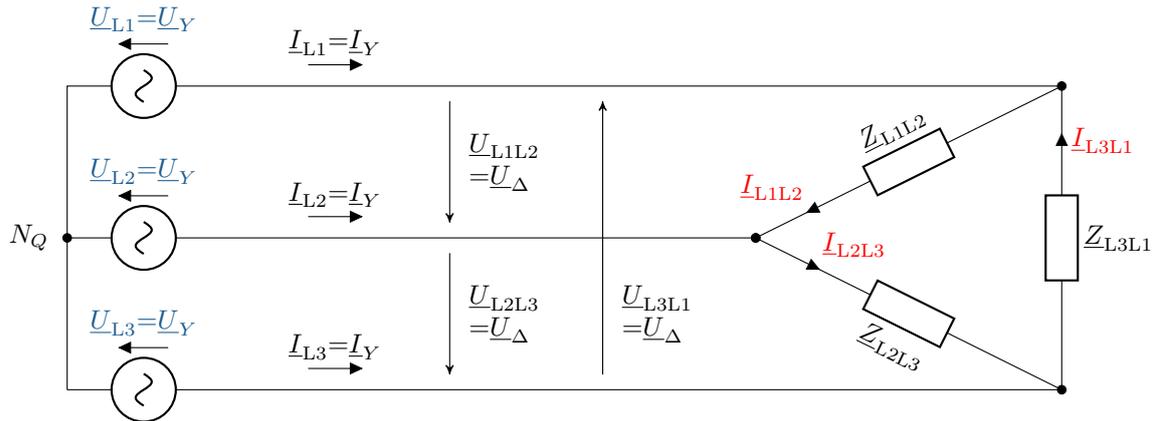


Abbildung 7.41: **Dreiphasiges Ersatzschaltbild Stern-Dreieck.** ESB mit Erzeugern im Stern und Verbrauchern im Dreieck.

Die Ströme zwischen den Strängen können aus der Knotenregel folgendermaßen ermittelt werden:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L1L2} - \underline{I}_{L3L1} \quad (7.95)$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{L2L3} - \underline{I}_{L1L2} \quad (7.96)$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L3L1} - \underline{I}_{L2L3} \quad (7.97)$$

Wie auch bei der Sternschaltung kann im symmetrischen Fall gesagt werden, dass alle Impedanzen den gleichen Wert haben. Daraus ergibt sich für die Ströme im Strang:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L1L2} - \underline{I}_{L3L1} = \frac{\underline{U}_{L1L2} - \underline{U}_{L3L1}}{\underline{Z}} = \frac{U_Y}{\underline{Z}} \cdot (1 - a^2 - a + 1) = 3 \cdot \frac{U_Y}{\underline{Z}} \quad (7.98)$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{L2L3} - \underline{I}_{L1L2} = \frac{\underline{U}_{L2L3} - \underline{U}_{L1L2}}{\underline{Z}} = \frac{U_Y}{\underline{Z}} \cdot (a^2 - a - 1 + a^2) = 3 \cdot a^2 \cdot \frac{U_Y}{\underline{Z}} \quad (7.99)$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L3L1} - \underline{I}_{L2L3} = \frac{\underline{U}_{L3L1} - \underline{U}_{L2L3}}{\underline{Z}} = \frac{U_Y}{\underline{Z}} \cdot (a - 1 - a^2 + a) = 3 \cdot a \cdot \frac{U_Y}{\underline{Z}} \quad (7.100)$$

Aus diesen Umformungen geht hervor, dass die Ströme sich nur durch den Drehoperator a unterscheiden. Äquivalent zu der Umrechnung von der Stern- zur Dreiecksspannung kann auch ein Verhältniss zwischen Strang- und Dreiecksstrom aufgestellt werden. Nach gleicher Herleitung, wie in Abb. 7.40 zu sehen, nur die Spannung durch die passenden Stromwerte ersetzt, ergibt sich folgendes Verhältniss:

$$I_{\text{str}} = \sqrt{3} \cdot I_{\Delta} \quad (7.101)$$

Mit den vorhandenen Angaben kann nun auch ein einphasiges ESB für die Dreieckschaltung aufgestellt werden (siehe Abb. 7.42).

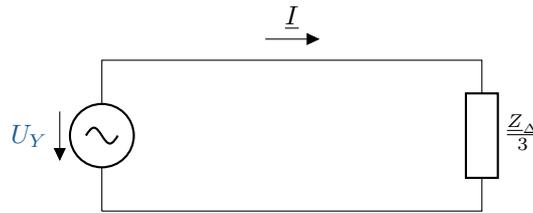


Abbildung 7.42: **Einphasiges Ersatzschaltbild Stern-Dreieck.** ESB einer Dreieckschaltung mit symmetrischen Verbrauchern

7.7.1.3 Leistung im symmetrischen Drehstromnetz

Die Berechnung von Leistung basiert, wie in allen elektrischen System, auf der Gleichung $P = U \cdot I$. Für das Drehstromsystem gilt die Besonderheit, dass die Leistung pro Phase berechnet werden muss. Liegt ein symmetrisches System vor, sind die Ströme und Spannungen pro Phase gleich und dementsprechend muss kann das Ergebnis aus einer Phase mit 3 multipliziert werden.

$$\begin{aligned}
 S &= 3 \cdot I_{\text{str}} \cdot U_Y = 3 \cdot I_{\text{str}} \cdot \frac{U_{\Delta}}{\sqrt{3}} \\
 &= 3 \cdot I_{\Delta} \cdot U_{\Delta} = 3 \cdot \frac{I_{\text{str}}}{\sqrt{3}} \cdot U_{\Delta} \\
 &= \sqrt{3} \cdot U_{\Delta} \cdot I_{\text{str}}
 \end{aligned} \tag{7.102}$$

Aus der Formel 7.102 geht hervor, dass es für die Leistungsberechnung keinen Unterschied macht, in welcher Schaltung gerechnet wird. Es muss nur darauf geachtet werden, mit welchen Spannungen und Strömen gerechnet wird (Dreieck oder Stern).

Anmerkung:

Die Notation der Indizes zu Dreiecks- oder Stern-Werten ist in der Literatur nicht eindeutig. Meistens wird für die Dreiecksspannung (Außenleiterspannung) und dem Strangstrom kein Index angegeben $U_{\Delta} = U$ und $I_{\text{str}} = I$, sondern nur für die Sternspannung und dem Dreieckstrom.

Vergleicht man direkt die Leistung einer Dreieckschaltung und einer Sternschaltung, erhält man unterschiedliche Ergebnisse.

Für die Sternschaltung erhält man folgenden Wert:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot U \cdot \frac{U_Y}{Z} = \frac{U^2}{Z} \tag{7.103}$$

Für die Dreieckschaltung erhält man wiederum:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot U \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{U}{Z} = 3 \cdot \frac{U^2}{Z} \tag{7.104}$$

Demnach ist der Leistungsumsatz bei gleichen Impedanzen in einer Dreieckschaltung um den Faktor 3 größer als in einer Sternschaltung.

7.7.2 Unsymmetrische Komponenten

Die Grundlagen eines Drehstromsystems wurden im vorangegangenen Kapitel erläutert. Es wurde jedoch stets vorausgesetzt, dass sowohl die Erzeugung als auch die Verbraucher symmetrisch sind. Nun soll betrachtet werden, wie sich das System verhält, wenn Unsymmetrien vorliegen. Es bleibt

jedoch erstmal dabei, dass die Generatorseite symmetrisch und im Stern verschaltet ist. Bleibt die Erzeugung star, können drei unterschiedliche Schaltungsarten vorliegen:

- Vierleiternetz in Sternschaltung
- Dreileiternetz in Sternschaltung
- Dreileiternetz in Dreieckschaltung

Merke: Unsymmetrische Komponenten

Unsymmetrischen Komponenten beschreiben im Gegensatz zu symmetrischen Komponenten die **ungleiche Belastung der Phasen** durch unterschiedliche Verbraucher.

7.7.2.1 Vierleiternetz in Sternschaltung

Der Aufbau eines Vierleiternetz in Sternschaltung wurde als ESB in Abb. 7.37 dargestellt. Der Rückleiter wird dabei an die beiden Sternpunkte angeschlossen und verbindet damit Generator- und Verbraucherseite. Dadurch, dass die Sternspannung symmetrisch sind (aus der Vorgabe, dass die Generatorseite symmetrisch ist), sind auch die Verbraucherspannungen spannungssymmetrisch. Die Ströme hingegen weichen durch die unterschiedlichen Impedanzen von einander ab. So ist der Strom im Rückleiter in der Regel ungleich Null.

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} \quad (7.105)$$

Logischerweise kann dann auch nicht mehr die Leistung so berechnet werden, wie in Formel 7.102 dargestellt. Es muss nun jeder Leiter einzeln berechnet und schließlich addiert werden.

$$\underline{S} = \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{L3} \quad (7.106)$$

7.7.2.2 Dreileiternetz in Sternschaltung

Prinzipiell gelten die gleichen Voraussetzungen im Dreileiternetz in Sternschaltung wie im Vierleiternetz. Der Unterschied liegt darin, dass der Strom nicht im Rückleiter abfließen kann und somit Auswirkung auf die anderen Leiter hat (s. Abb. 7.43). Äquivalent gilt das auch für die Spannung. Da kein Spannungsabfall im Rückleiter stattfindet, wirkt sich das auf die Spannung über den Verbrauchern aus. Es entsteht eine Spannungsdifferenz zwischen den beiden Sternpunkten, die mit den Spannungen über den Verbrauchern erst berechnet werden muss. Bei der Ermittlung der gesuchten Werte, können zwei Methoden angewendet werden. Für die erste Methode werden die Impedanzen rechnerisch in eine Dreieckschaltung umgewandelt, damit einfach und mit bekannten Methoden gerechnet werden kann. Denn in der Dreieckschaltung sind die Spannungen über die Impedanzen gleich den Leiterspannungen. Auch die Außenleiterströme lassen sich relativ einfach bestimmen.

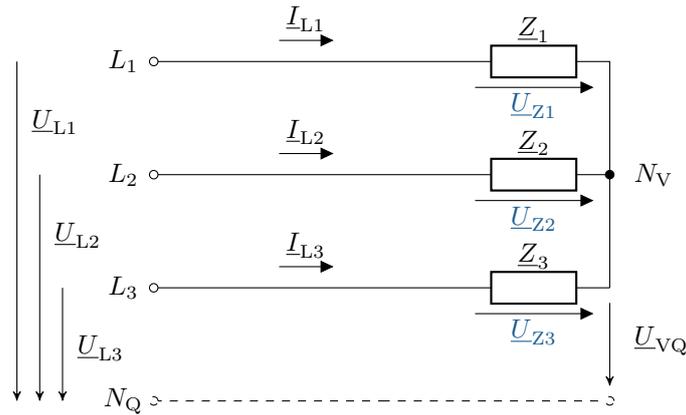


Abbildung 7.43: **Vereinfachtes ESB.** Dreileiternetz in Sternschaltung mit unsymmetrischen Verbrauchern

Bei dem alternativen Lösungsweg können mit den bekannten Gesetzen nach Ohm und Kirchhoff Gleichungen aufgestellt werden mit den bekannten Werten des Systems. Für die Differenzspannung zwischen den beiden Sternpunkten kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$\underline{U}_{VQ} = \frac{\frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{L2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{L3}}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{U}_{L1} \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_{L2} \cdot \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{U}_{L3} \cdot \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1} \quad (7.107)$$

Die Leistung berechnet sich wie bekannt aus der Summe der Leistungen der einzelnen Phasen. Wichtig ist jedoch, dass nicht mit den Außenleiterspannung gerechnet wird, sondern mit den Spannungen über die Impedanzen:

$$\underline{S} = \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{Z1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{Z2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{Z3} \quad (7.108)$$

Theoretisch könnte mit dieser Formel die Berechnung erfolgen. Jedoch werden mit Messungen nicht die Werte gemessen, die für diese Formel benötigt werden. (Wie Messungen in einem Drehstromsystem durchgeführt werden, wird noch in einem folgenden Kapitel erklärt.) Wird die Formel für die Leistung wie folgt umgestellt, erkennt man, dass die Summe der Leiterströme Null ergeben müssen und somit der letzte Term wegfällt.

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{L3} - \underline{U}_{VQ} \cdot (\underline{I}_{L1}^* + \underline{I}_{L2}^* + \underline{I}_{L3}^*) \\ &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{L3} \end{aligned} \quad (7.109)$$

Hier sieht man, dass diese Formel für die Leistung die gleiche ist, wie im Vierleiternetz in Sternschaltung. Es kann jedoch hier eine Vereinfachung vorgenommen werden, da mit der Knotenregel ein Strom durch die beiden anderen Ströme ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + (-\underline{I}_{L1}^* - \underline{I}_{L2}^*) \cdot \underline{U}_{L3} \\ &= (\underline{U}_{L1} - \underline{U}_{L2}) \cdot \underline{I}_{L1}^* + (\underline{U}_{L2} - \underline{U}_{L3}) \cdot \underline{I}_{L2}^* \\ &= \underline{U}_{L3L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L2L3} \cdot \underline{I}_{L2}^* \end{aligned} \quad (7.110)$$

7.7.2.3 Dreileiternetz in Dreieckschaltung

Bei einer Dreieckschaltung steht kein Sternpunkt zur Verfügung, weshalb die Dreieckschaltung nur in einem Dreileiternetz ausgeführt werden kann. In der Dreieckschaltung sind auf Grund der symmetrischen Einspeisung die Außenleiterspannungen ebenfalls symmetrisch. Die Ströme stellen sich je nach den Impedanzen ein und lassen sich wie bereits bekannt errechnen:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L1L2} - \underline{I}_{L3L1} \quad (7.111)$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{L2L3} - \underline{I}_{L1L2} \quad (7.112)$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L3L1} - \underline{I}_{L2L3} \quad (7.113)$$

Die Summe der Außenleiterströme muss natürlich auch bei unsymmetrischen Strömen stets Null sein. Somit ergibt sich für die Leistungsberechnung die gleiche Rechnung wie bei der Sternschaltung im Dreileiternetz und somit auch die gleichen Umformungen.

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{I}_{L1L2}^* \cdot \underline{U}_{L1L2} + \underline{I}_{L2L3}^* \cdot \underline{U}_{L2L3} + \underline{I}_{L3L1}^* \cdot \underline{U}_{L3L1} \\ &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{L3} \end{aligned} \quad (7.114)$$

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + (-\underline{I}_{L1}^* - \underline{I}_{L2}^*) \cdot \underline{U}_{L3} \\ &= (\underline{U}_{L1} - \underline{U}_{L2}) \cdot \underline{I}_{L1}^* + (\underline{U}_{L2} - \underline{U}_{L3}) \cdot \underline{I}_{L2}^* \\ &= \underline{U}_{L3L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L2L3} \cdot \underline{I}_{L2}^* \end{aligned} \quad (7.115)$$

7.8 Mehrphasensysteme - Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem

Im Kapitel Drehstrom wurde erläutert, wie sich die Spannungen, die Ströme und die Leistungen in verschiedenen dreiphasigen Systemen zusammensetzen. In dem besonderen Fall von symmetrischen Verbrauchern konnte gezeigt werden, dass relativ einfach eine Netzberechnung durchgeführt werden kann. Vor allem die vereinfachte Darstellung durch die einphasigen Ersatzschaltbilder hilft bei der Berechnung. Durch unsymmetrische Verbraucher können diese Vereinfachungen nicht angenommen werden und führen dazu, dass umfassendere Netzberechnungen auch schon bei kleinen Netzen unübersichtlich und aufwändig werden. Unsymmetrien treten z.B. durch Netzfehler wie ein einpoliger Kurzschluss, durch Schalthandlungen, oder unsymmetrische Belastung der einzelnen Phasen auf. Die Zusammenhänge von auslösenden Ereignissen und den Ergebnissen sind allein anhand von Zahlenwerten schwer nachvollziehbar. Um auch umfassende und unsymmetrische Netze berechnen zu können, kann mit einer Transformation des bekannten Systems in drei neue Systeme abhilfe geschaffen werden. Dafür werden die drei folgenden Systeme näher betrachtet:

Lernziele: Mehrphasensysteme

Die Studierenden

- verstehen die Funktionen von Mit-, Gegen- und Nullsystem.
- können die Drehstromleistung der verschiedenen Systeme berechnen.
- können Ersatzschaltbilder für symmetrische Quellen, Lasten und Leitungen erstellen.

7.8.1 Mit-, Gegen- und Nullsystem

Grundlegend ist das Ziel der Transformation, ein unsymmetrisches System von n Zeigern in n Systeme mit symmetrischer Zeigeranordnung zu überführen. Für ein Drehstromsystem bedeutet das, dass drei Systeme geschaffen werden sollen. Jeder Leiter, also L_1 , L_2 und L_3 soll ersetzt werden durch ein System was eine symmetrische Zeigeranordnung hat. Grundlage der Transformationsvorschrift ist der bereits bekannte Drehoperator \underline{a} und \underline{a}^2 (vgl. Gleichung 7.84). Für den Strom in den jeweiligen Leitern lassen sich so die Symmetriebedingungen aufstellen (Hier ist anzumerken, dass alles was für den Strom gilt an Zusammenhängen auch für die Spannung gilt!):

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L1} &= \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{L2} &= \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{L3} &= \underline{I}_0 + \underline{a} \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \quad (7.116)$$

Die Indizes den rechten Seiten der Gleichungen stehen für die drei Systeme: Mitsystem (1), Gegensystem (2) und Nullsystem (0). Schaut man sich die Werte des Mitsystems an, dann ergeben sich durch die Drehoperatoren rechtsdrehende Phasenströme. Bei dem Gegensystem sind die transformierten Phasenströme linksdrehend angeordnet und bei dem Nullsystem sind alle Komponenten gleichgerichtet. Grundsätzlich tritt das Nullsystem nur dann auf, wenn die Summe aller Ströme des Ausgangssystems ungleich Null sind.

Im nächsten Schritt werden die sogenannten Zerlegungsgleichungen (Gleichungen 7.116) so umgestellt, dass das Verhältnisse vom Strom des Mit- Gegen- Nullsystemes zu den Leiterströmen des Ursprungssystem aufgezeigt wird.

Für den Strom im Nullsystem gilt durch Addition:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} &= 3 \cdot \underline{I}_0 + \underline{I}_1 \cdot (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) + \underline{I}_2 \cdot (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) \\ &= 3 \cdot \underline{I}_0 \end{aligned} \quad (7.117)$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}) \quad (7.118)$$

Für die Ermittlung des Stroms des Mitsystems werden zuerst die Gleichungen so multipliziert, dass die Vorfaktoren vor dem Mitstrom 1 ergeben. Danach werden die Zerlegungsgleichungen wieder addiert.

$$\underline{a}^3 = 1 ; \underline{a}^4 = \underline{a} ; \underline{a}^5 = \underline{a}^2 ; \dots$$

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad (7.119)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{I}_{L2} = \underline{a} \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_2 \quad (7.120)$$

$$\underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L3} = \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a} \cdot \underline{I}_2 \quad (7.121)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L1} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L3} &= \underline{I}_0 \cdot (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) + 3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \cdot (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) \\ &= 3 \cdot \underline{I}_1 \end{aligned} \quad (7.122)$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}_1 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L3})$$

Zum Schluss wird noch der Strom für das Gegensystem berechnet. Dabei wird das gleiche Prinzip angewendet, wie beim Mitsystem: Erst wird der Vorfaktor angepasst, dann alle Zerlegungsgleichungen addiert:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad (7.123)$$

$$\underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L2} = \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^4 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_2 \quad (7.124)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{I}_{L3} = \underline{a} \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_2 \quad (7.125)$$

$$\begin{aligned} \underline{I}_{L1} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L3} &= (1 + \underline{a}^2 + \underline{a})\underline{I}_0 + (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) \cdot \underline{I}_1 + 3 \cdot \underline{I}_2 \\ &= 3 \cdot \underline{I}_2 \end{aligned} \quad (7.126)$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}_2 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L3})$$

So ergeben sich für die Ströme aller System folgende Gleichungen:

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}) \quad (7.127)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L3}) \quad (7.128)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L3}) \quad (7.129)$$

Schaut man sich diese drei Gleichungen genau an, sieht man, dass der Leiter L1 in keiner der drei Gleichungen einen Drehoperator als Vorfaktor hat. Deshalb soll der L1 Leiter als Bezugsleiter gewählt

werden. Das bedeutet, dass das der Leiter ist, durch den eine Unsymmetrie im Originalsystem auftritt (z.B. durch einen einpoligen Erdkurzschluss). Die vorhandenen Restsymmetrien im Originalsystem können dann einfacher über die anderen Leiter betrachtet werden. Es kann natürlich jeder Leiter als Bezugsleiter genommen werden, da grundsätzlich jeder Leiter einem Index (L1, L2, L3) frei zugeordnet werden kann. So kann jedoch die anfänglich festgelegte Vordering erfüllt werden: Die Symmetrien der realen Netze und Betriebsmittel müssen vorteilhaft genutzt werden!

Beispielhaft kann ein unsymmetrischer Strom im Dreiphasensystem und die Transformation folgendermaßen aussehen:

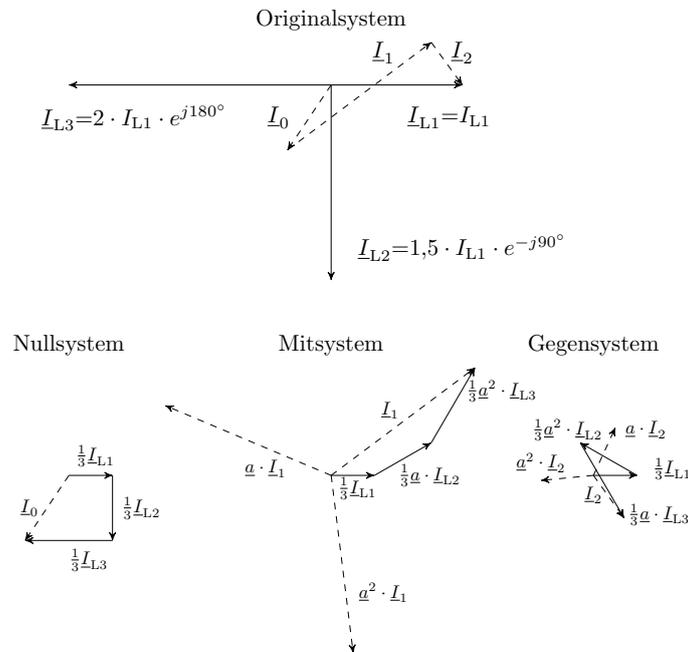


Abbildung 7.44: **Zeigerdiagramme eines unsymmetrischen Systems.** Transformationen aus einem Originalsystem in Mit-, Gegen- und Nullsystem.

Abb. 7.44 zeigt das Zeigerdiagramm einer unsymmetrischen Belastung. Im Originalsystem ist an den Zeigern zu erkennen, dass sowohl die Winkel, wie auch die Amplituden vom symmetrischen Zustand abweichen. Durch die Transformation in die drei Systeme erhält man wiederum symmetrische Zeiger, mit denen dann einfacher gerechnet werden kann. An den Drehoperatoren und dem Vorfaktor von $\frac{1}{3}$ ist mit den Zeigern gut zu erkennen, wie sich die transformierten Ströme verhalten.

Um die Transformationsgleichungen nicht immer vollständig hinschreiben zu müssen, können die Gleichungen auch in Matrixschreibweise geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix} \quad (7.130)$$

Die Schreibweise kann noch weiter vereinfacht werden, wenn der Term mit den Drehoperatoren und der Term mit Vorfaktor in einer Matrix zusammengefasst wird. Diese Matrix wird auch Symmetrierungsmatrix genannt:

$$[\underline{T}] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \quad (7.131)$$

In der Kompaktschreibweise erhält man so folgende Form:

$$[\underline{I}_{012}] = [\underline{T}] \cdot [\underline{I}_{L1L2L3}] \quad (7.132)$$

Gemäß den Rechenregeln für Matrizen kann mit der Inversen von $[\underline{T}]$ die Rücktransformation erfolgen:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (7.133)$$

$$[\underline{I}_{L1L2L3}] = [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}] \quad (7.134)$$

Merke: Mit-, Gegen- und Nullsystem

Ein System wird zur Analyse in die drei Systeme: Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem transformiert.

Das **Mitsystem** wird mit dem Index 1 versehen: \underline{I}_1

Das **Gegensystem** wird mit dem Index 2 versehen: \underline{I}_2

Das **Nullsystem** wird mit dem Index 0 versehen: \underline{I}_0

7.8.2 Drehstromleistung

Wie die Leistung berechnet wird, wurde bereits im Kapitel Drehstrom erläutert. Auch hier kann die Gleichung zur Leistungsberechnung zur Vereinfachung in Matrixschreibweise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{L1L2L3} &= \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L2} \cdot \underline{I}_{L2}^* + \underline{U}_{L3} \cdot \underline{I}_{L3}^* \\ &= [\underline{U}_{L1} \quad \underline{U}_{L2} \quad \underline{U}_{L3}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1}^* \\ \underline{I}_{L2}^* \\ \underline{I}_{L3}^* \end{bmatrix} = [\underline{U}_{L1L2L3}] \cdot [\underline{I}_{L1L2L3}]_t^* \end{aligned} \quad (7.135)$$

Mit den gegebenen Drehoperatoren können die Ströme und Spannungen in einem symmetrischen System auf jeweils eine Phase bezogen werden ($\underline{U}_{L2} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{L1}$, $\underline{U}_{L3} = \underline{a} \cdot \underline{U}_{L1}$)

Daraus ergibt sich für die Leistung die bekannte Vereinfachung:

$$\underline{S}_{L1L2L3} = \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* \quad (7.136)$$

$$= 3 \cdot \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* \quad (7.137)$$

Nun kann mit der Matrixschreibweise die Transformation in die neuen Systeme berechnet werden:

$$[\underline{U}_{L1L2L3}] = ([\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{U}_{012}]) = [\underline{U}_{012}] \cdot [\underline{T}]^{-1} \quad (7.138)$$

$$[\underline{I}_{L1L2L3}]^* = ([\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}])^* = [\underline{T}]^{-1*} \cdot [\underline{I}_{012}]^* \quad (7.139)$$

$$\underline{S}_{L1L2L3} = [\underline{U}_{012}]_t \cdot [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{T}]^{-1*} \cdot [\underline{I}_{012}]^* \quad (7.140)$$

$$= [\underline{U}_{012}]_t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}^* \cdot [\underline{I}_{012}]^*$$

$$= [\underline{U}_{012}]_t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot [\underline{I}_{012}]^*$$

$$= [\underline{U}_{012}] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot [\underline{I}_{012}]^*$$

$$= 3 \cdot (\underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* + \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^*) = 3 \cdot \underline{S}_{012}$$

7.8.3 Ersatzschaltbilder

ESB dienen grundlegend immer der einfacheren Betrachtung und einem erleichterten Verständniss der Komponenten. Es sollen sich nun verschiedene Betriebsmittel angeschaut werden und wie sich die Transformationen in verschiedenen Netzsituationen verhalten.

7.8.3.1 Symmetrische Spannungsquelle

Symmetrische Spannungsquellen findet man z.B. bei der Netzeinspeisung und auch bei Synchronmaschinen. Im ersten Schritt wird sich das Ausgangssystem angeschaut. Die Zusammenhänge zwischen der Sternspannung und den einzelnen Phasen ist bereits aus dem Kapitel ??? bekannt. Mit der Formel für die Transformation (vgl. 7.130) lässt sich nun rechnerisch zeigen, dass in einem solchen symmetrischen Fall die Spannungen des Gegen- und Nullsystems 0 ergeben.

Lediglich im Mitsystem tritt eine treibende Spannung, in Höhe der Sternspannung auf:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{L1} \\ \underline{U}_{L2} \\ \underline{U}_{L3} \end{bmatrix} \quad (7.141)$$

$$[\underline{U}_{012}] = [\underline{T}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_Y \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_Y \\ \underline{a} \cdot \underline{U}_Y \end{bmatrix} \quad (7.142)$$

Löst man die Gleichungen für die transformierten Systeme auf erhält man die Spannungsergebnisse:

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot U_Y \cdot (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) = 0 \quad (7.143)$$

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{3} \cdot U_Y \cdot (1 + \underline{a} \cdot \underline{a}^2 + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}) = U_Y \quad (7.144)$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{3} \cdot U_Y \cdot (1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^2 + \underline{a} \cdot \underline{a}) = 0 \quad (7.145)$$

Mit den Ergebnissen des Gegen- und Nullsystems kann bildlich gesagt werden, dass diese kurzgeschlossen sind. So können für die drei transformierten Systeme die jeweiligen ESB erstellt werden:

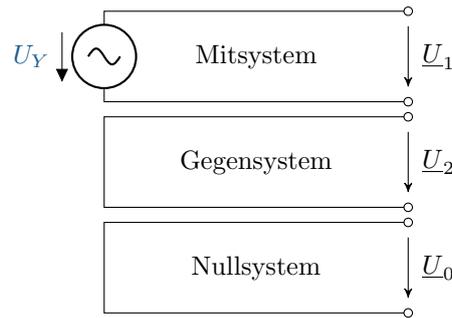


Abbildung 7.45: **Ersatzschaltbilder der transformierten Spannungsquelle.** Bei der symmetrischen Spannungsquelle verfügt nur das ESB des Mitsystems über die Spannungsquelle.

In der Abbildung 7.45 soll nochmal deutlich hervorgehoben werden, dass einerseits drei einzelne System gebildet werden und weiter, dass in dem spezial Fall der symmetrischen Quellen nur in einem der Systeme eine Spannung auftaucht.

7.8.3.2 Symmetrische Last

Für die Betrachtung der Lasten soll eine Sternschaltung mit Rückleiter gewählt werden. Es wird in jedem Leiter, auch im Rückleiter, eine Impedanz Z angenommen. Für den symmetrischen Fall werden die Impedanzen als gleich groß angenommen, lediglich die Impedanz im Rückleiter kann von den anderen abweichen und bekommt einen eigenen Index.

Für das Originalsystem werden die Gleichung für die Spannung folgendermaßen aufgestellt:

$$\underline{U}_{L1} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{L1} + \underline{Z}_E \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}) \quad (7.146)$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{Z}_E \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}) \quad (7.147)$$

$$\underline{U}_{L3} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{L3} + \underline{Z}_E \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}) \quad (7.148)$$

Auch hier kann mittels Matrixschreibweise vereinfacht werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{L1} \\ \underline{U}_{L2} \\ \underline{U}_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z} + \underline{Z}_E & \underline{Z}_E & \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_E & \underline{Z} + \underline{Z}_E & \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_E & \underline{Z}_E & \underline{Z} + \underline{Z}_E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix} \quad (7.149)$$

Mit...

$$[\underline{Z}_{L1L2L3}] = \begin{bmatrix} \underline{Z} + \underline{Z}_E & \underline{Z}_E & \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_E & \underline{Z} + \underline{Z}_E & \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_E & \underline{Z}_E & \underline{Z} + \underline{Z}_E \end{bmatrix} \quad (7.150)$$

...ergibt sich

$$[\underline{U}_{L1L2L3}] = [\underline{Z}_{L1L2L3}] \cdot [\underline{I}_{L1L2L3}] \quad (7.151)$$

Wird mit den Transformationsgleichungen umgeformt folgt:

$$[\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{U}_{012}] = [\underline{Z}_{L1L2L3}] [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}] \quad (7.152)$$

Bei den symmetrischen Spannungsquellen konnte aus der Transformation die Spannung abhängig vom Originalsystem errechnet werden. Das gleiche soll auf für die Impedanzen für die Verbraucher geschafft werden. Dafür müssen die aufgestellten Gleichunge noch so umgeformt werden, dass sich ein Verhältnis von transformierten Impedanzen und Impedanzen des Originalsystem ergibt. Um das zu erreichen werden beide Seiten erst mit $[\underline{T}]$ erweitert und dann auf Grundlage des Ohmschen-Gesetzes umgestellt.

$$[\underline{T}] \cdot [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{U}_{012}] = [\underline{T}] \cdot [\underline{Z}_{L1L2L3}] [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}] \quad (7.153)$$

$$[\underline{U}_{012}] = [\underline{T}] \cdot [\underline{Z}_{L1L2L3}] [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}] \quad (7.154)$$

$$[\underline{Z}_{012}] = [\underline{T}] \cdot [\underline{Z}_{L1L2L3}] [\underline{T}]^{-1} \quad (7.155)$$

Wird die Matrixoperation der letzten Gleichung durchgeführt, dann ergibt sich der gewünschte Zusammenhang von Original- und Transformationssystem.

$$[\underline{Z}_{012}] = \begin{bmatrix} \underline{Z} + 3\underline{Z}_E & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z} \end{bmatrix} \quad (7.156)$$

Nun können auch für die symmetrischen Lasten die jeweiligen ESB der transformierten Systeme aufgestellt werden:

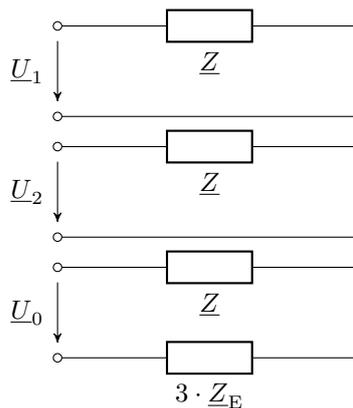


Abbildung 7.46: **Ersatzschaltbilder der transformierten Last.** Bei der symmetrischen Last weisen die drei Systeme alle eine symmetrische Impedanz auf, jedoch verfügt das Nullsystem zusätzlich noch über die dreifache Impedanz für einen Rückleiter.

In Abb. 7.46 treten im Mit- und Gegensystem die gleichen Impedanzen auf. Sollten die Verbraucher im Dreieck verschaltet sein, müssten die Impedanzen mit den bekannten Verhältnissen in Sterngrößen umgerechnet werden. Für die Nullimpedanzen gilt, dass Ströme nur fließen, wenn auch in der Realität eine Verbindung zu einem Stern besteht. Dann treten die Impedanzen im Rückleiter mit dreifachem Wert auf.

7.8.3.3 Symmetrische Leitungen

Die Leitung ist die Verbindung zwischen der Spannungsquelle und den Verbrauchern. Bisher wurden in den Betrachtungen zum Drehstrom nur unterschieden zwischen Erzeugung und Verbrauchern. Mit den Leitungen kommt nun eine zusätzliche Komponente hinzu, die separat betrachtet werden soll. Leitungen weisen grundsätzlich Eigenimpedanzen, Koppelimpedanzen und Leiter-Erde-Impedanzen auf. Die Leiter-Erde-Impedanzen können jedoch vernachlässigt werden. So hat jeder Leiter eine Eigenimpedanzen und zwei Koppelimpedanzen, also zu den jeweils anderen Leitern. Die Spannung für

diese Berechnung wird definiert als Differenz der Spannungen am Anfang und am Ende der Leitung. So lässt sich die Matrix-Gleichung für ein Leitungssystem aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{L1A} - \underline{U}_{L1B} \\ \underline{U}_{L2A} - \underline{U}_{L2B} \\ \underline{U}_{L3A} - \underline{U}_{L3B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_S & \underline{Z}_K & \underline{Z}_K \\ \underline{Z}_K & \underline{Z}_S & \underline{Z}_K \\ \underline{Z}_K & \underline{Z}_K & \underline{Z}_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix} \quad (7.157)$$

Daraus kann wieder eine Kompaktschreibweise abgeleitet werden (Mit $\underline{U}_{L1A} - \underline{U}_{L1B} = \underline{U}_{L1}, \dots$):

$$[\underline{U}_{L1L2L3}] = [\underline{Z}_{L1L2L3}] \cdot [\underline{I}_{L1L2L3}] \quad (7.158)$$

Es liegt nun eine sehr ähnliche Gleichung vor, wie die bei den symmetrischen Verbrauchern. Auch hier soll die Gleichung so umgeformt werden, dass eine direkte Abhängigkeit von Originalsystem und Transformationssystem vorliegt. Da die Gleichung grundlegend gleich aufgebaut ist, können die gleichen Erweiterungen und Umformungen durchgeführt werden, wie bereits bei den symmetrischen Verbrauchern:

$$[\underline{Z}_{012}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_S + 2 \cdot \underline{Z}_K & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_S - \underline{Z}_K & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_S - \underline{Z}_K \end{bmatrix} \quad (7.159)$$

Wichtig ist bei der Umformung immer, dass die umgeformte Impedanzmatrix nur aus Werten auf der Hauptdiagonale besteht, damit es nur direkte Zusammenhänge zwischen den einzelnen Leitern und den Transformationssystemen gibt.

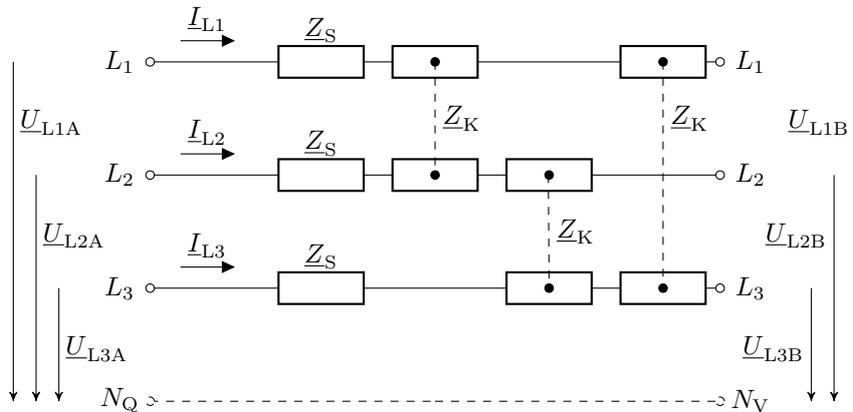


Abbildung 7.47: **Ersatzschaltbilder der transformierten Leitung.** ESB einer symmetrischen Leitung mit den drei Phasen L_1 , L_2 und L_3 sowie gestrichelt die angedeutete Leitung der Sternpunktbehandlung.

Abb. 7.47 zeigt das ESB der drei Systeme für symmetrische Leitungen. Die gestrichelte Leitung soll die Sternpunktbehandlung auf Erzeugungs- und Verbraucherseite widerspiegeln zur Referenz der Sternspannungen.

Modul 8

Schaltungen variabler Frequenz

8.1 Wiederholung

Um das frequenz- und zeitabhängige Verhalten elektrischer Netzwerke zu beschreiben, werden in diesem Kapitel kurz einige wichtige Grundlagen zusammengefasst.

Zur Bearbeitung vorausgesetzt werden Kenntnisse über elektrische Grundgrößen, lineare passive Bauteile R , L und C , Netzwerkberechnungen, sowie die komplexe Wechselstromrechnung.

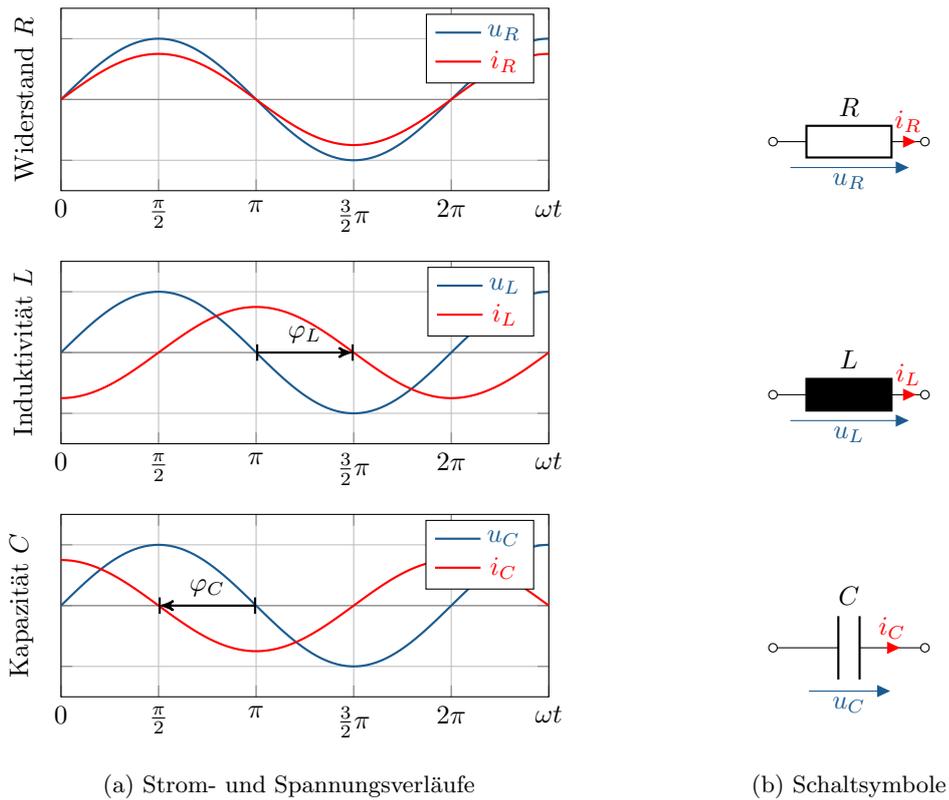
8.1.1 Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente

Rein ohmsche Widerstände R können elektrische keine Energie speichern. Spannungen und Ströme sind proportional zueinander und zu jedem Zeitpunkt in Phase. Das Verhalten ist zeit- und frequenzunabhängig.

Induktivitäten L und Kapazitäten C hingegen können Energie speichern und abgeben. Dieser Vorgang ist inert (träge), benötigt also eine gewisse Zeit. Dadurch verhalten sie sich frequenzabhängig.

Ströme und Spannungen stehen bei Induktivitäten und Kapazitäten in (zeitlich) differentiell linearen Verhältnis zueinander. Dadurch entsteht bei beiden Bauteiltypen eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom von betragsmäßig 90° .

Abbildung 8.1 zeigt die Spannungs- und Stromverläufe für R , L und C bei Erregung mit einer Wechselspannung $u_q = U \cdot \sin(\omega t)$ zum Vergleich.

Abbildung 8.1: Phasenverschiebung bei R , L und C

Aufgrund der Phasenverschiebung bei L und C oszilliert deren Leistung (Energieaufnahme und -abgabe), ist über eine Periode gemittelt jedoch immer null. Induktivitäten und Kapazitäten können daher keine Wirkleistung, sondern nur Blindleistung verrichten, weshalb sie auch Blindwiderstände genannt werden.

8.1.1.1 Verhalten von Induktivitäten und Kapazitäten

Induktivitäten als ideale Bauteile speichern durch den Effekt der (Selbst-)Induktion Energie im Magnetfeld. Kapazitäten als ideale Bauteile hingegen speichern Energie im elektrischen Feld. Beschrieben werden beide Effekte durch das Induktions- beziehungsweise das Gaußsche Gesetz.

Tabelle 8.1 listet die wichtigsten Unterschiede im Verhalten von Induktivitäten und Kapazitäten qualitativ als Übersicht auf.

Tabelle 8.1: Vergleich von Induktivität und Kapazität im Verhalten

	Induktivität	Kapazität
Gesetz	Induktionsgesetz	Gaußsches Gesetz
Energiespeich.	im Magnetfeld	im Elektr. Feld
stetig	Strom	Spannung
bei Gleichspg.	Kurzschluss	offen
bei Hochfreq.	offen	Kurzschluss

Die (Selbst-)Induktivität L als Eigenschaft kann vereinfacht als „Trägheit“ des Stroms betrachtet werden. Ströme in Induktivitäten sind stetig und eilen der Spannung hinterher. Bei hohen Frequenzen sperrt die Induktivität, bei Gleichspannung verhält sie sich wie ein Kurzschluss.

Die Kapazität C kann dem gegenüber vereinfacht als „Trägheit“ der Spannung betrachtet werden. Spannungen in Kapazitäten sind stetig und eilen dem Strom hinterher. Bei Gleichstrom sperrt die Kapazität, bei hohen Frequenzen verhält sie sich wie ein Kurzschluss.



Abbildung 8.2: Reale Induktivität (Spule, links) und Kapazitäten (Kondensator, rechts)

Abbildung 8.2 zeigt reale Bauteile, die Induktivitäten und Kapazitäten realisieren. Gezeigt sind eine Spule (Induktivität) und ein Kondensator (Kapazität).

8.1.1.2 Vergleich der linearen Zweipole R , L und C

8.2 zeigt eine Gegenüberstellung der Größen R , L und C und fasst deren wichtigsten Eigenschaften zusammen.

Tabelle 8.2: Vergleich lineare Bauteile R , L , C

Größe	Allgemein	El. Widerstand	Induktivität	Kapazität
Symbol				
Einheit	[Form.z.] = Einheit	$[R] = \Omega$ (Ohm)	$[L] = \text{H}$ (Henry)	$[C] = \text{F}$ (Farad)
Zeitbereich	$\frac{d}{dt}$ bzw. $\int dt$	$u_R = R \cdot i_R$	$u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$	$i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$
Frequenzb.	$j\omega$ bzw. $\frac{1}{j\omega}$	$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$	$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L$	$\underline{I}_C = j\omega C \cdot \underline{U}_C$
Impedanz	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$
Wirkanteil	$R = \text{Re}\{\underline{Z}\}$	$R = \frac{U}{I}$	0	0
Blindanteil	$X = \text{Im}\{\underline{Z}\}$	0	$X_L = \omega L$	$X_C = -\frac{1}{\omega C}$

8.1.2 Zweitore (Vierpole)

Die Frequenzabhängigkeit von Eintoren (Zweipole) haben wir in Modul 3 bereits untersucht. Mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung konnten wir den frequenzabhängigen Wechselstromwiderstand (Impedanz) \underline{Z} einzelner Eintore bestimmen. Durch Anwendung der komplexen Strom- und Span-

nungsteilerregel konnten wir auch die Gesamt-Impedanz linearer zweipoliger Netzwerke bestimmen. Das heißt für solche, welche nur aus linearen Bauteilen wie R , L und C bestehen.



Abbildung 8.3: Vergleich: Schaltzeichen eines allgemeinen Zwei- und Vierpols

Zweitore (Vierpole) sind eine Erweiterung von Eintoren (Zweipolen). Sie verfügen über eine Eingangs- und eine Ausgangsseite mit jeweiligen Eingangs- und Ausgangsgrößen. Das Zweitormodell eignet sich gut zur Beschreibung von (frequenzabhängigen) Übertragungseigenschaften von elektrischen Netzwerken.

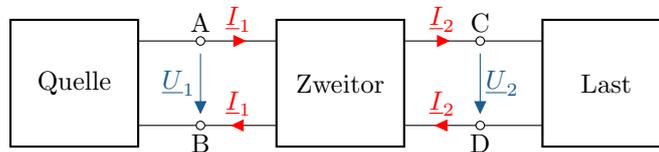


Abbildung 8.4: Verbindung einer Last über ein Zweitort mit der Quelle.

Im einfachsten Fall wird wie in 8.4 gezeigt, eine Quelle (Eintor) über ein Zweitort mit einer Last (Eintor) verbunden. Typische Zweitore sind beispielsweise Verstärker, Filter oder auch Transformatoren.

8.2 Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang von Zweitoren. Diese dienen zur Beschreibung des frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze in Form von Zweitoren wie in Abbildung 8.5 gezeigt. Am Beispiel einfacher passiver Filterschaltungen werden wir die Begriffe Frequenz-, Amplituden- und Phasengang einführen und deren Bedeutung und Anwendung erläutern.

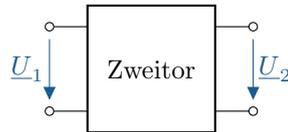


Abbildung 8.5: Schaltsymbol eines Zweitors (Vierpols) mit Eingang (links) und Ausgang (rechts)



Lernziele: Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Studierende lernen:

- Frequenzgänge anhand der Schaltungstopologie algebraisch zu bestimmen
- die Funktionsweise einfacher Hoch- und Tiefpassfiltern zu verstehen
- das Grenzverhalten von Vierpolen anhand ihrer Frequenzgänge zu analysieren

8.2.1 Definition Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang

Der **Frequenzgang** $\underline{F}(j\omega)$, auch komplexer Amplitudengang genannt, beschreibt das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal eines linearen zeitinvarianten Systems (LZI-System) bei sinusförmiger Anregung. Er bietet eine Möglichkeit frequenzabhängiges Verhalten von Zweitoren zu untersuchen, ist ein Spezialfall der Laplace-Übertragungsfunktion aus der Systemtheorie und wird wie folgt definiert:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad (8.1)$$

Aufgrund der Linearität von LZI-Systemen bleiben Frequenz und Sinusform am Ausgang erhalten. Amplitude und Phase können sich in Abhängigkeit der Frequenz vom Eingang zum Ausgang ändern. Erkennbar ist dies insbesondere in der Schreibweise in Polarkoordinaten.

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (8.2)$$

Der **Amplitudengang** $A(\omega)$ beschreibt die relative Amplitudenänderung zwischen Aus- und Eingangsspannung und entspricht dem Betrag des Frequenzganges. Der **Phasengang** $\varphi(\omega)$ hingegen, beschreibt die absolute Phasenänderung zwischen Aus- und Eingangsspannung und entspricht der Phase des Frequenzganges. Über $\underline{F}(j\omega)$ können wir beide wie folgt definieren:

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\})^2} = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \quad (8.3)$$

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(j\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\}}\right) = \angle \underline{U}_2 - \angle \underline{U}_1 \quad (8.4)$$

8.2.2 Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters

Das Zweiter in Abbildung 8.6 stellt einen einfachen Tiefpass-Filter (kurz Tiefpass) dar. Der Name Tiefpass leitet sich von dem Verhalten her, dass Signale tiefer Frequenzen nahezu unverändert passieren, Signale hoher Frequenzen jedoch stark gedämpft (gefiltert) werden. Die Funktionsweise und das Verhalten des Tiefpasses lassen sich gut mittels einer Frequenzganganalyse veranschaulichen.

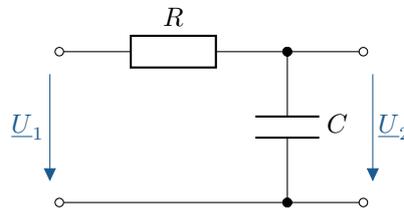


Abbildung 8.6: Schaltbild, RC-Tiefpass 1. Ordnung

Der gezeigte Tiefpass besteht aus einer Serienschaltung aus R und C mit Eingangsspannung \underline{U}_1 über beiden Elementen und Ausgangsspannung \underline{U}_2 über C . Da die Einzelemente R und C lineare, zeitinvariante (LZI-)Bauteile sind, ist auch der daraus zusammen gesetzte Tiefpass ein LZI-System. Das bedeutet, dass bei Anregung der Schaltung mit einer sinusförmigen Eingangsspannung $u_1(t)$ (links), die Ausgangsspannung $u_2(t)$ (rechts) ebenfalls sinusförmig ist und die gleiche Frequenz besitzt wie die Eingangsspannung.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) \\ \xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) &= \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Die LZI-Eigenschaft ist Voraussetzung zur Bestimmung des Frequenzganges und die Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung. Zusätzliche Voraussetzung ist die Annahme einer sinusförmigen Anregung im eingeschwungenen Zustand, von der wir zwecks Analyse ausgehen. Statt der Ein- und Ausgangsspannung $u_1(t)$ und $u_2(t)$ im Zeitbereich betrachten wir die entsprechende komplexe Ein- und Ausgangsspannung \underline{U}_1 und \underline{U}_2 im Frequenzbereich wie im Schaltbild dargestellt.

Der Frequenzgang $\underline{F}(j\omega)$ entspricht nach Gleichung 8.1 dem komplexen Spannungsverhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung $\underline{U}_2/\underline{U}_1$. Gemäß komplexer Spannungsteilerregel entspricht das Spannungsverhältnis dem Verhältnis der Impedanz am Ausgang (Impedanz der Kapazität) und der Impedanz am Eingang (Summe der Impedanz von Kapazität und Widerstand), kurz $\frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C}$.

Gleichung 8.6 zeigt den ermittelten Frequenzgang des Tiefpasses. Zur Vereinfachung wurden Nenner und Zähler rationalisiert, der Nenner sortiert und der Term (optional) in kartesische Koordinaten umgeformt. (Vergleiche kommentierte Nebenrechnung 8.95):

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Damit haben wir den $\underline{F}(j\omega)$ in Abhängigkeit von ω und den Bauteilgrößen C und R ermittelt. Mittels Betragsbildung lässt sich daraus gemäß (8.3) der Amplitudengang und durch Phasenberechnung gemäß (8.4) der Phasengang bestimmen.

Zur Betragsbildung bietet sich die Form $\frac{1}{1+j\omega CR}$ an. Da der Betrag im Zähler direkt ablesbar 1 beträgt, muss nur der Betrag im Nenner bestimmen werden wie sie in (8.7) gezeigt ist. Alternativ kann auch die kartesische Form aus (8.6) in (8.3) eingesetzt werden.

Für den Phasengang $\varphi(\omega)$ bietet sich die kartesische Schreibweise in der Form $\frac{1-j\omega CR}{1+(\omega CR)^2}$ an. In dieser lassen sich der Real- und Imaginärteil leicht ablesen. Der Nenner hat dabei als rein reelle Größe keinen Einfluss auf die Phasenlage wie in (8.8) gezeigt ist.

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega CR} \right| = \frac{1}{|1+j\omega CR|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \quad (8.7)$$

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(j\omega) = \angle \left(\frac{1-j\omega CR}{1+(\omega CR)^2} \right) = \arctan \left(\frac{-\omega CR}{\frac{1+(\omega CR)^2}{1+(\omega CR)^2}} \right) = \arctan(-\omega CR) \quad (8.8)$$

Alternativ kann der Phasengang auch aus der nicht kartesischen Form des Frequenzganges bestimmt werden. Der Phasengang ergibt sich aus der Phasenlage des Zählers subtrahiert mit der Phasenlage des Nenners:

$$\varphi(\omega) = \angle \left(\frac{1}{1+j\omega CR} \right) = \underbrace{\arctan \left(\frac{0}{1} \right)}_{\varphi_{\text{Zähler}}} - \underbrace{\arctan \left(\frac{\omega CR}{1} \right)}_{\varphi_{\text{Nenner}}} = \arctan(-\omega CR) \quad (8.9)$$

Die Herangehensweise bietet sich vor allem an, wenn sich Betrag und/oder Phase des Zählers direkt ablesen lassen. Dadurch kann ein Rechenschritt zum Umrechnen in kartesische Koordinaten gespart werden.

Im folgenden Exkurs wird die separate Betrachtung von Zähler und Nenner von Frequenzgängen näher erläutert:

Exkurs Berechnung komplexer Zahlen in (kartesischen) Descartes- und Polar-Koordinaten

Der Frequenzgang nimmt in der Regel die Form eines komplexen gebrochen rationalen Bruches an. Das bedeutet, dass sowohl Nenner als auch Zähler sich als komplexe Polynome darstellen lassen:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{F}_Z(j\omega)}{\underline{F}_N(j\omega)} = \frac{a_n \omega^n + \dots + a_1 \omega + a_0}{b_m \omega^m + \dots + b_1 \omega + b_0} \quad \text{mit} \quad a_i, b_j \in \mathbb{C} \quad n, m, \omega \in \mathbb{R} \quad (8.10)$$

Liegt $\underline{F}(j\omega)$ nun als komplexer Bruch vor mit Zähler und Nenner in kartesischen Koordinaten, so können wir $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ durch separate Betragsbildung und Phasenberechnung von Zähler und Nenner bestimmen. Hierfür werden die Formeln aus (8.3) und (8.4) für Zähler (Index Z) und Nenner (Index N) angewandt. Da Amplituden- und der Phasengang wie in (8.2) gezeigt die Polar-Koordinaten (Amplitude und Phase) des Frequenzganges darstellen ergibt sich folgendes Berechnungsschema:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{F}_Z(j\omega)}{\underline{F}_N(j\omega)} = \frac{|\underline{F}_Z| \cdot e^{j\angle \underline{F}_Z}}{|\underline{F}_N| \cdot e^{j\angle \underline{F}_N}} = \frac{A_Z}{A_N} \cdot e^{j(\varphi_Z - \varphi_N)} \quad (8.11)$$

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{F}_Z|}{|\underline{F}_N|} = \frac{A_Z}{A_N} \quad (8.12)$$

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(j\omega) = \angle \underline{F}_Z - \angle \underline{F}_N = \varphi_Z - \varphi_N \quad (8.13)$$

Im Allgemeinen bietet sich für Multiplikationen und Divisionen komplexer Zahlen die Berechnung in Polarkoordinaten (mit Betrag und Argument) an. Eine Multiplikation/Division führt bei komplexen Zahlen zur Multiplikation/Division der Beträge und Addition/Subtraktion der Argumente. Bei Additionen und Subtraktionen eignet sich die kartesische Form mit Real- und Imaginärteil besser für Berechnungen, da diese direkt addiert/subtrahiert werden können.

8.2.3 Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters

In diesem Kapitel wird das Grenzverhalten des Tiefpass-Filters 1. Ordnung aus dem vorigen Kapitel (s. Abbildung 8.6) für sehr hohe und sehr niedrige Frequenzen untersucht. Dazu werden die Grenzwerte des Amplitudengangs $A(\omega)$ und des Phasengangs $\varphi(\omega)$ bestimmt, sowie die Ergebnisse beschrieben, interpretiert und grafisch dargestellt.

Grenzwerte:

Für den Amplitudengang aus Gleichung 8.7 ergeben sich für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$ die folgenden Grenzwerte:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1 \quad (8.14)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

Für den Phasengang aus Gleichung 8.8 ergeben sich analog dazu die Grenzwerte:

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ \quad (8.15)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

An Gleichung 8.14 ist zu erkennen, dass der Tiefpass bei sehr niedrigen Frequenzen kaum dämpft ($A(\omega) \rightarrow 1$), bei sehr hohen Frequenzen hingegen stark dämpft ($A(\omega) \rightarrow 0$).

An Gleichung 8.15 ist zu erkennen, dass der Tiefpass bei sehr niedrigen Frequenzen (bei kaum Dämpfung) kaum Phasenverschiebung aufweist ($\varphi(\omega) \rightarrow 0^\circ$), bei sehr hohen Frequenzen (starke Dämpfung) hingegen eine Phasenverschiebung bis -90° aufweist.

Erklärung des Grenzverhaltens anhand des Schaltbildes:

Das Grenzverhalten bezüglich Amplitudenänderung und Phasenverschiebung lässt sich gut anhand des Schaltbildes 8.6 erklären.

Im Grenzfall einer Gleichspannung ($f = 0$) am Eingang sperrt die Kapazität ($X_C \rightarrow \infty$). Ihr Verhalten entspricht hier zwei offenen Klemmen, wodurch die gesamte Eingangsspannung am Ausgang U_2

über der Kapazität C anliegt. Die relative Amplitudenänderung beträgt daher 1 (ungedämpft) und die Phasenverschiebung 0° (in Phase).

Bei sehr hohen Frequenzen ($f \rightarrow \infty$) verhält sich die Kapazität wie ein Kurzschluss ($X_C \rightarrow 0$). Damit geht die Ausgangsspannung gegen null (starke Dämpfung, $A \rightarrow 0$) und die Eingangsspannung liegt annähernd vollständig über R an. Eingangsspannung und Strom liegen dadurch näherungsweise in Phase. Die Phasenverschiebung von Ausgangsspannung über der Kapazität zu Eingangsspannung beträgt dadurch näherungsweise -90° .

Visualisierung:

Um eine Vorstellung des Verhaltens von Amplituden- und Phasengang zu bekommen, können wir die Funktionen graphisch darstellen.

Der Amplitudengang $A(\omega)$ und der Phasengang $\varphi(\omega)$ sind in Abbildung 8.7a und 8.7b dargestellt. Beide Graphen sind mit linearen Skalen dargestellt, wobei die Skalierungen beider x-Achsen für $\omega \left[\frac{1}{s}\right]$ identisch sind. Eine Veränderung des Faktors CR führt in linearer Darstellung lediglich zu einer Stauchung oder Streckung der Graphen in x-Richtung, weshalb auf eine explizite Angabe der Werte verzichtet wurde.

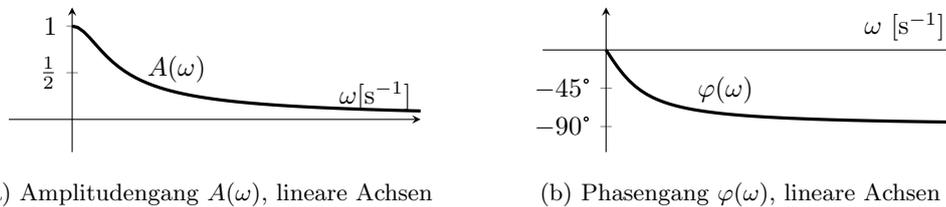


Abbildung 8.7: Lineardarstellung des Amplitudengangs und Phasengangs eines Tiefpass 1. Ordnung

In Kapitel 8.3 wird die Darstellung des Frequenzganges mit logarithmischer Skala eingeführt. Auch die Definition der **Grenzfrequenz** f_g (respektive der Grenzkreisfrequenz ω_g) zur Unterteilung des Frequenzbereichs in einen **Durchlassbereich** und einen **Sperrbereich** wird dort erläutert.

Exkurs zur Herleitung der Graphenform:

Die Graphenform des Amplitudengangs $A(\omega)$ in linearer Darstellung lässt sich daran erklären, dass dieser sich für sehr niedrige Frequenzen ($f \rightarrow 0$) der waagerechten Gerade $A = 1$ annähert und für sehr hohe Frequenzen ($f \rightarrow \infty$) der Potenzfunktion $\frac{1}{\omega CR}$ annähert. Abbildung 8.8 zeigt diese Näherungen für $A(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ mit $x = \omega CR$.

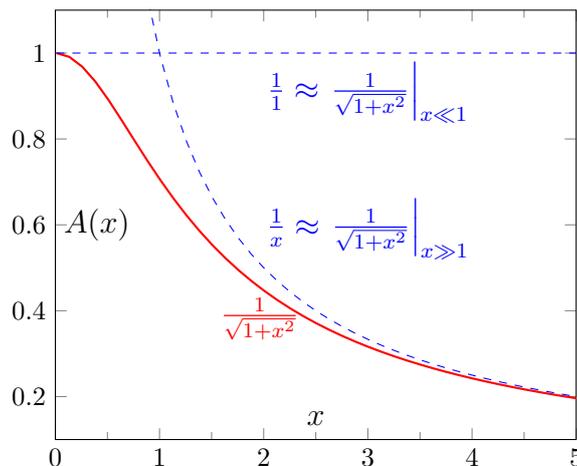


Abbildung 8.8: Amplitudengang Tiefpass 1. Ordnung, lineare Achsen, Näherungen mit $x = \omega CR$

Die Form des Phasenganges lässt sich leicht aus der Form einer (Arcus-)Tangensfunktion ableiten. Abbildung 8.9 zeigt die Tangensfunktion und dessen Umkehrfunktion Arcustangens, sowie deren jeweiligen Spiegelungen an der y-Achse in linearer Darstellung.

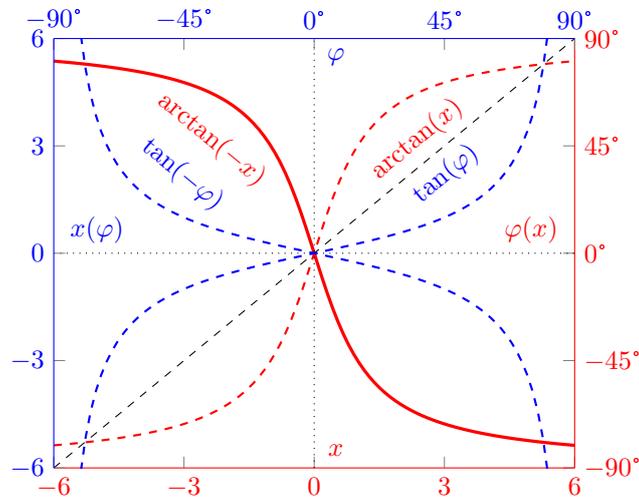


Abbildung 8.9: Phasengang Tiefpass 1. Ordnung, lineare Achsen, Vergleich Tangens/Arcustangens

Die Umkehrung der jeweiligen Funktion ist durch Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden (schwarz gestrichelte Gerade) und Tausch der x- und y-Achse erreichbar, vorausgesetzt die jeweilige Funktion ist stetig monoton wachsend oder stetig monoton fallend. Der Tangens ist daher zur Bildung des Arcustangens auf den Winkelbereich -90° bis $+90^\circ$ beschränkt bei einem Wertebereich von $-\infty$ bis $+\infty$. Aufgrund der nicht darstellbaren Polstellen ist der dargestellte Wertebereich auf -6 bis $+6$ beschränkt.

Der Phasengang des Tiefpass 1. Ordnung entspricht dem abgebildeten $\arctan(-x)$ für $x = \omega CR > 0$. Da es physikalisch keine negativen Frequenzen gibt, gilt $\omega > 0 \rightarrow x > 0$, wodurch der Wertebereich des Phasengangs nur den halben Wertebereich des Arcustangens abdeckt, also von -90° bis 0° .

8.2.4 Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters

Ein Hochpass-Filter (kurz Hochpass) funktioniert ähnlich einem Tiefpass-Filter. Dem Namen entsprechend passieren beim Hochpass jedoch Signale hoher Frequenzen nahezu ungedämpft (ungefiltert), während Signale niedriger Frequenzen stark gedämpft (gefiltert) werden.

Abbildung 8.10 zeigt exemplarisch einen RC-Hochpass erster Ordnung, der im Folgenden näher untersucht wird. Der Hochpass besteht aus einer einfach Serienschaltung von Widerstand R und Kapazität C . Die Eingangsspannung \underline{U}_1 liegt über R und C in Reihe an, während die Ausgangsspannung \underline{U}_2 über R abgegriffen wird. Der Aufbau ist identisch mit dem RC-Tiefpass erster Ordnung, nur dass die Ausgangsspannung über R statt über C anliegt.

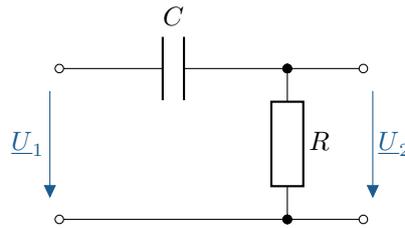


Abbildung 8.10: Schaltbild, RC-Hochpass 1. Ordnung

Die Herleitung des Frequenzganges erfolgt analog zum Vorgehen beim Tiefpass in Kapitel 8.2.2. Da es sich beim Hochpass um ein LZI-System handelt gilt:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) \\ \xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) &= \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (8.16)$$

Das heißt, bei sinusförmiger Eingangsspannung $u_1(t)$, ist auch die Ausgangsspannung $u_2(t)$ sinusförmig mit gleicher Frequenz wie die Eingangsspannung.

Der Frequenzgang lässt sich dadurch gemäß Gleichung 8.1 bestimmen, indem die komplexe Wechselspannungen \underline{U}_2 am Ausgang und \underline{U}_1 am Eingang ins Verhältnis gesetzt werden. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} \\ &= \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega CR}} = \frac{1 + j \frac{1}{\omega CR}}{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}} \end{aligned} \quad (8.17)$$

Für den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\varphi(\omega)$ ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega CR}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}}} \quad (8.18)$$

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(j\omega) = \angle \left(\frac{1 + j \frac{1}{\omega CR}}{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}} \right) = \arctan \left(\frac{1}{\omega CR} \right) \quad (8.19)$$

8.2.5 Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters

Das Grenzverhalten des Hochpass-Filters 1. Ordnung aus Kapitel 8.2.4 wird in diesem Kapitel für sehr hohe und sehr niedrige Frequenzen untersucht. Die Grenzwertbestimmung des Amplitudengangs $A(\omega)$ und des Phasengangs $\varphi(\omega)$ erfolgt analog zu der des Tiefpass-Filter wie in Kapitel 8.2.3 beschrieben.

Grenzwerte:

Für den Amplitudengang aus Gleichung 8.18 ergeben sich die folgenden Grenzwerte für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (8.20)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Für den Phasengang aus Gleichung 8.19 folgt analog dazu:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(\infty) = +90^\circ \quad (8.21)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

Das heißt, bei sehr niedrigen Frequenzen dämpft der Hochpass stark ($A(\omega) \rightarrow 0$) mit Phasenverschiebung bis $+90^\circ$ und bei sehr hohen Frequenzen kaum ($A(\omega) \rightarrow 1$) mit Phasenverschiebung bis 0° .

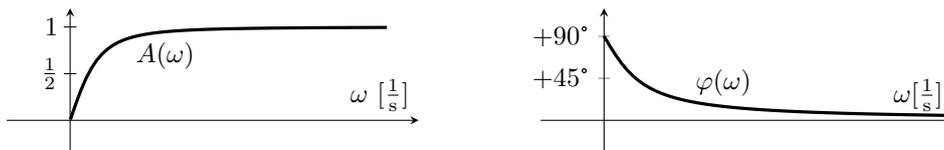
Anhand des Schaltbildes 8.10 lässt sich dieses Grenzverhalten gut erklären. Bei Gleichspannung ($f = 0$) sperrt die Kapazität, wodurch die gesamte Eingangsspannung über dieser abfällt.

Bei sehr kleinen Frequenzen ($f \rightarrow 0$) liegt die Eingangsspannung näherungsweise vollständig über der Kapazität an. Der Strom eilt der Eingangsspannung bis $+90^\circ$ voraus, wodurch sich eine positive Phasenverschiebung bis $+90^\circ$ zur Ausgangsspannung über dem Widerstand ergibt.

Bei sehr hohen Frequenzen ($f \rightarrow \infty$) verhält sich die Kapazität wie ein Kurzschluss, wodurch die Eingangsspannung näherungsweise vollständig über dem Widerstand am Ausgang anliegt. Dadurch sind Ausgangs- und Eingangsspannung näherungsweise gleich in Amplitude und in Phase.

Visualisierung:

Abbildung 8.11 zeigt den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\varphi(\omega)$ des Hochpass 1. Ordnung in linearer Darstellung mit gleicher Skalierung und gleichem Wertebereich für die x-Achsen.



(a) Amplitudengang $A(\omega)$, lineare Achsen

(b) Phasengang $\varphi(\omega)$, lineare Achsen

Abbildung 8.11: Lineardarstellung des Amplitudengang und Phasengang eines Hochpass 1. Ordnung

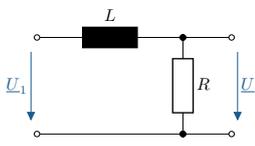
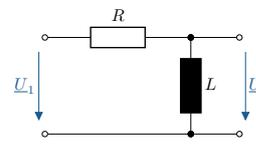
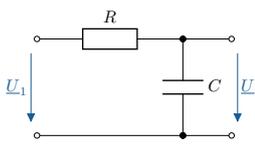
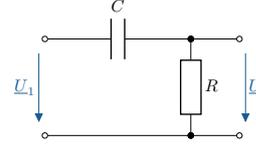
Eine logarithmische Darstellung des Frequenzganges wird in Kapitel 8.3.4.2 eingeführt.

8.2.6 Vergleich passive Filter 1. Ordnung mit L und R

Tiefpass und Hochpass lassen sich auch mit einer Induktivität L und einem Widerstand R realisieren. In Tabelle 8.3 sind die Schaltbilder für RL-Filter 1. Ordnung und ihre RC-Pendants gegenübergestellt. Zudem ist zu jedem Schaltbild die Formel für den Frequenzgang aufgeführt.

Im Vergleich der Schaltbilder ist zu erkennen, dass die RL- und RC-Varianten sich lediglich in der Anordnung von L und R beziehungsweise R und C unterscheiden. Die Frequenzgänge der RL- und

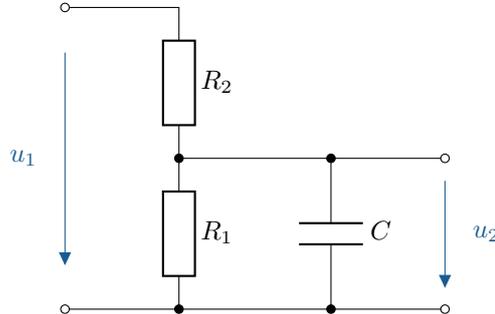
Tabelle 8.3: Vergleich Schaltbild und Frequenzgang für RL- und RC-Filter 1. Ordnung

	Tiefpass	$\underline{F}(j\omega)$	Hochpass	$\underline{F}(j\omega)$	ω_g
RL		$\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$		$\frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}}$	$\frac{R}{L}$
RC		$\frac{1}{1 + j\omega CR}$		$\frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega CR}}$	$\frac{1}{CR}$

RC-Varianten unterscheiden sich nur im Faktor $\frac{L}{R}$ und CR vor ω voneinander. Wie in Kapitel 8.3.3 noch näher erläutert wird, entspricht dieser Faktor dem Kehrwert der Grenzkreisfrequenz ω_g , welche vollständigshalber mit in der Tabelle aufgeführt ist.

8.2.7 Beispiel Filterschaltung: Aufgabe

Beispiel 8.1: Filterschaltung: Aufgabe



Aufgabe:

a) Leiten Sie $\underline{F}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}$ allgemein her.

b) Zeichnen Sie Betrag und Phase von $\underline{F}(j\omega)$ für:

$R_1 = 900 \Omega$

$R_2 = 100 \Omega$

$C = 1,25 \mu\text{F}$

c) Bei welcher Frequenz f ist $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$? Welche Phasenverschiebung besitzt u_2 nun gegenüber u_1 ?

$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) \quad \underline{U}_1 = \hat{U}_1$

$u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \underline{U}_2 = \hat{U}_2 \cdot e^{j\varphi}$

Abbildung 8.12: Filterschaltung, passiv

Beispiel 8.2: Filterschaltung: Lösung

Lösung a) Frequenzgang allgemein

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{R_1 \parallel \underline{Z}_C}{R_2 + (R_1 \parallel \underline{Z}_C)} = \frac{\frac{R_1}{1 + j\omega C R_1}}{R_2 + \frac{R_1}{1 + j\omega C R_1}} \cdot \frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 \cdot R_2 + \frac{R_2}{j\omega C} + \frac{R_1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} \stackrel{!}{=} \frac{a + jb}{c + jd} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ &= \frac{R_1(R_1 + R_2) - j\omega C R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} \quad (\text{kartesisch}) \stackrel{!}{=} \frac{a' + jb'}{c'} \quad a', b', c' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Betrag: $A(\omega) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$ mit $|\underline{F}(j\omega)| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

Phase: $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega C R_1^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)}\right)$ mit $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{b'}{a'}\right)$
 $= \arctan\left(\frac{-\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$

Altern.: $\varphi(\omega) = \arctan(0) - \arctan\left(\frac{\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$ mit $\varphi(\omega) = \overbrace{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}^{\varphi_Z} - \overbrace{\arctan\left(\frac{d}{c}\right)}^{\varphi_N}$

Lösung b) Grenzverhalten und Skizze

$$A(\omega) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$$

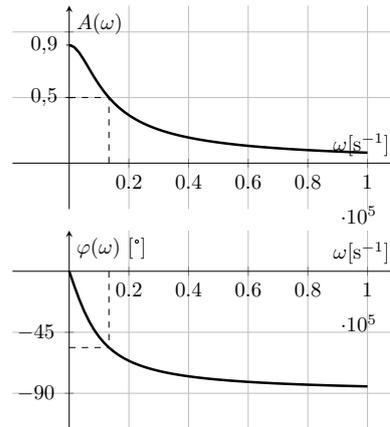
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,9$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{R_1}{\infty} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$



Lösung c) Bestimmten Arbeitspunkt ermitteln

Ges.: Frequenz f_1 bei der $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$ und Phasenverschiebung u_2 zu u_1 bei f_1 :

$$A(\omega_1) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad A(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Big|_{f=f_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}{R_1^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2$$

$$\Rightarrow (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2 - (R_1 + R_2)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \pm \frac{\sqrt{4R_1^2 - (R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2)}}{C R_1 R_2}$$

$$\omega_1 = 1,3304 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}}, f_1 = 2,117 \text{ kHz} \quad \text{mit} \quad \omega_1 < 0 \text{ unphysikalisch, } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\varphi(\omega_1) = \arctan(-1,4967) = -56,25^\circ \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}}\right)$$

8.3 Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

In der Elektrotechnik und Nachrichtentechnik werden häufig logarithmische Skalen verwendet, um den Frequenzgang von Filtern und Verstärkern darzustellen. Die logarithmische Darstellung ermöglicht eine bessere Übersicht über das Verhalten des Systems im gesamten Frequenzbereich.

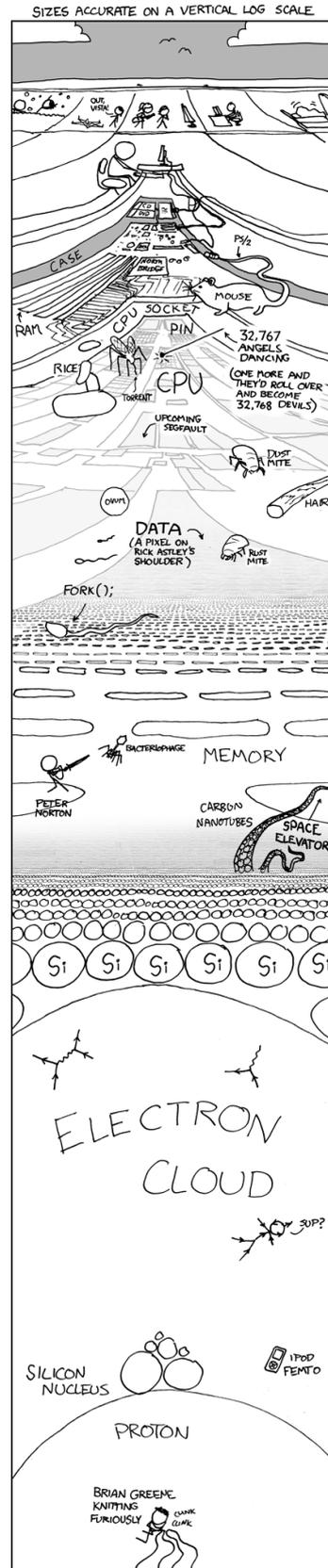
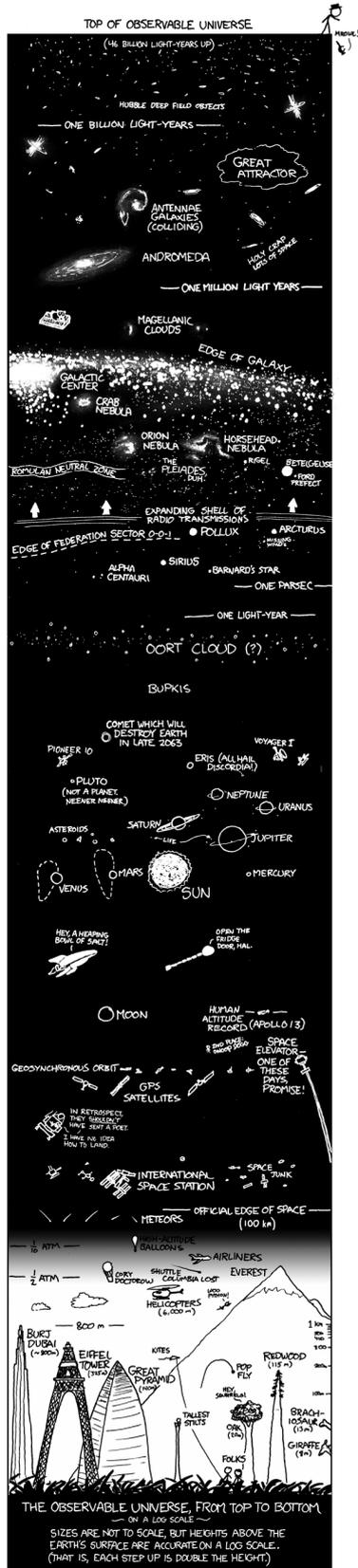
Abbildung 8.13 zeigt zwei Comic-Strips von XKCD, die die Vorteile der logarithmischen Darstellung humorvoll darstellen.

In diesem Kapitel werden wir uns mit der logarithmischen Darstellung von Frequenzgängen in Form sogenannter Bode-Diagramme beschäftigen. Zur Beschreibung des Frequenzganges einfacher Filterschaltungen werden die Einheit Dezibel, sowie die Grenzfrequenz und die Ordnung von Filtern definiert. Darüber hinaus werden Bandpass- und Bandsperfilter vorgestellt.

Lernziele: Logarithmische Darstellung, Frequenzgang

Studierende lernen:

- Unterschiede zwischen linearer und logarithmischer Darstellung kennen.
- Dezibel als Einheit kennen und zu verwenden.
- Grenzfrequenzen von Filterschaltungen kennen und zu bestimmen.
- Bodediagramme zu konstruieren und zu interpretieren.
- Funktionsweise von Bandpass- und Bandsperfilter kennen und verstehen.
- Aufbau und Verhalten von Filtern höherer Ordnung kennen und verstehen.



(a) Comic Height, Log-Skala Höhe[xkcd]

(b) Comic Depth, Log-Skala Tiefe[xkcd]

Abbildung 8.13: xkcd Comics zu logarithmischen Darstellungen von Größen

8.3.1 Logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen

In der logarithmischen Darstellung wird eine logarithmische Skala für eine oder mehrere Achsen verwendet. Eine lineare Zunahme von abzubildenden Werten korrespondiert hierbei mit einer logarithmischen Zunahme der Distanz auf der Skala. Anschaulicher im Umkehrschluss: Bei linearer Zunahme der Distanz auf der Skala steigt die Potenz der abzubildenden Werte im selben Maß linear an.

Logarithmische Skalen bieten sich im Allgemeinen an, um Wertebereiche über mehrere Größenordnungen darzustellen. Eine Besonderheit in der doppelt logarithmischen Darstellung ist, dass Potenzfunktionen als Geraden dargestellt werden. Abbildung 8.14 zeigt zum Vergleich mehrerer Potenzfunktionen in linearer Darstellung (links) und in doppelt-logarithmischer Darstellung mit Basis 10 (rechts).

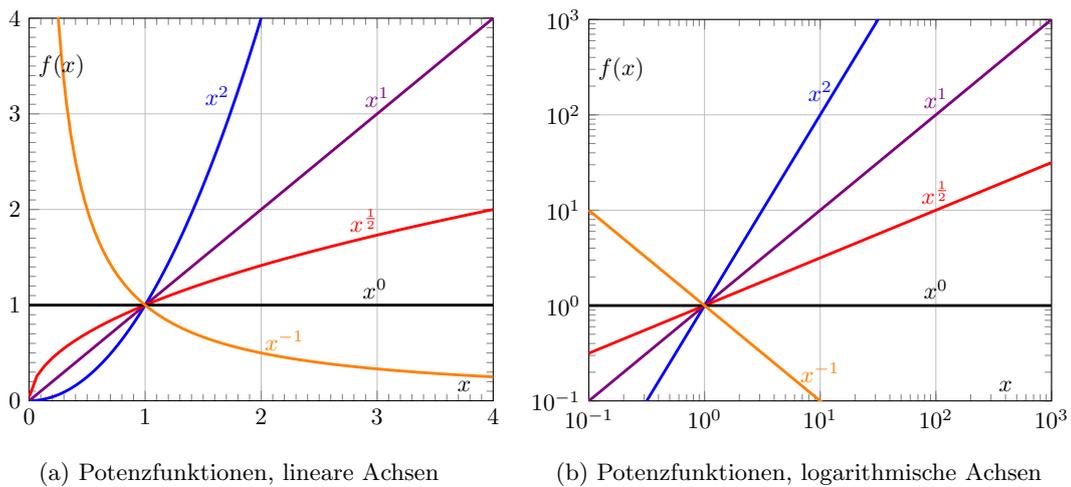


Abbildung 8.14: Vergleich lineare und logarithmische Skalierung von Potenzfunktionen

Der Exponent einer Potenzfunktion entspricht in doppelt-logarithmischer Darstellung der Steigung der Geraden. Eine Verschiebung in y-Richtung entspricht einem Vorfaktor a für die Funktion $f(x)$, eine Verschiebung in x-Richtung einem Vorfaktor x_{off} für x in der Funktion. Durch diese Eigenschaften eignet sich die logarithmische Darstellung besonders zur Darstellung von Amplitudengängen.

8.3.2 Definition Dezibel

Dezibel ist eine Hilfsmaßeinheit zur Kennzeichnung dekadisch-logarithmischer Verhältnisse zweier Größen. Verwendung findet es u.A. in der Signaltheorie und Nachrichtentechnik, beispielsweise um die Verstärkung/Dämpfung eines Bauteils oder einer Signalstrecke anzugeben. Ein Dezibel [dB] entspricht dem zehnfachen der Basiseinheit Bel [B].

Definiert ist das Bel als Kennzeichnung des dekadisch-logarithmischen Verhältnisses (Symbol Q) zweier einheitengleicher Leistungsgrößen (Index P) wie in Gleichung 8.22 gezeigt ist. In Zusammenhang mit Spannung oder Strom als sogenannte Leistungswurzelgrößen (ehemals Feldgrößen, Index F) kann das (Dezi-)Bel in linearen Systemen ebenfalls verwendet werden wie in Gleichung 8.23 gezeigt ist. Die Umrechnung basiert auf der Proportionalität von $P \sim U^2$ beziehungsweise $P \sim I^2$, woraus sich der Faktor 2 ergibt.

$$\text{Leistungsgrößen (z.B. } P, W) \quad Q_{(P)} = \log \frac{P_2}{P_1} \text{ B} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2} \text{ dB} \quad (8.22)$$

$$\text{Leistungswurzelgr. (z.B. } U, I) \quad Q_{(R)} = \log \frac{U_2^2}{U_1^2} \text{ B} = 20 \cdot \log \frac{U_1}{U_2} \text{ dB} \quad (8.23)$$

Die Angabe Q in dB beschreibt hier die Verstärkung eines Systems von Eingangs- (Index 1) zu Ausgangssignal (Index 2). Tabelle 8.4 zeigt für typische Dezibelwerte zugehörige Spannungsverhältnisse $\frac{U_2}{U_1}$ und Leistungsverhältnisse $\frac{P_2}{P_1}$. Eine Änderung um 6 dB entspricht auf die zweite Nachkommastelle gerundet genau dem Faktor 2 für Spannungen und auf die erste Nachkommastelle gerundet genau dem Faktor 4 für Leistungen.

Tabelle 8.4: Typische Dezibelwerte (Verstärkung in dB) bei Spannungs- und Leistungsverhältnissen

Leist.wurz.gr.	$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{10}$	10	20	100
Leistungsgrößen	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	10	100	400	10.000
Verstärkung	Q_{dB}	-3 dB	0 dB	+3 dB	+6 dB	10 dB	20 dB	26 dB	40 dB

Dadurch, dass 3 dB sehr präzise dem Faktor 2 bei Leistungen (Faktor $\sqrt{2}$ bei Spannungen) entspricht, beziehungsweise 6 dB dem Faktor 4, lassen sich relativ einfach Abschätzungen vornehmen. Im Vergleich zur SI-Einheit Neper, welches auf dem natürlichen Logarithmus basiert, hat sich das Dezibel daher als logarithmische Hilfsmaßeinheit in der Praxis durchgesetzt.

Faustformeln für Spannungsverhältnisse:

- Faktor 1 = 0 dB
- Faktor 2 \approx 6 dB
- Faktor 4 \approx 12 dB mit $4 = 2^2 \approx 2 \cdot 6$ dB
- Faktor 5 \approx 14 dB mit $5 = 10 \cdot \frac{1}{2} \approx 20$ dB - 6 dB
- Faktor 8 \approx 18 dB mit $8 = 2^3 \approx 3 \cdot 6$ dB
- Faktor 10 = 20 dB \implies 20 dB/Dek (spannungsbezogen)

Exemplarisch ist in Abbildung 8.16 die logarithmische y-Achse für $A(\omega)$ einmal einheitenlos (links) und einmal in dB (rechts) angegeben mit Kennzeichnung der ganzzahligen Faktoren beziehungsweise Dezibelwerten aus obiger Faustformel.

Phänologisch gilt:

- Eine Verstärkung liegt vor für $\frac{U_2}{U_1} > 1$
- Eine Dämpfung liegt vor für $\frac{U_2}{U_1} < 1$

Für die Verstärkung respektive Dämpfung als physikalische Größen gilt, dass diese sich in dB mit umgekehrtem Vorzeichen entsprechen. Üblich ist die Bezeichnungen G (von engl. Gain) für die Verstärkung von Bauteilen oder D (von engl. Damping) für deren Dämpfung. Beide Angaben werden typischerweise in dB und falls nicht näher deklariert in Bezug auf Spannungspegel angegeben. In Datenblättern wird die Dämpfung in dB teilweise auch mit negativem Vorzeichen angegeben.

8.3.3 Grenzfrequenz einfacher Filterschaltungen

Hoch- und Tiefpässe erlauben die Filterung von Eingangssignalen in Abhängigkeit von deren Frequenz wie in Kapitel 8.2.3 für einen Tiefpass und in Kapitel 8.2.5 für einen Hochpass gezeigt wurde.

Der Frequenzbereich der Amplitudengänge beider Filter wird unterteilt in einen **Durchlassbereich** und einen **Sperrbereich**. Als Abgrenzung dient die sogenannte **Grenzfrequenz** f_g , respektive Grenz(kreis)frequenz ω_g . Definiert ist ω_g über ein festgelegtes Verhältnis von effektiver Ausgangs- zu Eingangsspannung.

Im Falle einfacher Filterschaltungen gilt:

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8.24)$$

Nach Tabelle 8.4 entspricht dies einer Dämpfung von 3 dB respektive einer Verstärkung von -3 dB. Die Ausgangsleistung beträgt bei ω_g die Hälfte der Eingangsleistung.

Beispiel: Tiefpass erster Ordnung

Mit Gleichung 8.7 folgt für den RC-Tiefpass erster Ordnung für die Grenzkreisfrequenz:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \\ A(\omega_g) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g CR)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dots \implies \omega_g &= \frac{1}{CR} \end{aligned} \quad (8.25)$$

Die Grenzkreisfrequenz ω_g entspricht dem Kehrwert der Zeitkonstante $\tau = CR$ des RC-Gliedes.

Der Frequenz-, der Amplituden- und der Phasengang des RC-Tiefpasses erster Ordnung aus Gleichung 8.6, 8.7 und 8.8 lassen sich normiert auf ω_g darstellen. Dadurch ergeben sich bauteilunabhängig:

$$F(j\omega) \stackrel{8.6}{=} \frac{1}{1 + j\omega CR} \stackrel{8.25}{\implies} F(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_g)} \quad (8.26)$$

$$A(\omega) \stackrel{8.7}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \stackrel{8.25}{\implies} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad (8.27)$$

$$\varphi(\omega) \stackrel{8.8}{=} -\arctan(\omega CR) \stackrel{8.25}{\implies} \varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad (8.28)$$

Abbildung 8.15 zeigt den Amplitudengang in Abhängigkeit von ω/ω_g . Neben dem realen Verlauf in rot, ist auch der Verlauf eines idealisierten Tiefpasses mit hoher Flankensteilheit in blau dargestellt.

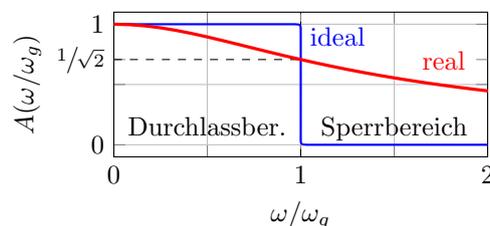


Abbildung 8.15: Durchlassbereich und Sperrbereich eines einfachen Tiefpasses, lineare Skala

Eine Änderung der Grenzfrequenz führt in linearer Darstellung zu einer Stauchung oder Streckung des Amplitudenganges entlang der Frequenzachse.

Beispiel: Hochpass erster Ordnung

Analog können wir die Grenzfrequenz für den RC-Hochpass erster Ordnung bestimmen:

$$A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_g CR}\right)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8.29)$$

$$\dots \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{CR}$$

Die Grenzfrequenz beider Filter ist also identisch bei gleichen Bauteilwerten R und C . Für den Frequenzgang des Hochpasses ergibt sich analog zur Tiefpass-Variante:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 - j(\omega_g/\omega)} \quad (8.30)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g/\omega)^2}} \quad (8.31)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega_g/\omega) \quad (8.32)$$

8.3.4 Tiefpass 1. Ordnung

Frequenzgänge werden typischerweise in **Bode-Diagrammen** dargestellt. Bode-Diagramme bestehen aus einer doppelt-logarithmischen Darstellung des Amplitudengangs und einer einfach-logarithmischen Darstellung des Phasengangs. Die x-Achse für die (Kreis-)frequenz wird in beiden Darstellung logarithmisch skaliert. Die y-Achse wird beim Amplitudengang logarithmisch und beim Phasengang linear skaliert.

Abbildung 8.16 zeigt den Amplitudengang aus Gl. 8.27 eines Tiefpass 1. Ordnung als Bode-Diagramm. Durchlassbereich für $\omega < \omega_g$ und Sperrbereich für $\omega > \omega_g$ sind ebenso wie die Position für $\omega = \omega_g$ gekennzeichnet. Die Frequenzangabe auf der x-Achse wurde auf die Grenzfrequenz normiert und erfolgt daher einheitenlos.

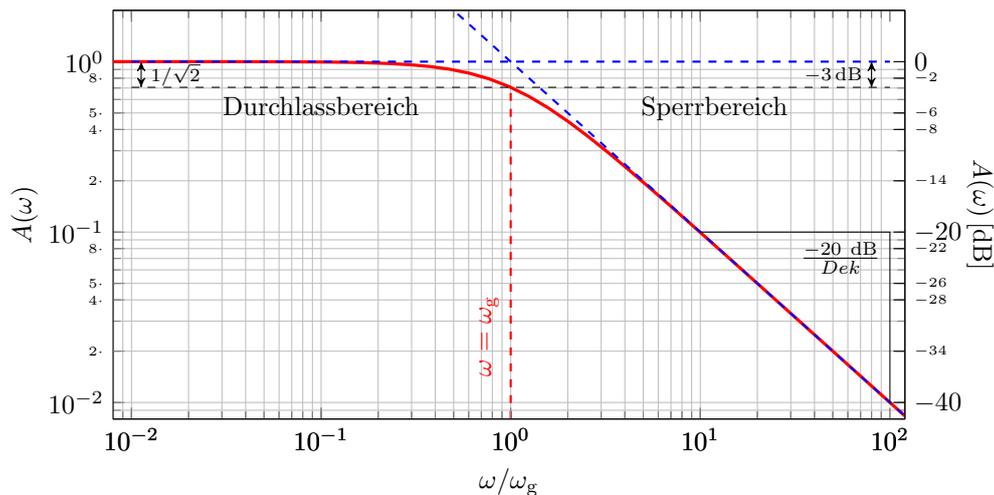


Abbildung 8.16: Bode-Diagramm Tiefpass 1. Ordnung, Amplitudengang

Gut zu erkennen ist die Unterteilung des Frequenzbereiches in Durchlass- und Sperrbereich durch

die Grenzfrequenz. Der Verlauf des Amplitudenganges lässt sich in beiden Bereichen mithilfe der Asymptoten (Geraden) approximieren [blau gestrichelt]:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 1 &\quad \Rightarrow \quad A(\omega) \approx 1 &\quad \text{für} \quad \omega < \omega_g &\quad \text{(Durchlassbereich)} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{\omega_g}{\omega} &\quad \Rightarrow \quad A(\omega) \approx \frac{\omega_g}{\omega} &\quad \text{für} \quad \omega > \omega_g &\quad \text{(Sperrbereich)} \end{aligned}$$

Die Steigung der Asymptote (Gerade) im Sperrbereich beträgt -20 dB/Dek , aufgrund der Proportionalität von $A(\omega) \sim \omega^{-1}$.

Die Näherung durch beide Asymptoten weicht maximal 3 dB für $\omega = \omega_g$ vom realen Verlauf ab. Bei der Grenzfrequenz schneiden sich beide Asymptoten, was jedoch nicht allgemein für Filter gilt. Zur Konstruktion einer Skizze bieten sich beide Asymptoten (Geraden) und der Punkt $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$ an. Für die Skizze wird im Übergangsbereich von Faktor fünf größer oder kleiner der Grenzfrequenz ($\frac{1}{5}\omega_g < \omega < 5\omega_g$) ein Bogen von Asymptote durch $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$ zu Asymptote gezeichnet.

Eine Veränderung der Grenzfrequenz führt im Bode-Diagramm zu einer Verschiebung entlang der Frequenz-Achse. Dies gilt für den Amplituden- als auch für den Phasengang, da die Frequenzachse in beiden Darstellungen logarithmisch skaliert ist. Die Normierung auf die Grenzfrequenz bietet sich an, um die Funktionsweise des Frequenzganges unabhängig von spezifischen Bauteilwerten darzustellen.

Abbildung 8.17 zeigt den dazugehörigen Phasengang als Bode-Diagramm ebenfalls mit Normierung der Frequenz auf die Grenzfrequenz. Die Kurvenform des Phasenganges ähnelt der Kurvenform eines Arkustangens in linearer Darstellung bei entsprechender Verschiebung und Stauchung.

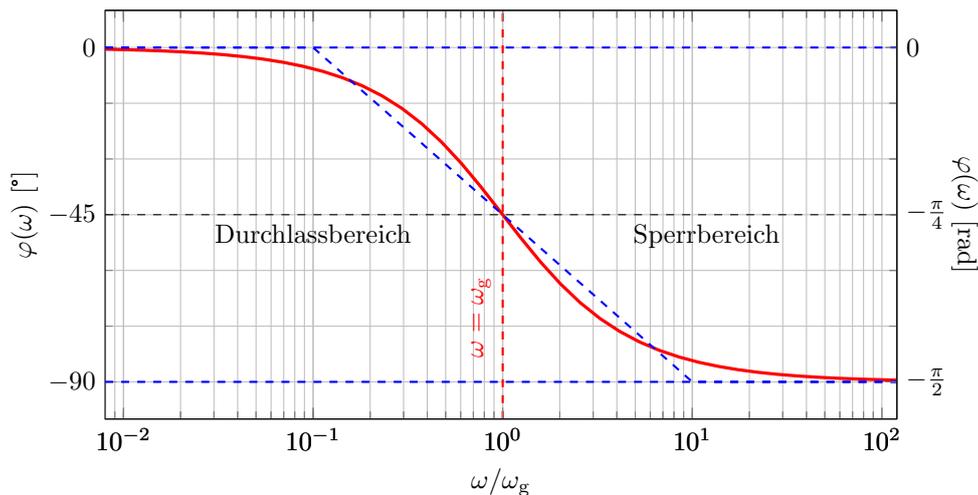


Abbildung 8.17: Bode-Diagramm Tiefpass 1. Ordnung, Phasengang

Der Wertebereich des Phasenganges wird durch die beiden horizontalen Asymptoten $\varphi(\omega) = 0^\circ$ für $\omega \rightarrow 0$ und $\varphi(\omega) = -90^\circ$ für $\omega \rightarrow \infty$ begrenzt. Der Phasengang besitzt in dieser Darstellungsform eine Punktsymmetrie zum Wendepunkt in $\varphi(\omega_g) = -45^\circ$ und keine Extrema.

Sei ω_n die normierte Frequenz ω/ω_g . So lässt sich der Phasengang abschnittsweise durch folgende drei Geradenabschnitte approximieren:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{für} \quad \omega_n < 10^{-1} & \text{Durchlassbereich (ohne Grenzbereich)} \\ -45^\circ + \frac{-45^\circ}{\text{Dek}} \omega_n & \text{für} \quad 10^{-1} \leq \omega_n \leq 10 & \text{Grenzbereich} \\ -90^\circ & \text{für} \quad 10 < \omega_n & \text{Sperrbereich (ohne Grenzbereich)} \end{cases} \quad (8.33)$$

Die maximale Abweichung der Approximation beträgt $\pm 5.71^\circ$ an den Knickstellen bei $\omega_g \pm 1 \text{ Dek}$.

8.3.4.1 Vergleich lineare und logarithmische Darstellung

Zum Vergleich sind in Abbildung 8.18 der Amplituden- und Phasengang eines Tiefpass 1. Ordnung in linearer und logarithmischer Darstellung (Bode-Diagramm) dargestellt.

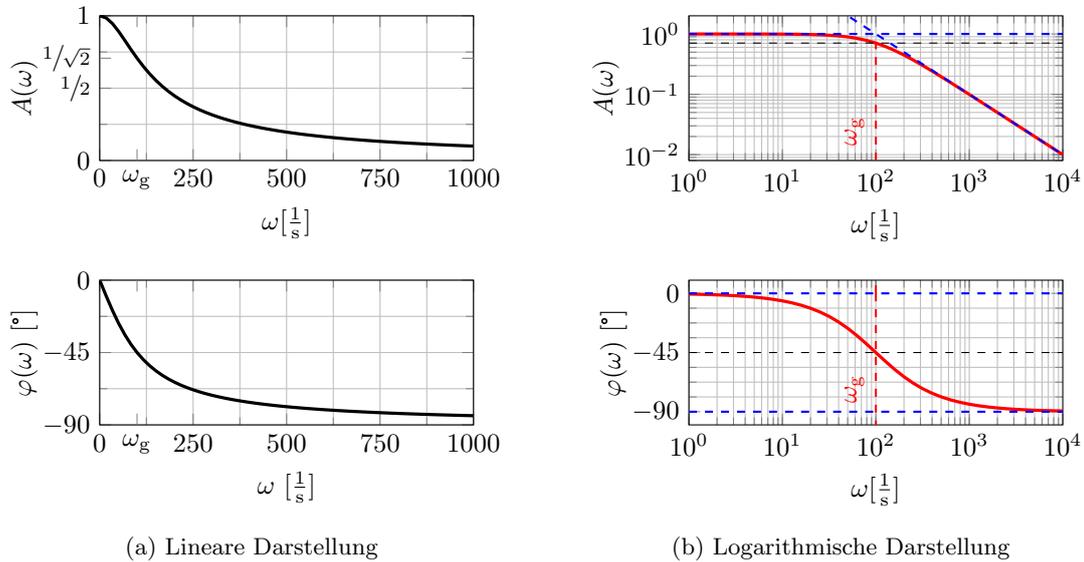


Abbildung 8.18: Vergleich lineare und logarithmische Darstellung des Tiefpass 1. Ordnung

Anders als bei linearer Darstellung entspricht bei logarithmischer Darstellung die Ableitung einer Funktionen nicht der ablesbaren Steigung im Kurvenverlauf. In Abbildung 8.18 ist dies gut erkennbar. Die Steigung von $A(\omega)$ in linearer Darstellung geht sowohl für $\omega \rightarrow 0$ als auch für $\omega \rightarrow \infty$ zu gegen 0. [Vgl. Kapitel 8.2.3] Im Bodediagramm ist die Steigung für $\omega \rightarrow 0$ ebenfalls null, nähert sich für $\omega \rightarrow \infty$ jedoch einer minimalen Steigung von -20 dB/Dek an. Beim Phasengang ist in linearer Darstellung die Steigung (Ableitung) für $\omega \rightarrow 0$ minimal und negativ. In logarithmischer Darstellung scheint $\varphi(\omega)$ für $\omega \rightarrow 0$ jedoch am flachesten (Steigung gegen 0).

8.3.4.2 Vergleich Tief- und Hochpass 1. Ordnung

Abbildung 8.19 zeigt die Frequenzgänge eines Tiefpass und eines Hochpass 1. Ordnung im Bode-Diagramm zum Vergleich. Der Frequenzbereich (x-Achse) ist in beiden Fällen auf die jeweilige Grenzfrequenz normiert.

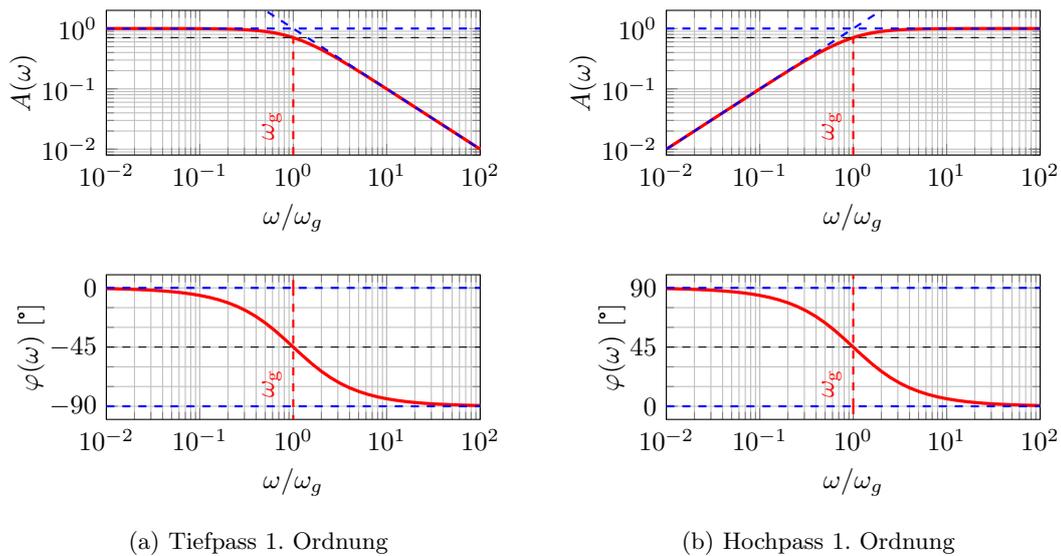


Abbildung 8.19: Vergleich Tief- und Hochpass 1. Ordnung, Bode-Diagramme

8.3.5 Bandpass, Bandsperre

Bandpass-Filter und Bandsperre-Filter sind Filtertypen zur Filterung von Frequenzbändern.

Ähnlich wie Tief- und Hochpass finden beide eine breite Anwendung in der Signalverarbeitung zum Beispiel im Bereich der Audio-, Nachrichten-, Mess- und Regelungstechnik. Weitere Anwendungen finden sich beispielsweise in der Energietechnik bei der Einspeisung von Energie ins elektrische Versorgungsnetz, um eine stabile Netzfrequenz zu gewährleisten.

Bandpässe filtern Signale außerhalb eines bestimmten Frequenzbandes heraus, während Bandsperren Signale innerhalb eines bestimmten Frequenzbandes herausfiltern. Die Frequenzbänder werden durch eine obere und untere Grenzfrequenz f_{go} und f_{gu} definiert.

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{f=f_{go}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{f=f_{gu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (8.34)$$

Daraus abgeleitete Größen sind die **Bandbreite** B und die **Mittenfrequenz** f_M . Die Bandbreite ist definiert als Differenz von oberer und unterer Grenzfrequenz:

$$B = \Delta f = f_{go} - f_{gu} \quad (8.35)$$

Die Mittenfrequenz f_M ist definiert als das geometrische Mittel beider Grenzfrequenzen:

$$f_M = \sqrt{f_{go} \cdot f_{gu}} \quad (8.36)$$

In logarithmischer Darstellung liegt f_M qua Definition exakt in der Mitte zwischen beiden Grenzfrequenzen. Dadurch lassen sich mit B und f_M Größe und Lage des Frequenzbandes im Frequenzspektrum beschreiben.

8.3.5.1 Realisierung: Serien- oder Parallelschaltung von Tief- und Hochpass

Eine mögliche Realisierung von Bandpass- und Bandsperre-Filtern ist durch Kombination eines Tief- und Hochpass-Filters. Auf diese Weise lässt sich anschaulich das Verhalten kombinierter Filterschaltungen erläutern.

Durch die Serienschaltung eines Tief- und Hochpass entsteht ein Bandpass, vorausgesetzt die Grenzfrequenzen sind passend gewählt. Für ein Bandpassverhalten muss die obere Grenzfrequenz durch den Tiefpass und die untere Grenzfrequenz durch den Hochpass realisiert werden. Mathematisch beschreiben lässt sich der resultierende Frequenzgang als Produkt der Einzelfrequenzgänge mit $\underline{F}_{\text{BP}} = \underline{F}_{\text{TP}} \cdot \underline{F}_{\text{HP}}$. Voraussetzung für die Multiplikation der Einzelfrequenzgänge zum Gesamtfrequenzgang ist die Rückwirkungsfreiheit des nachgeschalteten Vierpols auf das Ausgangssignal des vorgeschalteten Vierpols.

Abbildung 8.20 zeigt exemplarisch das Schaltbild eines solchen Bandpasses zweiter Ordnung als Serienschaltung eines RC-Tiefpasses und eines RC-Hochpasses, beide erster Ordnung. Der symbolische Verstärkerblock zwischen beiden Filter verhindert eine Rückwirkung des Hochpass auf die Ausgangsspannung des Tiefpasses. Nur unter der Annahme einer Rückwirkungsfreiheit lassen sich die Frequenzgänge von Tiefpass und Hochpass durch in Reihe Schalten multiplizieren.

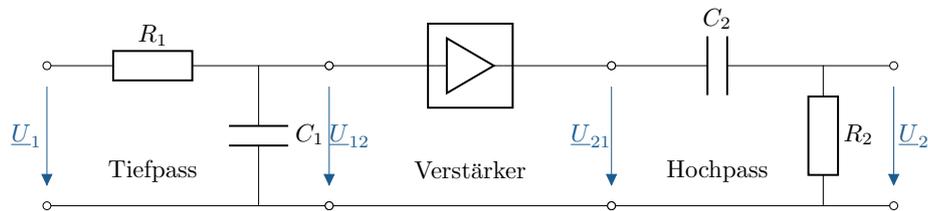


Abbildung 8.20: Bandpass 2. Ordnung, Schaltbild

Eine Bandsperre lässt sich realisieren indem die Eingänge von Tief- und Hochpass parallel und deren Ausgänge in Serie geschaltet werden. Dadurch erhalten beide Einzelfilter die gleiche Eingangsspannung und die Ausgangsspannungen werden addiert. Der resultierende Frequenzgang ist die Summe der Einzelfrequenzgänge mit $\underline{F}_{\text{BS}} = \underline{F}_{\text{TP}} + \underline{F}_{\text{HP}}$. In diesem Fall muss die obere Grenzfrequenz durch den Hochpass und die untere Grenzfrequenz durch den Tiefpass realisiert werden.

8.3.5.2 Bode-Diagramm

In Abbildung 8.21 ist das Bode-Diagramm des Bandpasses aus Abb. 8.20 dargestellt. Amplitudengang und Phasengang übereinander teilen sich eine gemeinsame X-Achse, zum besseren Vergleich der beiden Graphen. Der Verstärkungsfaktor beträgt 1 (passiv) und die Grenzkreisfrequenzen liegen bei 10^2 s^{-1} und 10^4 s^{-1} .

Die obere und untere Grenzkreisfrequenz ω_{go} und ω_{gu} sind in beiden Darstellungen gekennzeichnet (rot gestrichelte, vertikal), ebenso wie die -3 dB Grenze (schwarz gestrichelt, horizontal) deren Schnitt mit $A(\omega)$ die Grenzfrequenzen definiert.

Die Bandbreite ist im Amplitudengang angedeutet als Doppelfeil zwischen beiden Grenzfrequenzen. Aufgrund der logarithmischen Skalierung entspricht die Bandbreite nicht dem angezeigten geometrischen Abstand im Diagramm.

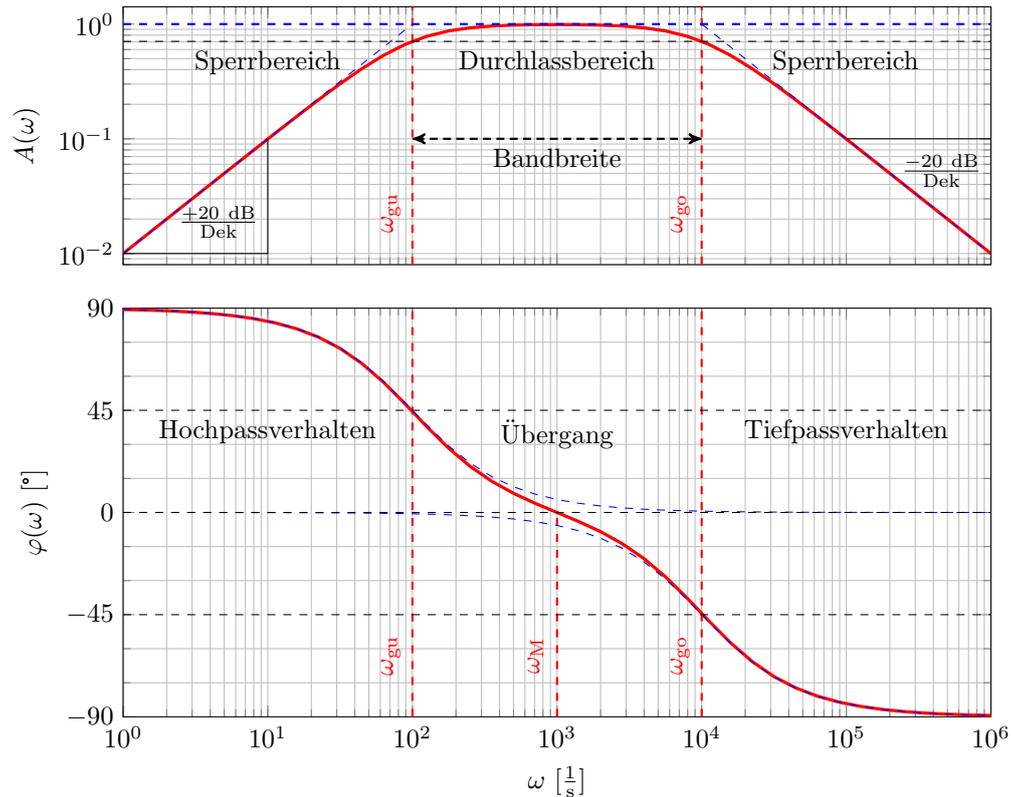


Abbildung 8.21: Bandpass 2. Ordnung, Bode-Diagramm

Im Schaubild abzulesen sind:

$$\omega_{\text{gu}} = 10^2 \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad \omega_{\text{go}} = 10^4 \text{ s}^{-1} \quad (8.37)$$

$$B \stackrel{8.35}{=} \Delta f = \frac{\omega_{\text{go}} - \omega_{\text{gu}}}{2\pi} = \frac{9900}{2\pi} \text{ Hz} \quad (8.38)$$

$$f_{\text{m}} \stackrel{8.36}{=} \frac{\omega_{\text{m}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_{\text{go}} \cdot \omega_{\text{gu}}}}{2\pi} = \frac{10^3}{2\pi} \text{ Hz} \quad (8.39)$$

Die Mittenkreisfrequenz ω_{m} ist im Phasengang gekennzeichnet. Die Phasenverschiebung beträgt dort 0° , da sich die Phasenverschiebung des Tief- und Hochpasses (blau gestrichelt, dünn) in dem Punkt gegenseitig aufheben.

Gut zu erkennen ist das Hochpassverhalten im unteren Sperrbereich (mit $+20 \text{ dB/Dek}$ und $\varphi(\omega) > 0^\circ$) und das Tiefpassverhalten im oberen Sperrbereich (mit -20 dB/Dek und $\varphi(\omega) < 0^\circ$).

8.3.6 Ordnung von Filtern, Beispielfilter höherer Ordnung

Abbildung 8.22 zeigt exemplarisch die Amplitudengänge verschiedener Filter höherer Ordnung im Vergleich. Zu erkennen sind ein Butterworth-, ein Tschebycheff-, ein Cauer-Filter im Vergleich mit einem idealen Tiefpass.

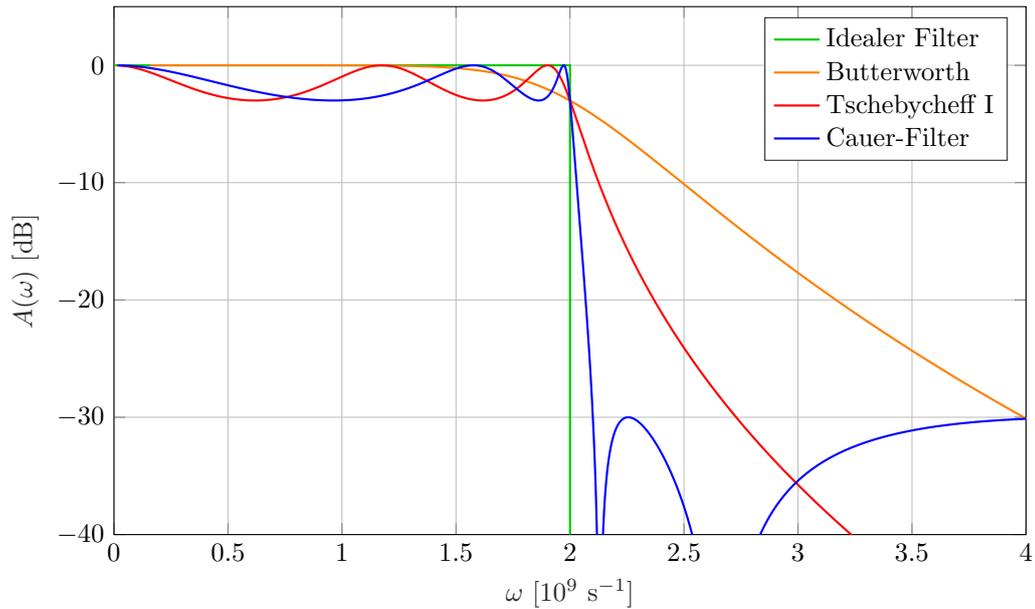


Abbildung 8.22: Beispiel Filter höherer Ordnung

Ordnung anhand der summierten Steilheit der Flanken erklären.

- Tief-/Hochpass (eine Flanke): Ordnung n bei $\pm n \cdot 20 \text{ dB/Dek}$
- Bandpass/-sperre (zwei Flanken): Ordnung $2n$ bei $\pm n \cdot 20 \text{ dB/Dek}$

Filter 2. Ordnung durch: RLC oder Kombination zweier Filtern 1. Ordnung: 2x (RC) bzw. 2x (RL) (1. Ordnung)

Filter höherer Ordnung als 2 durch Kaskadierung von Filtern niedrigerer Ordnung möglich.

Vgl: [Mexle Wiki](#)

Merke:

$n \cdot 20 \text{ dB/Dek}$ Steilheit bei Filter n -ter Ordnung für alle Flanken summiert.
Höhere Ordnung durch Kaskadierung von Filtern niedrigerer Ordnung möglich.

8.4 Ortskurven

Die Darstellung von Ortskurven ist ein Mittel zur Visualisierung der parameterabhängigen Veränderung von komplexen Größen. Zur Analyse des frequenzvariablen Verhaltens von Eintoren bieten sich Impedanz- und Admittanzortskurven an. In diesen kann die Veränderung der Impedanz respektive der Admittanz in Abhängigkeit der (Kreis-)Frequenz dargestellt werden.

Lernziele: Ortskurven

Studierende lernen:

- Ortskurven kennen und mögliche Anwendungsbereiche kennen.
- Ortskurven prinzipiell zu konstruieren und zu interpretieren.
- Impedanz- und Admittanzortskurven von Grundsaltungen kennen.

8.4.1 Definition Ortskurve

Eine Ortskurve ist die graphische Darstellungen einer komplexen Größe \underline{z} in Abhängigkeit eines reellen Parameters p in der komplexen Ebene [weissgerber2]:

$$\underline{z}(p) = \operatorname{Re}\{\underline{z}(p)\} + j\operatorname{Im}\{\underline{z}(p)\} \quad \text{mit } \underline{z} \in \mathbb{C}; p \in \mathbb{R} \quad (8.40)$$

Ortskurven werden in vielen verschiedenen Bereichen angewandt, um mögliche Zustände eines Systems zu visualisieren. Abbildung 8.23 zeigt exemplarisch die Stromortskurve einer Asynchronmaschine in der komplexen Ebene, auch Heylandkreis oder Ossannakreis genannt. [QUELLE:XYZ] Zu Erkennen ist der komplexe Statorstrom \underline{I}_s in Abhängigkeit des Schlupfes s . Die Darstellungsform eignet sich beispielsweise zur Visualisierung verschiedener Betriebszustände, im Fall der Asynchronmaschine sind das der Motor-, Brems- und Generatorbetrieb.

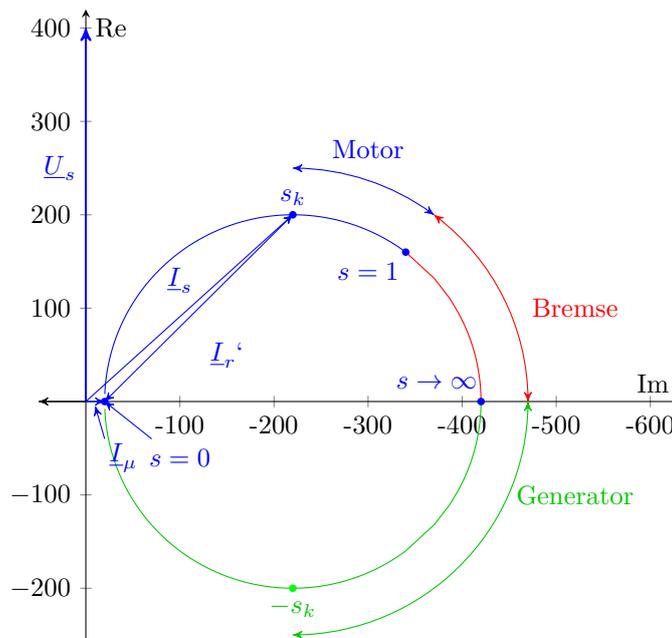


Abbildung 8.23: Beispiel Stromortskurve einer Asynchronmaschine mit Betriebszuständen

Im Beispiel der Stromortskurve einer Asynchronmaschine lassen sich zudem verschiedene Leistungswerte graphisch ermitteln wie in Abbildung 8.24 exemplarisch dargestellt ist. Die Beispiele dienen der Veranschaulichung der Definition und möglicher Anwendungsbereiche von Ortskurven, weshalb von einer Herleitung beider Beispiele abgesehen wird.

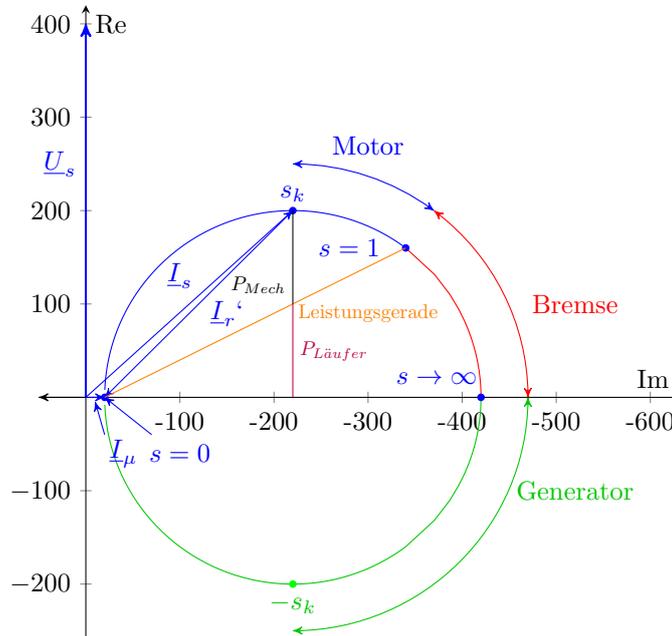


Abbildung 8.24: Beispiel Stromortskurve einer Asynchronmaschine mit Leistungsgrößen

Ortskurven eignen sich gut zur Visualisierung von Systemzuständen, -größen und deren Einfluss aufeinander.

8.4.2 Zusammenhang Zeigerdiagramm und Ortskurve

Ein Zeiger im Zeigerdiagramm stellt eine komplexe Größe stationär in der komplexen Ebene dar. Die Darstellungsform dient der Visualisierung von Phasenverschiebungen und Betragsverhältnissen. Typische Größen für Wechselstromkreise sind unter anderem Spannung, Strom, Leistung und Impedanz.

Ortskurven beschreiben die Bahn, die ein Zeiger bei Variation eines Parameters durchläuft. Die Ortskurve kann so als Verallgemeinerung eines Zeigers im Zeigerdiagramm verstanden werden. [weissgerber2] Übliche Parameter sind Frequenz und Bauteilgrößen.

Die Hervorhebung einzelner Zeiger mit Angabe des variierenden Parameters kann den Verlauf der Ortskurve verdeutlichen und die Interpretation erleichtern. Positionsänderungsrate und -richtung geben Aufschluss über die Dynamik des Systems.

Merke: Ortskurve

Zeigt Größe in komplexer Ebene parameterabhängig als Kurve (Punkteschar).

8.4.3 Impedanzortskurve

In Impedanzortskurven wird die Impedanz eines Systems in Abhängigkeit eines Parameters dargestellt.

Beispiel 8.3 zeigt eine Impedanzortskurve für eine variable Bauteilgröße.

Beispiel 8.4 zeigt eine Impedanzortskurve für variable Frequenz.

Beispiel 8.3: Impedanzortskurve RL-Glied, Widerstand variabel

Konstruktion der Impedanzortskurve einer RL-Serienschaltung für variablen Widerstand R . Die Schaltung ist in Abbildung 8.25 abgebildet.

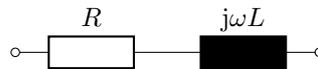


Abbildung 8.25: RL-Glied (Serienschaltung)

Die Impedanz des RL-Gliedes ist gegeben durch:

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

Sei R variabel und beschrieben als (p -fache) Vielfache eines Referenzwiderstandes R_0 mit p im geschlossenen Intervall $[0,3]$, so gilt:

$$R(p) = p \cdot R_0 \quad \text{mit } p \in [0,3]$$

Seien ω und L konstant, sowie die Reaktanz ωL gleich einer Referenzreaktanz X_0 :

$$\omega L = X_0 \quad \text{mit } \omega, L = \text{konst.}$$

Impedanz \underline{Z} in Abhängigkeit von p :

$$\underline{Z}(p) = p \cdot R_0 + jX_0$$

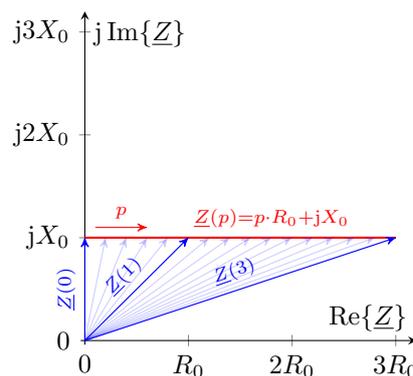


Abbildung 8.26: Impedanzortskurve RL-Glied (Serie)

Beispiel 8.4: Impedanzortskurve RL-Glied, Frequenz variabel

Konstruktion der Impedanzortskurve der RL-Serienschaltung in Abbildung 8.27 für variable Frequenz f und oder variable Induktivität L . Aufbau wie in Beispiel 8.3, jedoch mit variabler Frequenz ω .

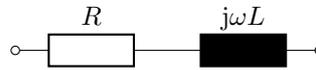


Abbildung 8.27: RL-Glied (Serienschaltung)

Gesamtimpedanz allgemein:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R + j\omega L \\ &= R + jX\end{aligned}$$

Die Gesamt-Reaktanz X des RL-Gliedes ist proportional zu ω und proportional zu L . Das heißt eine Veränderung von ω hat den selben Einfluss wie eine Veränderung von L auf die Impedanz des RL-Gliedes.

Mit X als Vielfache p einer Referenz-Reaktanz X_0 und $R = R_0$ gilt:

$$\underline{Z} = R_0 + p \cdot jX_0$$

In der komplexen Ebene dargestellt:

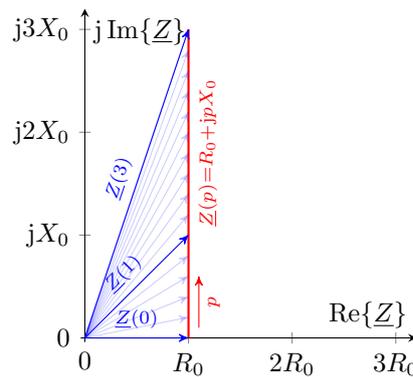


Abbildung 8.28: RL-Glied (Serienschaltung)

8.4.4 Admittanzortskurve - Inversion von Ortskurven

Analog zur Impedanzkurve bezeichnet eine Admittanzkurve die Ortskurve einer Admittanz. Die Admittanz \underline{Y} entspricht algebraisch dem Kehrwert der Impedanz \underline{Z} und vice versa:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad \leftrightarrow \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \quad (8.41)$$

Die Umformung von Impedanz zu Admittanz und umgekehrt ist jeweils ein Spezialfall der Möbius-Transformation.

Für die Beziehung zwischen Admittanz- und Impedanzortskurven gelten daher folgende allgemeinen Eigenschaften von Möbius-Transformation: **[behrends]**

- Winkeltreue: $\angle(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2) = \angle(\underline{Y}_1, \underline{Y}_2)$ mit $\underline{Y}_i = \underline{Z}_i^{-1}$, $i \in [1, 2]$
- Kreisverwandtschaft: Kreise und Geraden werden auf Kreise und Geraden abgebildet

Die Kehrwertbildung entspricht im speziellen der Inversion, einem Elementartyp der Möbius-Transformation. Eine Inversion von Ortskurven führt zu den in Tabelle 8.5 aufgelisteten geometrischen Umformungen von Kreisen und Geraden. Abbildung 8.29 zeigt exemplarisch die Inversion eines Gitters durch den Ursprung.

Tabelle 8.5: Typische Formen bei Inversion von Ortskurven

ursprüngliche Ortskurve	invertierte Ortskurve
Gerade durch den Ursprung	Gerade durch den Ursprung
Gerade nicht durch den Ursprung	Kreis durch den Ursprung
Kreis durch den Ursprung	Gerade nicht durch den Ursprung
Kreis nicht durch den Ursprung	Kreis nicht durch den Ursprung

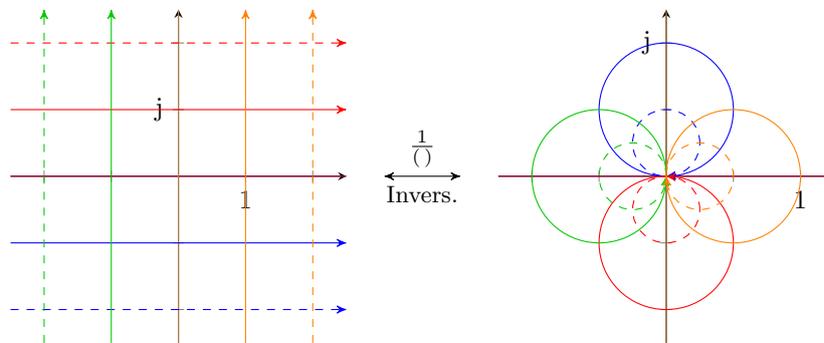


Abbildung 8.29: Beispiel Möbius-Transformation, Inversion von Gitter¹

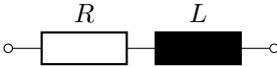
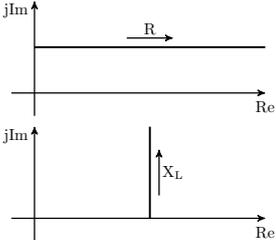
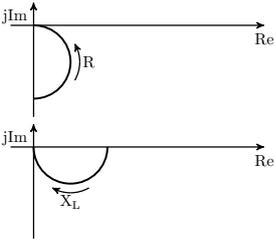
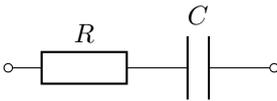
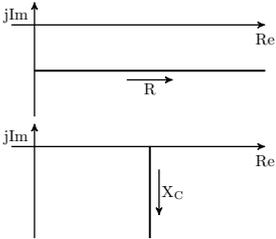
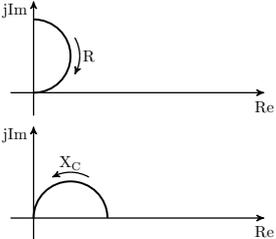
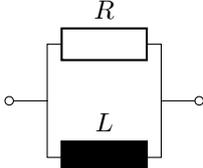
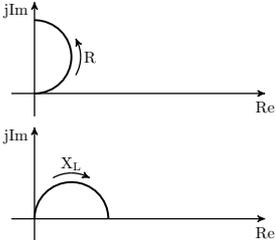
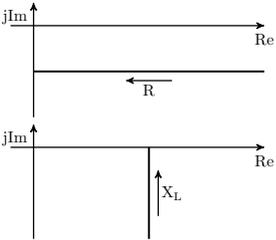
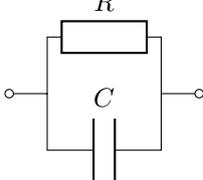
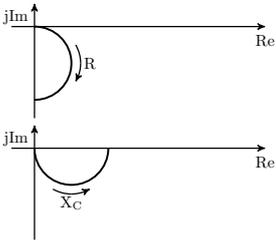
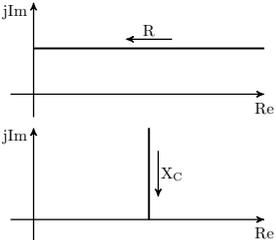
8.4.5 Ortskurven von Grundschaltungen

Tabelle 8.6 zeigt eine Übersicht der Impedanz- und Admittanzortskurven für die vier Grundschaltungen RL- und RC-Glied jeweils in Serien- und Parallelschaltung.

Ortskurven schwingungsfähiger LC- und RLC-Glieder unterscheiden sich von den hier dargestellten Ortskurven dadurch, dass der Blindanteil der Impedanz bzw. Admittanz je nach Frequenzbereich sowohl induktiv als auch kapazitiv sein kann, je nachdem welcher Anteil überwiegt.

¹Angelehnt an MoebiusInversion.svg von Chrislb, CC-BY-SA-2.0-DE, 2005, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MoebiusInversion.svg>

Tabelle 8.6: Ortskurven der Grundsaltungen RL- und RC-Glied

Grundsaltung	<u>Z</u> -Ortskurve	<u>Y</u> -Ortskurve
		
		
		
		

8.5 Resonanzkreise

Resonanzkreise, auch Schwingkreise genannt, sind schwingungsfähige Stromkreise, die auf Anregung mit einer bestimmten Frequenz stark reagieren (Resonanzfall). Unterschieden werden die zwei Typen des Parallel-Resonanzkreises und Serien-Resonanzkreises.

Schwingungsfähig ist ein System, wenn es Energie in zwei Formen speichern und zwischen beiden Formen hin und her wandeln kann. Resonanzkreise verfügen daher immer über eine Kapazität (elektrischer Speicher) und eine Induktivität (magnetischer Speicher).

Anwendung finden Resonanzkreise unter anderem im Bereich der Energie-, Mess- und Kommunikationstechnik. Dort werden sie zum Beispiel zur Filterung von Netzurückwirkungen oder Signalen eingesetzt.

Resonanzkreise können unter Umständen zu unerwünschten Effekten wie extreme Über- oder Unterspannungen führen.

Lernziele: Resonanzkreise

Studierende lernen:

- Resonanzkreise zu erkennen und zu berechnen
- Resonanzfrequenz, Kennwiderstand und Güte zu bestimmen
- Resonanzkurven zu berechnen, zu beschreiben und zu zeichnen

8.5.1 Resonanzerscheinung

Eine Resonanz tritt auf, wenn schwingungsfähige Systeme mit einer Frequenz nahe ihrer Resonanzfrequenz angeregt werden.

In diesem Abschnitt werden zunächst der Zustand einer freien Schwingung und der einer erzwungenen Schwingung beschrieben. In Unterkapitel 8.5.2 wird die Bedingung für Resonanz mathematisch festgelegt und im Folgekapitel in Beispiel 8.5 für einen Serien- und Parallel-Schwingkreis berechnet.

Abbildung 8.30 zeigt exemplarisch das Schaltbild eines RLC-Serienschwingkreises. Die Reihenschaltung aus R, L und C ist über den gezeigten Schalter kurzschließbar. Zum Zeitpunkt $t = 0$ schließt der Schalter, dabei beträgt die Spannung der Kapazität den Wert $U_0 > 0$ (Kapazität geladen) und es fließt kein Strom $I = 0$ (Induktivität entladen).

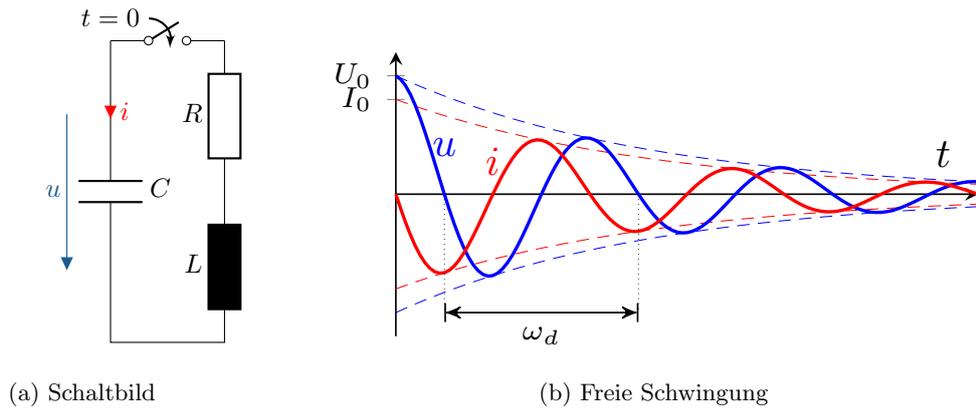


Abbildung 8.30: RLC-Serienschwingkreis, frei schwingend

Abbildung 8.30b zeigt den Zeitverlauf der Kapazitätsspannung u und des Stromes i durch den RLC-Serienschwingkreis ab $t = 0$. Der Resonanzkreis befindet sich im Zustand freier Schwingung. Das heißt Ströme und Spannungen oszillieren ohne äußere Anregung mit der **Eigenfrequenz** f_d (gedämpft) des Resonanzkreises.

Die Amplituden klingen aufgrund der Dämpfung ($R > 0$) ab. Sie lassen sich jeweils durch eine Exponentialkurve beschreiben, welche den jeweiligen Zeitverlauf einhüllt (gestrichelte Kurve). Für genauere Berechnungen von Ausgleichsvorgängen, siehe Modul 12: Schaltvorgänge.

Die Energie E pendelt zwischen der elektrischen Form im \vec{E} -Feld der Kapazität ($E_{el} \sim u^2$) und der magnetischen Form im \vec{H} -Feld der Induktivität ($E_{mag} \sim i^2$). Anhand der Minima beziehungsweise Maxima und der Nullstellen beider Zeitverläufe ist erkennbar, wie die Energie in jeder Periode zwei mal hin- und zurück gewandelt wird.

Aufgrund der reellen (Verlust-)Leistung im ohmschen Widerstand ($R > 0$), wird bei jeder Energieumwandlung ein Teil der Energie in Form von Wärme im Widerstand umgesetzt. Der Widerstand dämpft den Schwingkreis und führt zum Abklingen von Strom und Spannung in Zustand freier Schwingung.

Die Eigenkreisfrequenz $\omega_d = 2\pi f_d$ ist unabhängig von der Amplitude. Bei ungedämpften Systemen entspricht sie exakt der **Resonanzkreisfrequenz** ω_0 . Bei leicht gedämpften Systemen ist ω_d geringfügig kleiner als ω_0 . Stark gedämpfte Systeme schwingen nicht, sondern klingen aperiodisch ab.

Abbildung 8.31a zeigt zum Vergleich einen RLC-Serienschwingkreis mit Anregung durch eine ideale Spannungsquelle u_e an einer Kapazität (erzwungene Schwingung). Abbildung 8.31b zeigt den eingeschwingenen Zeitverlauf von Strom und Spannung der Kapazität bei sinusförmiger Anregung.

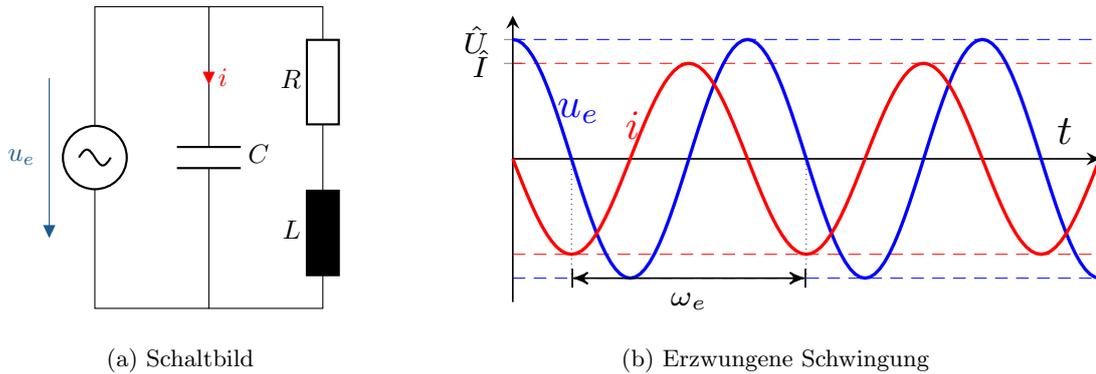


Abbildung 8.31: RLC-Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung

Strom und Spannung schwingen im eingeschwungenen Zustand mit der Frequenz der Spannungsquelle, welche in diesem Fall auch Erregerfrequenz genannt wird.

Entspricht die Erregerfrequenz der Resonanzfrequenz, tritt der **Resonanzfall** ein. Dies kann durch Variation der Erregerfrequenz oder der Bauteilgrößen L oder C geschehen.

8.5.2 Definition Resonanzbedingung, -frequenz, Güte, Kennwiderstand

Für Resonanzkreise gilt im Resonanzfall, dass der Imaginärteil der Impedanz gleich null wird. Respektive gilt, dass der Imaginärteil der Admittanz gleich null wird sowie Strom und Spannung an den Ausgangsklemmen in Phase liegen.

Als Resonanzbedingung gilt an den Ausgangsklemmen des Resonanzkreises:

$$\begin{aligned} \varphi_{u0} - \varphi_{i0} &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Phasenverschiebung gleich null} \\ \Leftrightarrow \text{Im}\{Z_0\} &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Reaktanz gleich null} \end{aligned} \quad (8.42)$$

Frequenzvariable Größen sind im Resonanzfall im Folgenden mit Index 0 gekennzeichnet:

$$\underline{Z}, \underline{U}, \underline{I}, \varphi_u, \varphi_i = \underline{Z}_0, \underline{U}_0, \underline{I}_0, \varphi_{u0}, \varphi_{i0} \quad \text{für } \omega = \omega_0$$

Die **Resonanzfrequenz** f_0 ist die Frequenz, bei der eine Anregung den Resonanzfall erzeugt beziehungsweise die Resonanzbedingung erfüllt. Teilweise wird die **Resonanzkreisfrequenz** ω_0 auch unpräziserweise als Resonanzfrequenz bezeichnet. Allgemein gilt $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Bei einfachen RLC-Schwingkreisen hebt sich im Resonanzfall die Reaktanz X_L der Induktivität und X_C der Kapazität gegenseitig auf. Betragsmäßig sind diese gleich groß, weshalb deren Betrag im Resonanzfall auch als **Kennwiderstand** X_k bezeichnet wird. Analog dazu ist der **Kennleitwert** B_k definiert als der Betrag des Leitwertes der Induktivität und der Kapazität im Resonanzfall:

$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| \quad (8.43)$$

$$B_k = |B_{L,0}| = |B_{C,0}| = \frac{1}{X_k} \quad (8.44)$$

Kennwiderstand und -leitwert haben die gleichen Einheiten wie Impedanz $[\Omega]$ und Admittanz $[S]$.

Die **Güte** Q , auch Gütefaktor oder Resonanzschärfe genannt, ist eine einheitenlose Größe. Sie ist allgemein definiert als das Verhältnis des Blindleistungsbetrages der Induktivität oder der Kapazität zur (Wirk-)Leistung des Schwingkreises im Resonanzfall:

$$Q = \frac{|Q_{L,0}|}{P_{R,0}} = \frac{|Q_{C,0}|}{P_{R,0}} \quad \text{allgemein} \quad (8.45)$$

Die Güte ist manchmal auch im Speziellen für Reihen- oder für Parallelschwingkreise definiert.

Bei RLC-Reihenschwingkreisen entspricht die Güte dem Verhältnis von Kennwiderstand X_k zu ohmschem Widerstand R , bei RLC-Parallelschwingkreisen entspricht die Güte dem Verhältnis von Kennleitwert B_k zu ohmschem Leitwert G :

$$Q = \frac{X_k}{R} \quad \text{im Reihenschwingkreis} \quad (8.46)$$

$$Q = \frac{Y_k}{G} \quad \text{im Parallelschwingkreis} \quad (8.47)$$

Damit beschreibt die Güte auch das Verhältnis möglicher Überspannungen zu Quellenspannungen für Reihenschwingkreise bei Spannungsresonanz beziehungsweise das Verhältnis von Überströmen zu Quellenströmen für Parallelschwingkreise bei Stromresonanz:

$$Q = \frac{U_{L,0}}{U_q} = \frac{U_{C,0}}{U_q} \quad \text{bei Spannungsresonanz} \quad (8.48)$$

$$Q = \frac{I_{L,0}}{I_q} = \frac{I_{C,0}}{I_q} \quad \text{bei Stromresonanz} \quad (8.49)$$

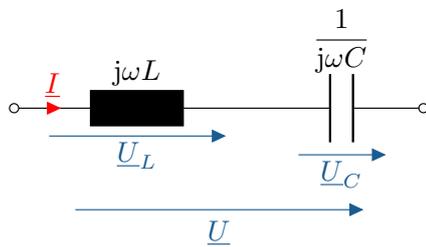
8.5.3 Resonanzfrequenz am Beispiel idealer LC-Schwingkreise

In Beispiel 8.5 wird exemplarisch die Resonanzkreisfrequenz für ideale LC-Serien- und LC-Parallelschwingkreise bestimmt.

Anhand der Beispiele wird rechnerisch verdeutlicht, weshalb in Reihenschwingkreisen eine Resonanz durch Spannungen und in Parallelschwingkreisen durch Ströme hervorgerufen wird. Zur Unterscheidung wird deshalb auch von einer **spannungsbezogenen** und einer **strombezogenen** Resonanz gesprochen.

Beispiel 8.5: Resonanz in LC-Schwingkreisen

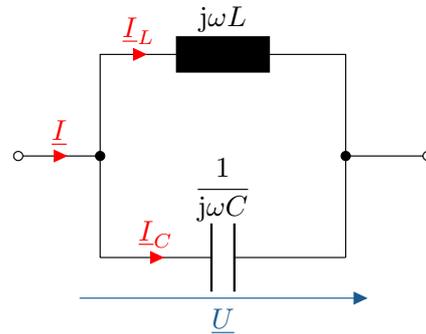
Berechnung der Resonanzfrequenz ω_0 für LC-Serien- und LC-Parallelschwingkreise.



LC-Serienschwingkreis

Bei Anregung mit Spannung \underline{U} :

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{I} \cdot \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \\ &= \underline{I} \cdot j \left(\underbrace{\omega L - \frac{1}{\omega C}}_{=0 \text{ Resonanz}} \right) \\ \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} &= 0 \\ \Rightarrow \underline{I} &\rightarrow \infty \quad \text{für } \underline{U} = \text{konst.}\end{aligned}$$

Spannungsbezogene Resonanz
im Serienschwingkreis

LC-Parallelschwingkreis

Bei Anregung mit Strom \underline{I} :

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{U} \cdot \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \\ &= \underline{U} \cdot j \left(\underbrace{\omega C - \frac{1}{\omega L}}_{=0 \text{ Resonanz}} \right) \\ \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} &= 0 \\ \Rightarrow \underline{U} &\rightarrow \infty \quad \text{für } \underline{I} = \text{konst.}\end{aligned}$$

Strombezogene Resonanz
im Parallelschwingkreis

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Die **Resonanzfrequenz** ist für beide Schwingkreise gleich.

Im Resonanzfall heben sich im idealen Reihenschwingkreis die Spannungen über L und C gegenseitig auf. Daher können theoretisch beliebig hohe Spannungen über L und C entstehen. In realen Schaltungen wird die Spannung jedoch durch den ohmschen Widerstand R begrenzt. [Vgl. RLC-Schwingkreis in Kapitel 8.5.4]

Analog gilt das gleiche im Resonanzfall für die Ströme durch L und C im Parallelschwingkreis.

Die Resonanzfrequenz einfacher RLC-Schwingkreise ist identisch mit der idealer LC-Schwingkreise, da der Widerstand R sich nicht auf den Blindanteil der Impedanz auswirkt, mit R , L und C alle in Reihe oder alle parallel.

8.5.4 RLC-Reihenschwingkreis - Resonanzverhalten

In diesem Unterkapitel wird exemplarisch das Resonanzverhalten eines RLC-Serienschwingkreises untersucht. Der Schwingkreis ist in Abbildung 8.33 gezeigt und entspricht dem idealen LC-Serienschwingkreis aus Beispiel 8.5 mit einem zusätzlichen ohmschen Widerstand R in Reihe.

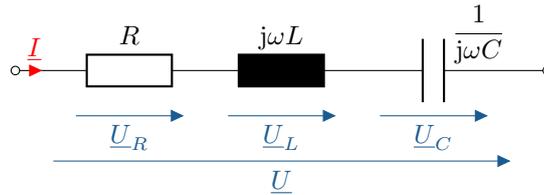


Abbildung 8.33: Schaltbild RLC-Serienschwingkreis

Die Impedanz \underline{Z} des RLC-Serienschwingkreis aus Abbildung 8.33 ist gegeben durch:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) \quad (8.50)$$

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (8.51)$$

Im Resonanzfall verschwindet nach Gleichung 8.42 der Imaginärteil der Impedanz. Folglich heben sich bei dieser Anordnung die Reaktanzen von Induktivität und Kapazität auf. Durch einsetzen von \underline{Z} in die Resonanzbedingung lässt sich die Resonanzfrequenz ω_0 bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\underline{Z}\} &= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (8.52)$$

Da die Reaktanz der Induktivität positiv und proportional zur Frequenz ist ($X_L \sim \omega$), und da die Reaktanz der Kapazität negativ und proportional zum Kehrwert der Frequenz ist ($-X_C \sim \frac{1}{\omega}$), überwiegt für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz der induktive Anteil und für Frequenzen unterhalb der kapazitive Anteil.

Daraus ergibt sich die folgende Fallunterscheidung für den RLC-Serienschwingkreis:

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} = \begin{cases} \omega L - \frac{1}{\omega C} < 0 & \omega < \omega_0 & \text{ohmsch-kapazitiv} \\ \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 & \omega = \omega_0 & \text{rein ohmsch} \\ \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0 & \omega > \omega_0 & \text{ohmsch-induktiv} \end{cases} \quad (8.53)$$

Die Fallunterscheidung wird in Abbildung 8.34 anhand eines Zeigerdiagramms und in Abbildung 8.35 anhand einer Impedanzkurve verdeutlicht.

Exkurs: Freie Schwingung als Grenzfall der Resonanz

Die Bezeichnung Resonanz, von lateinisch *resonare* (widerhallen), bezieht sich, der Wortbedeutung entsprechend, immer auf Systemzustände bei externer Anregung.

Wie in Abbildung 8.30 gezeigt schwingt ein geladener RLC-Serienschwingkreis bei Kurzschluss der äußeren Anschlussklemmen im Zustand freier Schwingung mit dessen Eigenfrequenz.

Der Kurzschluss kann als ideale Spannungsquelle (Innenwiderstand $R_i = 0$) mit Spannung $U = 0$ betrachtet werden. Die Eigenfrequenz (mit Dämpfung) ergibt sich aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung des Schwingkreises. Mehr dazu in Modul 12: Schaltvorgänge.

Knoten- und Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R + u_L + u_C \stackrel{!}{=} 0 \\ i(t) &= i_R = i_L = i_C \end{aligned}$$

DGL:

$$\begin{aligned} u(t) &= iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \stackrel{!}{=} 0 \\ L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Ansatz:

$$i(t) = ke^{\lambda t} \qquad \frac{di}{dt} = k\lambda e^{\lambda t} \qquad \frac{d^2 i}{dt^2} = k\lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &= 0 \\ k \cdot \underbrace{\left(L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} \right)}_{=0} e^{j\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

Auflösen:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Wie in Modul 12 näher erläutert wird, ergibt sich für den Fall, dass $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ (geringe Dämpfung) eine komplexe Lösung. Nur in diesem Fall kann der Resonanzkreis frei schwingen mit, wobei der Realteil der Lösung die Abklingkonstante und der Imaginärteil (Wurzelterm) die Eigenkreisfrequenz ω_d definieren:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

8.5.4.1 Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm

Abbildung 8.34 zeigt für alle drei Fälle exemplarisch ein Zeigerdiagramm. Gezeigt sind die entstehenden Spannungen über R , L und C , sowie die Gesamtspannung \underline{U} bei einer Anregung mit konstantem Strom \underline{I} . Die maßstabsgetreuen Längenverhältnisse $\frac{U_L}{U_C}$ entsprechen: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{1}$.

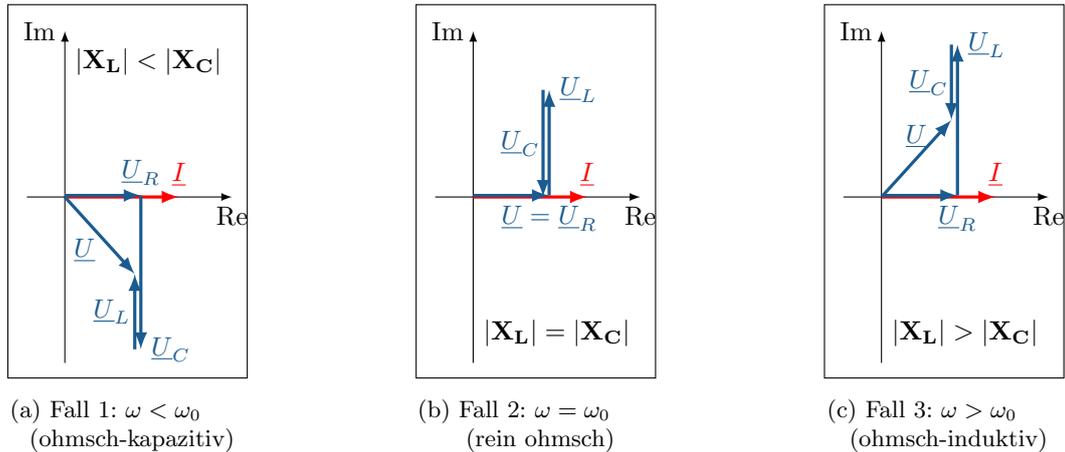


Abbildung 8.34: Zeigerdiagramm RLC-Serienschwingkreis

Da es sich um einen passiven Schwingkreis handelt (Verbraucherpfilsystem), ist die Wirkleistung P des Schwingkreis immer positiv mit $P = \operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}\}$.

Bei reell eingprägtem Strom \underline{I} ist der Realanteil der Gesamtspannung \underline{U} daher immer positiv. Der Zeiger der Gesamtspannung \underline{U} deutet also entweder in den ersten Quadranten (ohmsch-induktiv), in den vierten Quadranten (ohmsch-kapazitiv) oder auf die reale Achse (rein ohmsch).

8.5.4.2 Fallunterscheidung in Impedanzkurve

Für den Reihenschwingkreis aus Abbildung 8.33 ergibt sich die Impedanz zu:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R + j(X_L + X_C) \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned} \quad (8.54)$$

Die kapazitive Reaktanz (hyperbolisch) überwiegt für Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz, die induktive Reaktanz (linear) überwiegt für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz wie in Gleichung 8.53 gezeigt ist.

Abbildung 8.35 zeigt die Impedanzkurve eines RLC-Serienschwingkreises in Abhängigkeit der Frequenz bezogen auf die Resonanzfrequenz f/f_0 äquivalent ω/ω_0 . Gezeigt sind die Beträge der Impedanz $|\underline{Z}|$, der Reaktanz $|X|$, der Reaktanz der Induktivität $|X_L|$, der Reaktanz der Kapazität $|X_C|$ und des ohmschen Widerstandes R .

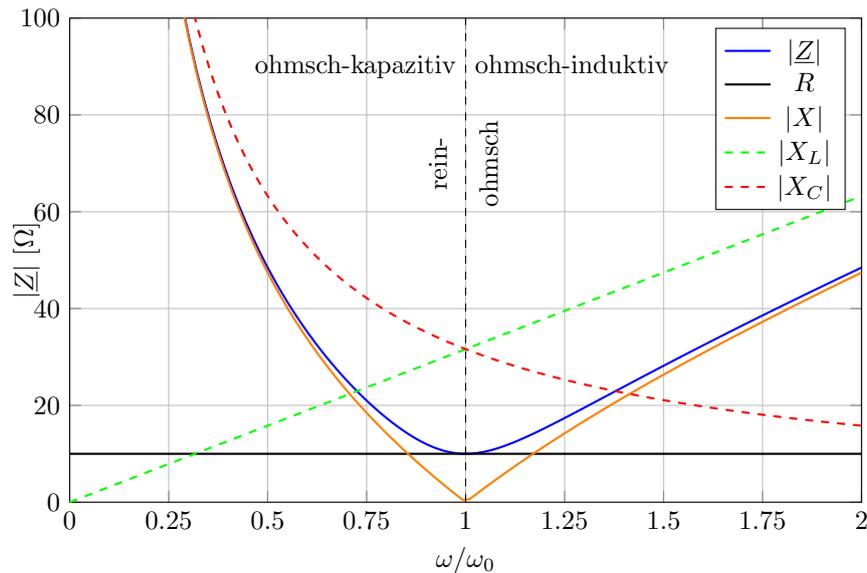


Abbildung 8.35: Impedanzkurve RLC-Serienschwingkreis
mit $R = 10 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$

Wie in der Impedanzkurve zu erkennen ist, ist die Impedanz im Resonanzfall rein ohmsch und entspricht dem ohmschen Widerstand R :

$$\underline{Z}_0 = R \quad (8.55)$$

Die Reaktanz der Induktivität X_L (positiv) und die Reaktanz der Kapazität X_C (negativ) heben sich im Resonanzfall auf (Schnittpunkt der Kurven). Die Beträge beider Reaktanzen sind im Resonanzfall gleich und entsprechen dem Kennwiderstand X_k :

$$\begin{aligned} X_k &= |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &= \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \end{aligned} \quad (8.56)$$

Zu erkennen ist noch, dass der Betrag der Impedanz sich für sehr niedrige Frequenzen $\omega \ll \omega_0$ dem kapazitiven Verlauf annähert mit $\lim_{\omega \rightarrow 0} |Z| = |X_C|$ und für sehr hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ dem induktiven Verlauf annähert mit $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z| = |X_L|$.

8.5.4.3 Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Reihenschwingkreises

Die Impedanz eines RLC-Serienschwingkreises lässt wie in Gleichung 8.51 über die Bauteilgrößen R , L und C in Abhängigkeit der Frequenz ω ausdrücken:

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (8.57)$$

Mithilfe der Resonanzkreisfrequenz aus Gleichung 8.52 kann die Kreisfrequenz auf diese normiert werden. Hierfür werden die ω der Reaktanz-Terme mit ω_0 erweitert ($\omega = \omega \frac{\omega_0}{\omega_0}$). Dadurch lassen sich die Reaktanzen X_L und X_C mithilfe des Kennwiderstandes X_k aus Gl. 8.56 ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= R + j \left(\omega L \frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{\omega C} \frac{\omega_0}{\omega_0} \right) \\
&= R + j \left(X_{L,0} \frac{\omega}{\omega_0} + X_{C,0} \frac{\omega}{\omega_0} \right) \\
&= R + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) X_k
\end{aligned} \tag{8.58}$$

Dabei gilt:

$$X_L = +X_k \frac{\omega}{\omega_0} = +\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{\omega\sqrt{LC}}{1} = \omega L \quad (\text{linear}) \tag{8.59}$$

$$X_C = -X_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{LC}} = -\frac{1}{\omega C} \quad (\text{hyperbolisch}) \tag{8.60}$$

$$X_k = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{konstant}) \tag{8.61}$$

Wie in Gleichung 8.46 konstatiert, ist die Güte Q eines Reihenschwingkreises das Verhältnis dessen Kennwiderstandes X_k zum dessen ohmschen Widerstand R . Dadurch lässt sich die Impedanz des Schwingkreises normiert auf dessen Kennwiderstand X_k mithilfe der Güte Q ausdrücken:

$$\frac{\underline{Z}}{X_k} = \frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad \text{mit} \quad Q = \frac{X_k}{R} \tag{8.62}$$

Der Term $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ wird auch als relative Verstimmung ν_r bezeichnet. [hagmann]

Abbildung 8.36 zeigt exemplarisch mehrere Resonanzkurven eines RLC-Serienschwingkreises für unterschiedliche Gütefaktoren Q zum Vergleich. Die y-Achse zeigt den Impedanzbetrag normiert auf den Kennwiderstand X_k und die x-Achse zeigt die Frequenz normiert auf die Resonanzfrequenz ω_0 .

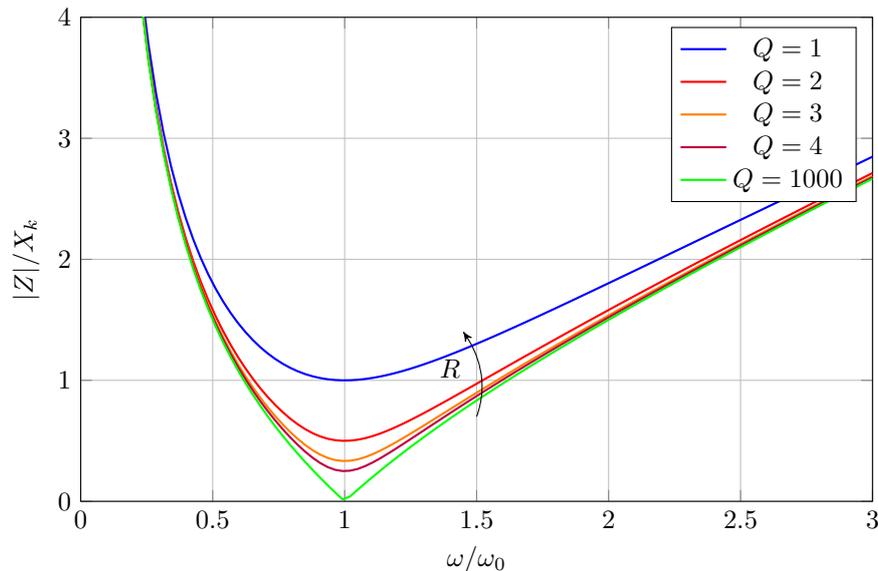


Abbildung 8.36: Resonanzkurve der Impedanz, RLC-Serienschwingkreis, Vergleich Güten

Im Bereich der Resonanzfrequenz zeigt sich der deutlichste Unterschied der einzelnen Impedanzkurven für unterschiedliche Gütefaktoren. Wie in Gleichung 8.55 gezeigt ist, gilt im Resonanzfall: $Z_0 = R$.

Eine hohe Güte bedeutet, dass der Schwingkreis bei Resonanzfrequenz eine sehr geringe Impedanz bezogen auf den Kennwiderstand X_k aufweist. Der Gütefaktor ist daher auch Maß für die Schwingungsfähigkeit des Schwingkreises beziehungsweise umgekehrt für die Dämpfung.

Dabei gilt für den Serienschwingkreis:

$$Q = \frac{X_k}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \quad (8.63)$$

Für Frequenzen weit unterhalb der Grenzfrequenz $\omega \ll \omega_0$ und weit oberhalb $\omega \gg \omega_0$ dominieren die Blindanteile der Impedanz wie in Kapitel 8.5.4 gezeigt ist. Daher ist der Einfluss der Güte auf die Impedanz bei diesen Frequenzen gering (Annäherung der Kurven).

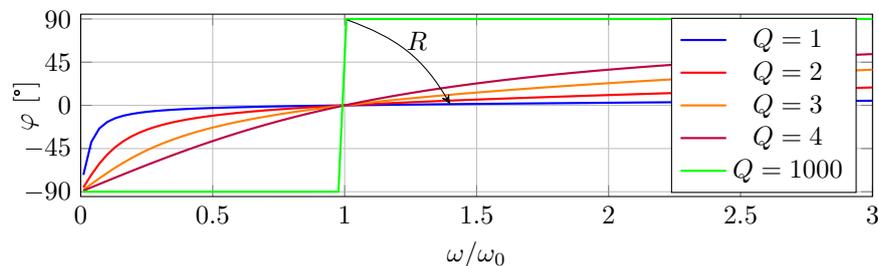


Abbildung 8.37: Resonanzkurve der Phase, RLC-Serienschwingkreis, Vergleich Güten

Abbildung 8.37 zeigt die Phasenkurve des Schwingkreises für unterschiedliche Güten mit $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$. Für Frequenzen deutlich unterhalb der Resonanzfrequenz $\omega \ll \omega_0$ ist die Phasenverschiebung φ nahezu -90° (rein kapazitiv). Für Frequenzen deutlich oberhalb der Resonanzfrequenz $\omega \gg \omega_0$ ist die Phasenverschiebung φ nahezu $+90^\circ$ (rein induktiv).

Je höher die Güte (Resonanzschärfe), desto steiler ist der Übergang im Bereich der Resonanzfrequenz von kapazitiv zu induktiv.

8.5.4.4 Spannungsresonanz am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises

Bei Anregung eines Serienschwingkreises mit einer konstanten Spannungsquelle \underline{U}_q kann es zu einer **Spannungsresonanz** kommen, die sich durch Überspannungen an L und C auszeichnet.

Untersucht sei der RLC-Serienschwingkreis aus Abbildung 8.33 mit der Impedanz \underline{Z} aus Gleichung 8.51. Die Spannung \underline{U} über den Schwingkreis entspricht der konstanten Quellenspannung \underline{U}_q an dessen Außenklemmen wie in Abbildung 8.38 gezeigt.

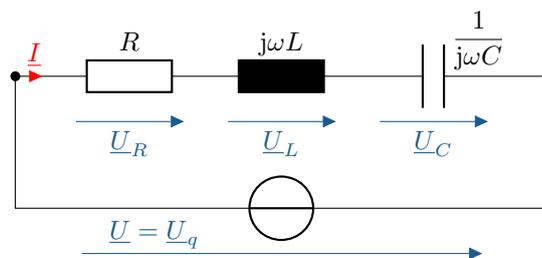


Abbildung 8.38: Schaltbild RLC-Serienschwingkreis mit konstanter Spannungsquelle

Mit der Knoten- und Maschengleichung:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}_q \\ \underline{I} &= \underline{I}_R = \underline{I}_L = \underline{I}_C\end{aligned}$$

und der Bauteil-Impedanzen folgen die komplexen Spannungsteiler:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} &= \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} &= \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} &= \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\end{aligned}$$

Nach Kürzen der Ströme bleiben die frequenzvariablen Impedanzterme. Die einzelnen Spannungen ergeben sich durch deren Multiplikation mit der Spannung \underline{U} .

Um die frequenzabhängigen Spannungen zu normieren, lassen sich die Reaktanzen wie in Gleichung 8.56 mithilfe des Kennwiderstandes X_k und der Resonanzkreisfrequenz ω_0 aus Gleichung 8.52 ausdrücken. Mit der so normierten Impedanz aus Gleichung 8.58 ergibt sich für die Spannungsteiler die Terme:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} &= \frac{R}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k} \\ \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} &= \frac{jX_k \frac{\omega}{\omega_0}}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k} \\ \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} &= \frac{-jX_k \frac{\omega_0}{\omega}}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k}\end{aligned}$$

Abbildung 8.39 zeigt die Beträge der Spannungen U_R , U_L , U_C des RLC-Serienschwingkreises in Abhängigkeit der Kreisfrequenz normiert auf die Resonanzkreisfrequenz. Die Normierung auf ω_0 ermöglicht zum Beispiel den Vergleich der Güte von Reihenschwingkreisen mit unterschiedlichen Resonanzfrequenzen.

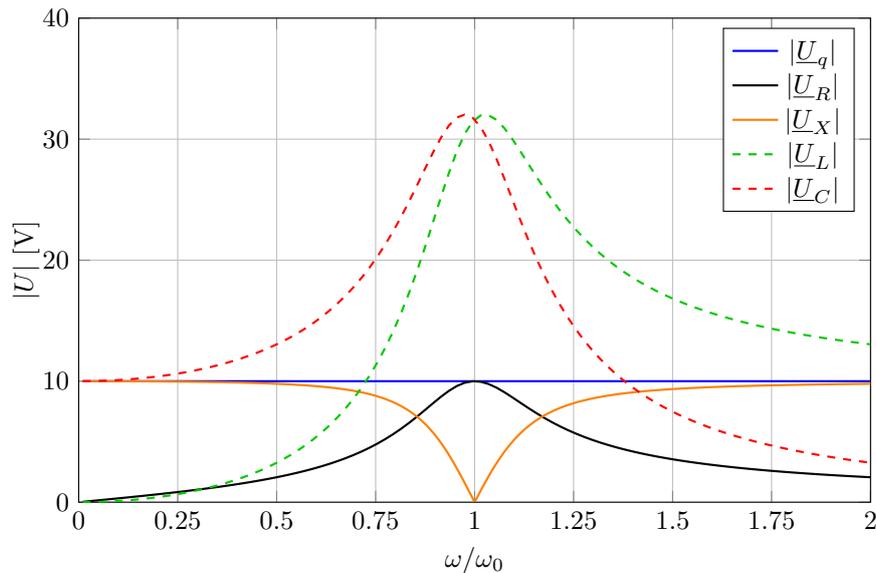


Abbildung 8.39: Resonanzkurve der Spannung am RLC-Serienschwingkreis
 $U_q = 10 \text{ V}$, $Q = 3,162$

Wie in der Abbildung zu erkennen ist, ergibt sich im Bereich der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ eine deutlich höhere Spannung über L und C im Vergleich zum ohmschen Widerstand R .

Das Maß der Spannungsüberhöhung bei der Resonanzkreisfrequenz wird durch die Güte ausgedrückt. Wie in Gleichung 8.48 definiert ist, entspricht sie dem Verhältnis von Überspannung der Scheinwiderstände (X_L , X_C) $U_{L,0}$, $U_{C,0}$ zu Spannung des Wirkwiderstandes (R) $U_{R,0}$ im Resonanzfall ($\omega = \omega_0$).

$$Q = \frac{U_{L,0}}{U} = \frac{U_{C,0}}{U} = \frac{X_k}{R} \quad (8.64)$$

Wie in der Graphik zu erkennen ist, sind die Spannungsbeträge $|U_L|$ und $|U_C|$ nicht exakt bei der Resonanzfrequenz maximal!

Exkurs: Herleitung der Güte über die Blindleistung

Allgemein gilt für die Scheinleistung eines Bauteiles:

$$\underline{S} = S \cdot e^{j\varphi} \quad (8.65)$$

$$= U \cdot I \cos \varphi + jU \cdot I \sin \varphi \quad (8.66)$$

$$= P \cdot jQ \quad (8.67)$$

Induktivität und Kapazität können als Scheinwiderstände lediglich Blindleistung aufnehmen und abgeben. Mit $\varphi_L = +90^\circ$ und $\varphi_C = -90^\circ$ folgt für den Resonanzfall für die Blindleistung beider Bauteile:

$$Q_L = U_L I_L \cdot \sin\left(+\frac{\pi}{2}\right) = +U_L \cdot I_L$$

$$Q_C = U_C I_C \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -U_L \cdot I_L \quad (8.68)$$

Bei Anregung mit einer konstanten Spannungsquelle \underline{U}_q fließt im Reihenschwingkreis der gleiche Strom \underline{I} durch alle Bauteile.

Mit der allgemeinen Definition der Güte über die Blindleistung in Gleichung 8.45 der Induktivität Q_L respektive der Kapazität Q_C und der Wirkleistung P des Schwingkreises im Resonanzfall folgt für den Reihenschwingkreis:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{|Q_{L,0}|}{P_0} = \frac{U_{L,0}I_L}{U_{R,0}I_R} = \frac{U_{L,0}I}{U_{R,0}I} = \frac{U_{L,0}}{U} \\ &= \frac{|Q_{C,0}|}{P_0} = \frac{U_{C,0}I_C}{U_{R,0}I_R} = \frac{U_{C,0}I}{U_{R,0}I} = \frac{U_{C,0}}{U} \end{aligned} \quad (8.69)$$

Die Güte entspricht deshalb wie in Gleichung 8.69 gezeigt und in Gleichung 8.48 konstatiert, dem Verhältnis der Überspannung der Scheinwiderstände (L , C) gegenüber der Spannung des Wirkwiderstandes (R) im Resonanzfall.

Über die Spannungsteiler-Regel lässt sich die Güte durch einsetzen der Reaktanzen für den Resonanzfall auch als Verhältnis von Kennwiderstand zu Wirkwiderstand ausdrücken wie in Gleichung 8.46 konstatiert. Mit X_k aus Gl. 8.56 und \underline{Z} aus Gl. 8.51 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{U_{L,0}}{U} &= \frac{I}{I} \cdot \frac{|jX_{L,0}|}{|R + j(X_{L,0} + X_{C,0})|} \\ &= \frac{|X_{L,0}|}{|R + j(\underbrace{X_{L,0} + X_{C,0}}_{=0})|} \\ &= \frac{|X_{L,0}|}{R} = \frac{X_k}{R} = Q \end{aligned} \quad (8.70)$$

8.5.4.5 Stromkurve des RLC-Reihenschwingkreises

Bei Anregung mit konstanter Spannung \underline{U}_q ergibt sich für den RLC-Serienschwingkreis aus Abbildung 8.38 ein frequenzabhängiger Stromverlauf. Dieser ist betragsmäßig in Abbildung 8.40 für verschiedene Gütefaktoren Q dargestellt.

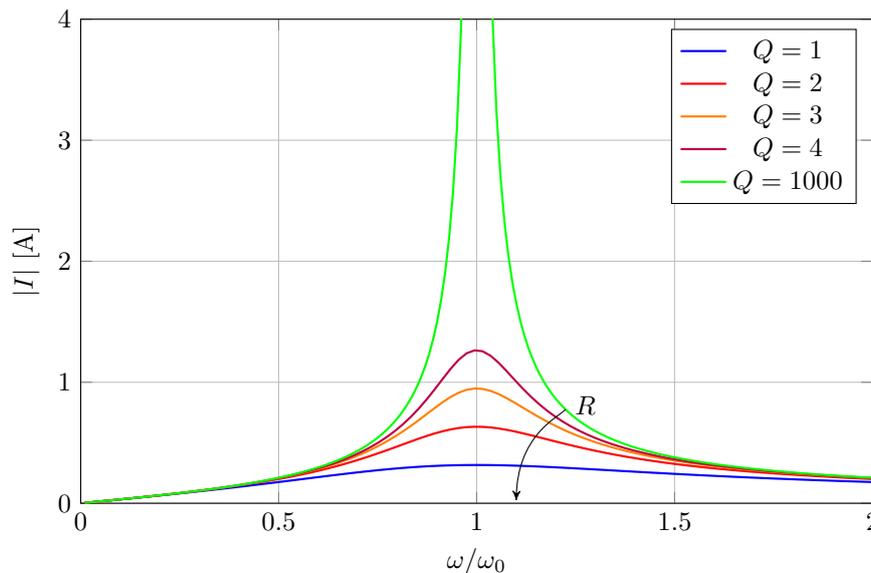


Abbildung 8.40: Stromkurve des RLC-Serienschwingkreises bei konstanter Spannung $X_k = 31,6 \Omega$, $U_q = 10 \text{ V}$, $Q = \text{var}$.

Der Strombetrag wird maximal bei Resonanzfrequenz wie der Graphik zu entnehmen ist. Wie in Abbildung 8.35 gezeigt ist, ist die Impedanz im Resonanzfall minimal und entspricht dem ohmschen Widerstand R .

Allgemein gilt für den Strom \underline{I} der folgende Zusammenhang mit der Impedanz \underline{Z} aus Gleichung 8.58 und Resonanzfrequenz ω_0 aus Gleichung 8.52:

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\ &= \frac{\underline{U}_q}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{\underline{U}_q}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k}\end{aligned}\quad (8.71)$$

Der Maximalstrom I_0 ergibt sich für eine reelle Quellenspannung $\underline{U}_q = U_q$ aus dem Teiler der Quellenspannung durch den Widerstand R :

$$I_0 = \frac{U_q}{R} \quad \text{mit} \quad \underline{Z}_0 = R \quad (8.72)$$

Das heißt sowohl der Gesamtstrom \underline{I} als auch dessen Wirkanteil $\text{Re}\{\underline{I}\}$ werden durch den Widerstand R begrenzt.

Für den Strom \underline{I} bezogen auf den Maximalstrom I_0 gilt mit der Güte aus Gleichung 8.69:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{I}}{I_0} &= \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}} \cdot \frac{R}{U_q} = \frac{R}{\underline{Z}} \\ &= \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) Q}\end{aligned}\quad (8.73)$$

8.5.4.6 Spannungskurve des RLC-Reihenschwingkreis

Wird ein RLC-Serienschwingkreis mit einem konstanten Strom \underline{I}_q wie in Abbildung 8.41 angeregt, ergeben sich Bauteilspannungen.

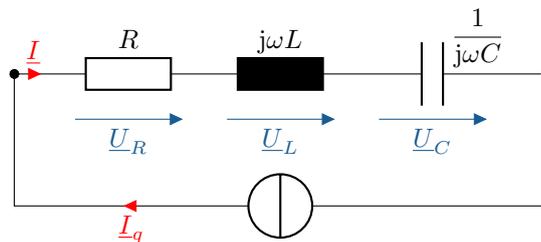


Abbildung 8.41: Schaltbild RLC-Serienschwingkreis mit konstanter Stromquelle

Die Bauteilspannungen sind dabei direkt proportional zu den jeweiligen Impedanzen. Für die Gesamtspannung gilt:

$$\underline{U} = \underline{I}_q \cdot \underline{Z}$$

Die Spannungskurve entspricht daher exakt dem Verlauf der Impedanzkurve in Abbildung 8.36.

8.5.5 RLC-Parallelschwingkreis - Resonanzverhalten

In diesem Unterkapitel wird das Resonanzverhalten eines RLC-Parallelschwingkreises untersucht. Der Schwingkreis ist in Abbildung 8.42 gezeigt und entspricht dem idealen LC-Parallelschwingkreis aus Beispiel 8.5 mit einem zusätzlichen parallelen ohmschen Widerstand R .

Die Untersuchung erfolgt analog zu jener für den RLC-Serienschwingkreis in Kapitel 8.5.4. Im Parallelschwingkreis wird dabei vornehmlich die Admittanz \underline{Y} betrachtet. Dadurch ergeben sich ähnliche Fallunterscheidungen und Rechenwege wie im Serienschwingkreis, wobei die Rollen von Strom und Spannung, von Induktivität und Kapazität, sowie von Widerstand und Leitwert vertauscht sind:

$$\underline{Y} = \underline{Z}^{-1} = G + jB = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad (8.74)$$

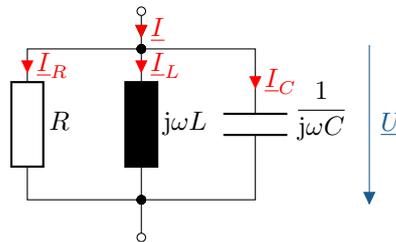


Abbildung 8.42: Schaltbild RLC-Parallelschwingkreis

Die Admittanz \underline{Y} des RLC-Parallelschwingkreises aus Abbildung 8.42 ist gegeben durch:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot (G + jB_C + jB_L) \quad (8.75)$$

$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (8.76)$$

Im Resonanzfall verschwindet nach Gleichung 8.42 der Imaginärteil der Impedanz respektive Admittanz. Folglich heben sich bei dieser Anordnung die Suszeptanzen von Induktivität B_L und Kapazität B_C auf. Durch einsetzen von \underline{Y} in die Resonanzbedingung lässt sich die Resonanzfrequenz ω_0 bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\underline{Y}\} &= \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (8.77)$$

Da die Suszeptanz der Kapazität positiv und proportional zur Frequenz ist ($B_C = \omega C \sim \omega$), und da die Suszeptanz der Induktivität negativ und proportional zum Kehrwert der Frequenz ist ($-B_L \sim \frac{1}{\omega}$), überwiegt für Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz der induktive Anteil und für Frequenzen oberhalb der kapazitive Anteil.

Daraus ergibt sich die folgende Fallunterscheidung für den RLC-Serienschwingkreis:

$$\text{Im}\{\underline{Y}\} = \begin{cases} \omega C - \frac{1}{\omega L} < 0 & \omega < \omega_0 & \text{ohmsch-induktiv} \\ \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 & \omega = \omega_0 & \text{rein ohmsch} \\ \omega C - \frac{1}{\omega L} > 0 & \omega > \omega_0 & \text{ohmsch-kapazitiv} \end{cases} \quad (8.78)$$

Die Fallunterscheidung wird in Abbildung 8.43 anhand eines Zeigerdiagramms und in Abbildung 8.44 anhand einer Admittanzkurve verdeutlicht.

8.5.5.1 Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm

Abbildung 8.43 zeigt für alle drei Fälle exemplarisch ein Zeigerdiagramm.

Gezeigt sind die entstehenden Ströme durch R , L und C , sowie der Gesamtstrom \underline{I} bei Anregung mit konstanter Spannung \underline{U} . Die maßstabsgetreuen Längenverhältnisse $\frac{I_L}{I_C}$ entsprechen: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{1}$.

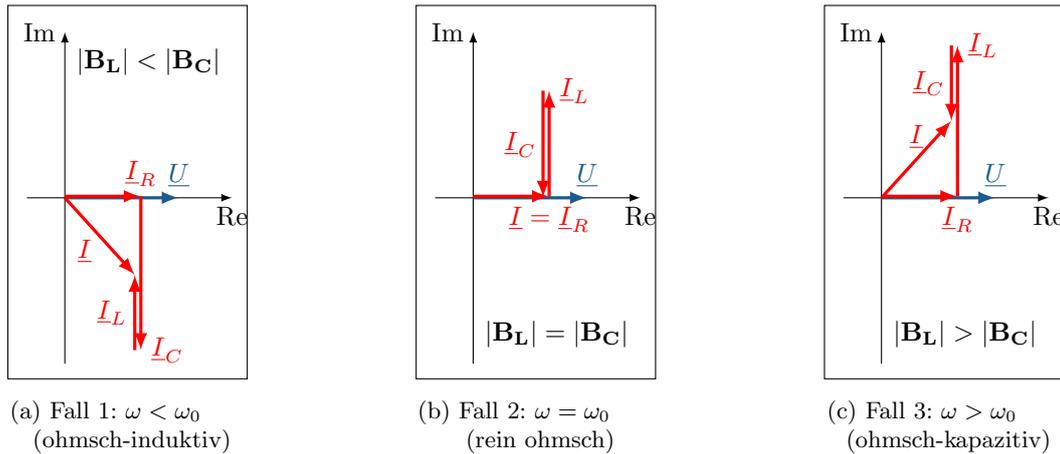


Abbildung 8.43: Zeigerdiagramm RLC-Parallelschwingkreis

Da es sich um einen passiven Schwingkreis handelt (Verbraucherzählpeilsystem), ist die Wirkleistung P des Schwingkreises immer positiv mit $P = \text{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}\}$.

Bei angelegter Spannung \underline{U} (mit Phasenwinkel 0 eingezeichnet) ist der Realanteil des Gesamtstrom \underline{I} immer positiv. Der Zeiger des Gesamtstrom \underline{I} deutet also entweder in den ersten Quadranten (ohmsch-induktiv), auf die reelle Achse (rein ohmsch) oder in den vierten Quadranten (ohmsch-kapazitiv).

8.5.5.2 Fallunterscheidung in Admittanzkurve

Für den Parallelschwingkreis aus Abbildung 8.42 ergibt sich die Admittanz wie in Gleichung 8.76 zu:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= G + j(B_C + B_L) \\ &= G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \end{aligned} \quad (8.79)$$

Die induktive Suszeptanz (hyperbolisch) überwiegt für Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz, die kapazitive Suszeptanz (linear) überwiegt für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz wie in Gleichung 8.78 gezeigt ist.

Abbildung 8.44 zeigt die Admittanzkurve eines RLC-Parallelschwingkreises in Abhängigkeit der Frequenz bezogen auf die Resonanzfrequenz f/f_0 äquivalent ω/ω_0 . Gezeigt sind die Beträge der Admittanz $|\underline{Y}|$, der Suszeptanz $|B|$, der Suszeptanz der Kapazität $|B_C|$, der Suszeptanz der Induktivität $|B_L|$ und der ohmsche Leitwert G .

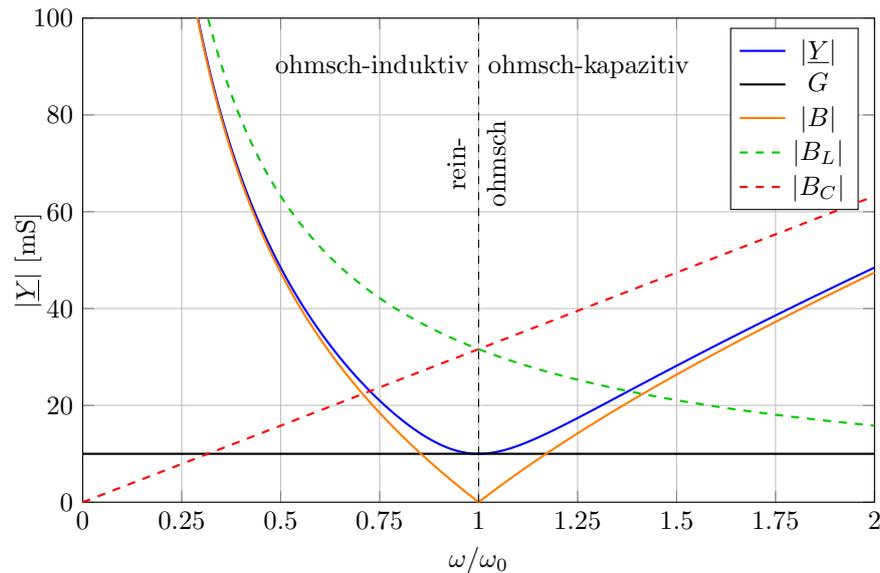


Abbildung 8.44: Admittanzkurve RLC-Parallelschwingkreis
mit $R = 10 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$

Wie in der Admittanzkurve zu erkennen ist, ist die Admittanz im Resonanzfall rein ohmsch und entspricht exakt dem ohmschen Leitwert G :

$$\underline{Y}_0 = G \quad (8.80)$$

Die Suszeptanzen der Kapazität B_C (positiv) und der Induktivität B_L (negativ) heben sich im Resonanzfall auf (Schnittpunkt der Kurven). Die Beträge beider Suszeptanzen sind im Resonanzfall gleich und entsprechen dem Kennleitwert B_k :

$$\begin{aligned} B_k &= |B_{C,0}| = |B_{L,0}| = \sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \end{aligned} \quad (8.81)$$

Zu erkennen ist noch, dass der Betrag der Admittanz sich für sehr niedrige Frequenzen $\omega \ll \omega_0$ dem induktiven Verlauf annähert mit $\lim_{\omega \rightarrow 0} |Y| = |B_L|$ und für sehr hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ dem kapazitiven Verlauf annähert mit $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Y| = |B_C|$.

8.5.5.3 Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Parallelschwingkreis

Die Admittanz eines RLC-Parallelschwingkreis lässt wie in Gleichung 8.76 über die Bauteilgrößen R , L und C in Abhängigkeit der Frequenz ω ausdrücken mit:

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (8.82)$$

Mithilfe der Resonanzkreisfrequenz aus Gleichung 8.77 kann die Kreisfrequenz auf diese normiert werden. Die Berechnung erfolgt analog zur Frequenznormierung bei der Impedanz des RLC-Serienschwingkreises in Gleichung 8.58. Die Suszeptanzen B_C und B_L werden dafür mithilfe des Kennleitwertes B_k aus Gl. 8.81 und dem Frequenzverhältnis von ω zu ω_0 beschrieben. Für die Admittanz folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{Y} &= G + j \left(\omega C \frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{\omega L} \frac{\omega_0}{\omega_0} \right) \\
&= G + j \left(B_{C,0} \frac{\omega}{\omega_0} - B_{L,0} \frac{\omega}{\omega_0} \right) \\
&= G + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) B_k
\end{aligned} \tag{8.83}$$

Dabei gilt:

$$B_C = +B_k \frac{\omega}{\omega_0} = \omega C \quad (\text{linear}) \tag{8.84}$$

$$B_L = -B_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{\omega L} \quad (\text{hyperbolisch}) \tag{8.85}$$

$$B_k = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{konstant}) \tag{8.86}$$

Wie in Gleichung 8.47 konstatiert, lässt sich die Güte Q eines Parallelschwingkreises durch das Verhältnis von Kennleitwert B_k zum Wirkleitwert G beschreiben. Die Definition unterscheidet sich in dieser Hinsicht von jener im Serienschwingkreis.

Über die allgemeine Definition der Güte in Gleichung 8.45 anhand des Verhältnisses von Blindleistung zu Wirkleistung lässt sich die spezielle Güte-Definition für den Parallelschwingkreis ableiten. Gleiches gilt für den Serienschwingkreis wie in Gleichung 8.69 gezeigt ist.:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{|Q_{L,0}|}{P_0} = \frac{U \cdot I_{L,0}}{U \cdot I_R} = \frac{I_{L,0}}{I_R} = \frac{|B_{L,0}|}{G} \\
&= \frac{|Q_{C,0}|}{P_0} = \frac{U \cdot I_{C,0}}{U \cdot I_R} = \frac{I_{C,0}}{I_R} = \frac{|B_{C,0}|}{G} = \frac{B_k}{G}
\end{aligned} \tag{8.87}$$

Dadurch lässt sich die Impedanz des Schwingkreises normiert auf dessen Kennleitwert B_k mithilfe der Güte Q ausdrücken:

$$\frac{\underline{Y}}{B_k} = \frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad \text{mit} \quad Q = \frac{B_k}{G} \tag{8.88}$$

Der Term $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ wird auch als relative Verstimmung ν_r bezeichnet. [hagmann]

Abbildung 8.45 zeigt exemplarisch mehrere Resonanzkurven eines RLC-Parallelschwingkreises für unterschiedliche Gütefaktoren Q zum Vergleich. Die y-Achse zeigt den Admittanzbetrag normiert auf den Kennleitwert B_k und die x-Achse zeigt die Kreisfrequenz normiert auf die Resonanzkreisfrequenz ω_0 .

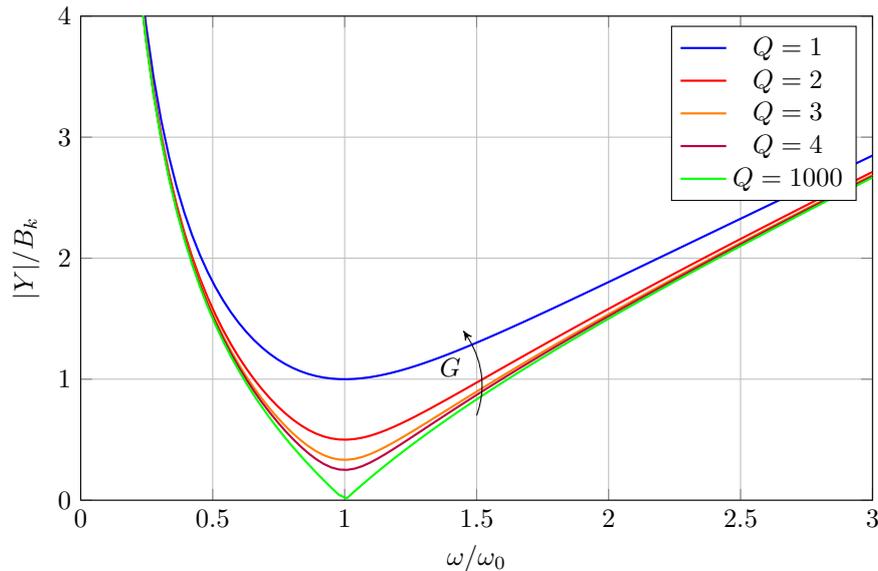


Abbildung 8.45: Resonanzkurve RLC-Parallelschwingkreis, Vergleich Gütefaktoren

Die Bauteilgrößen sind gleich gewählt wie für die Impedanzkurve des RLC-Serienschwingkreises in Abbildung 8.35. Anhand der Gleichungen 8.83 und 8.88 zeigt sich, dass die normierte Darstellung bei beiden Kurven den direkten Vergleich der Gütefaktoren ermöglicht.

Im Bereich der Resonanzfrequenz zeigt sich der deutlichste Unterschied der einzelnen Admittanzkurven für unterschiedliche Gütefaktoren. Mit $\underline{Y}_0 = G = \frac{B_k}{Q}$ entspricht die Admittanz im Resonanzfall direkt dem ohmschen Leitwert G und ist umgekehrt proportional zur Güte.

Die Güte ist Maß für die Schwingungsfähigkeit des Schwingkreises und Maß für die umgekehrte Dämpfung des Schwingkreises. Im Gegensatz zu einem Reihenschwingkreis bedeutet eine hohe Güte im Parallelschwingkreis einen geringen Wirkleitwert G (hoher Wirkwiderstand R) im Verhältnis zu einem hohen Blindleitwert B (geringer Blindwiderstand X).

8.5.5.4 Stromresonanz am Beispiel eines RLC-Parallelschwingkreises

Bei Anregung eines Parallelschwingkreises mit einer konstanten Stromquelle \underline{I}_q kann es zu einer **Stromresonanz** kommen, die sich durch Überströmen zwischen L und C auszeichnet.

Untersucht sei der RLC-Parallelschwingkreis aus Abbildung 8.42 mit der Admittanz \underline{Y} aus Gleichung 8.76. Der Strom \underline{I} durch den Schwingkreis entspricht dem konstanten Quellenstrom \underline{I}_q an dessen Außenklemmen wie in Abbildung 8.46 gezeigt ist.

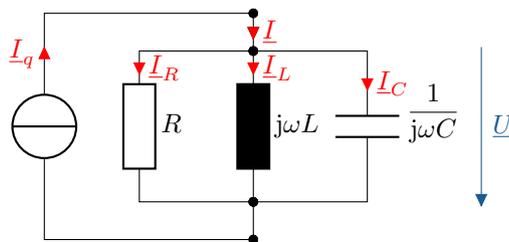


Abbildung 8.46: Schaltbild RLC-Parallelschwingkreis mit konstanter Stromquelle

Mit der Knoten- und Maschengleichung:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C \\ \underline{I} &= \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I}_q\end{aligned}$$

und der Bauteil-Admittanzen folgen die komplexen Stromteiler:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{I}_R}{\underline{I}} &= \frac{\underline{U}}{\underline{U}} \cdot \frac{\underline{Y}_R}{\underline{Y}} = \frac{G}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \\ \frac{\underline{I}_L}{\underline{I}} &= \frac{\underline{U}}{\underline{U}} \cdot \frac{\underline{Y}_L}{\underline{Y}} = \frac{\frac{1}{j\omega L}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \\ \frac{\underline{I}_C}{\underline{I}} &= \frac{\underline{U}}{\underline{U}} \cdot \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}} = \frac{j\omega C}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}\end{aligned}$$

Die Stromverhältnisse von Bauteilströmen zu Gesamtstrom entsprechen dem frequenzvariablen Verhältnis von Bauteiladmittanz zu Gesamtadmittanz. Die Berechnung des Stromteilers über die Admittanzen bietet sich in Parallelschaltungen aufgrund der einfachen Addition der Einzeladmittanzen an ähnlich wie die Berechnung über die Impedanz in Serienschaltungen.

Um die frequenzabhängigen Ströme zu normieren, lassen sich die Suszeptanzen wie in Gleichung 8.81 mithilfe des Kennleitwerts B_k und der Resonanzkreisfrequenz ω_0 aus Gleichung 8.77 ausdrücken. Mit der so normierten Admittanz aus Gleichung 8.83 ergeben sich für die Spannungsteiler die Terme:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{I}_R}{\underline{I}} &= \frac{G}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k} \\ \frac{\underline{I}_L}{\underline{I}} &= \frac{-j\frac{\omega_0}{\omega} B_k}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k} \\ \frac{\underline{I}_C}{\underline{I}} &= \frac{j\frac{\omega}{\omega_0} B_k}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k}\end{aligned}\tag{8.89}$$

Abbildung 8.47 zeigt die Beträge der Ströme I_R , I_L , I_C in Abhängigkeit der Kreisfrequenz normiert auf die Resonanzkreisfrequenz.

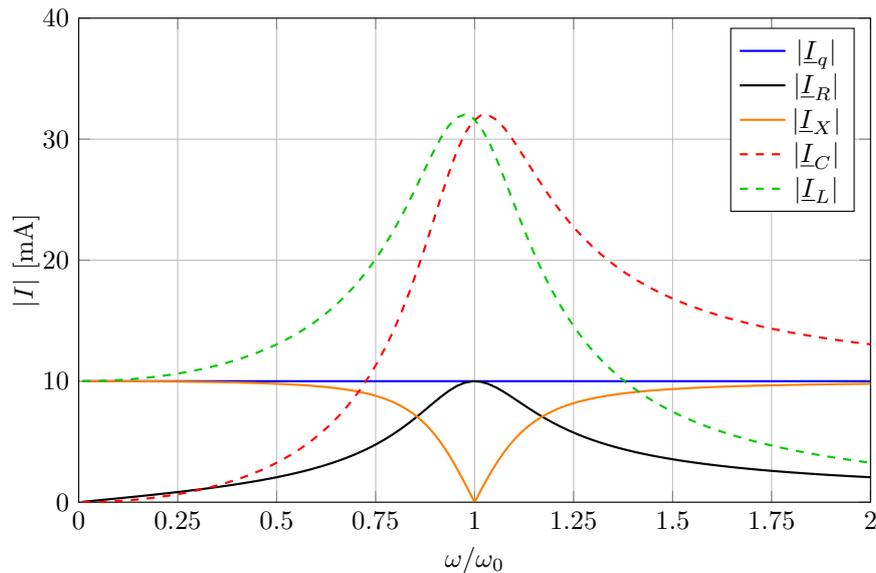


Abbildung 8.47: Resonanzkurve des Stromes am RLC-Parallelschwingkreis
 $U_q = 10 \text{ V}$, $Q = 3,162$

Wie in der Abbildung zu erkennen ist, ergibt sich im Bereich der Resonanzkreisfrequenz $\omega = \omega_0$ eine Stromüberhöhung bei L und C im Vergleich zum ohmschen Widerstand R . Dabei liegt das jeweilige Maximum des Stromes nicht exakt bei ω_0 , sondern für L leicht unterhalb und für C leicht oberhalb der Resonanzfrequenz.

Die Güte entspricht wie in Gleichung 8.87 gezeigt und in Gleichung 8.49 konstatiert, dem Verhältnis des Überstromes zum Gesamtstrom im Resonanzfall. Im Resonanzfall gilt $I_0 = I_{R,0} = I_{q,0}$. Deshalb lässt sich die Güte der Stromteiler-Regel entsprechend als Verhältnis von Kennleitwert B_k zu Wirkleitwert G ausdrücken:

$$Q = \frac{I_{L,0}}{I} = \frac{I_{C,0}}{I} = \frac{B_k}{G} \quad (8.90)$$

Die frequenzabhängigen Stromverhältnisse ausgedrückt durch die Güte Q mit \underline{Y} aus Gleichung 8.88:

$$\begin{aligned} \frac{I_R}{I} &= \frac{\frac{1}{Q}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \\ \frac{I_L}{I} &= \frac{-j\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \\ \frac{I_C}{I} &= \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned} \quad (8.91)$$

8.5.5.5 Spannungskurve des RLC-Parallelschwingkreis

Bei Anregung mit konstantem Strom I_q wie in Abbildung 8.46 ergibt sich für den RLC-Parallelschwingkreis aus Abbildung 8.46 ein frequenzabhängiger Spannungsverlauf. Dieser ist betragsmäßig in Abbildung 8.48 für verschiedene Gütefaktoren Q dargestellt.

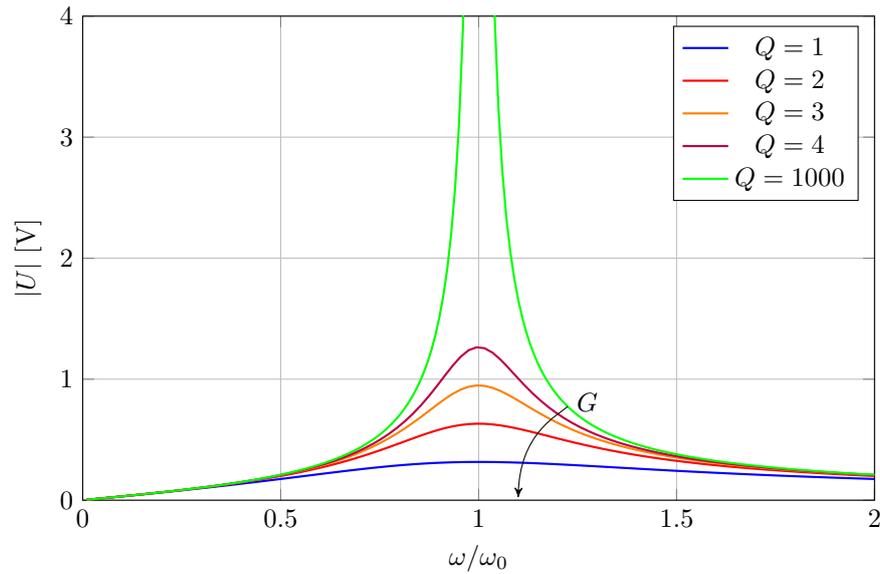


Abbildung 8.48: Spannungskurve des RLC-Parallelschwingkreises bei konstantem Strom $B_k = 31,6 \text{ mS}$, $I_q = 10 \text{ mA}$, $Q = \text{var.}$

Das Spannungsverhalten des RLC-Parallelschwingkreises ist analog zum Stromverhalten des RLC-Serienschwingkreises, wie es in Kapitel 8.5.4.5 beschrieben wurde.

Mit der Admittanz normiert auf den Kennleitwert aus Gleichung 8.88, den Kirchhoffschen Regeln und dem ohmschen Gesetz folgt für die Spannung \underline{U} :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} \\ &= \frac{\underline{I}_q}{G + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{\underline{I}_q}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k} \end{aligned} \quad (8.92)$$

Die Maximalspannung U_0 ergibt sich im Resonanzfall. Sie entspricht dem Teiler des reellen Quellenstrom $\underline{I}_q = I_q$ durch den Wirkleitwert G :

$$U_0 = \frac{I_q}{G} \quad \text{mit} \quad \underline{Y}_0 = G \quad (8.93)$$

Dadurch werden die komplexe Gesamtspannung \underline{U} als auch deren Wirkanteil $\text{Re}\{\underline{U}\}$ durch den Leitwert G und den Quellenstrom I_q begrenzt.

Für die Spannung \underline{U} normiert auf die Maximalspannung U_0 folgt aus Gl. 8.92:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}}{U_0} &= \frac{\underline{Y}}{\underline{I}_q} = \frac{G}{\underline{Y}} \\ &= \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) Q} \end{aligned} \quad (8.94)$$

Der normierte Spannungsverlauf des RLC-Parallelschwingkreises entspricht also exakt dem normierten Stromverlauf des RLC-Serienschwingkreises mit Abbildung 8.39 und Gleichung 8.73.

8.5.5.6 Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises

Die Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises bei Anregung mit einer konstanten Spannungsquelle \underline{U}_q ergibt sich aus der Admittanz \underline{Y} und der Spannungsquelle \underline{U}_q :

$$\underline{I} = \underline{U}_q \cdot \underline{Y}$$

Damit ist der Strom \underline{I} direkt proportional zur Admittanz \underline{Y} und damit zur Kreisfrequenz ω . Die Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises entspricht also der Admittanzkurve des Schwingkreises wie sie in Abbildung 8.45 dargestellt ist.

8.6 Nebenrechnungen

Frequenzgang eines RC-Tiefpass 1. Ordnung. [Nebenrechnung zu Gleichung (8.6)]

$$\begin{aligned}
 \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} & \Bigg| &= \frac{Z_C}{(Z_R + Z_C)} \cdot \frac{\underline{I}}{\underline{I}} & \text{Komplexe Spannungsteilerregel} \\
 &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} & \Bigg| &\cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} & \text{Rationalisieren} \\
 &= \frac{1}{j\omega CR + 1} & \Bigg| & & \text{Umformen} \\
 &= \frac{1}{1 + j\omega CR} & \Bigg| &\cdot \frac{1 - j\omega CR}{1 - j\omega CR} & \text{Optional für kartesische Form} \\
 &= \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} & & &
 \end{aligned} \tag{8.95}$$

Modul 9

Halbleiterbauelemente

9.1 Einführung

Halbleiterbauelemente bilden das Rückgrat der modernen Elektronik und sind entscheidend für die Funktionsweise zahlreicher elektronischer Geräte wie Computer, Mobiltelefone und Solarzellen. Diese Bauelemente nutzen die besonderen Eigenschaften von Materialien, die weder gute Leiter noch gute Isolatoren sind, sondern dazwischen liegen – die sogenannten Halbleiter. Im Folgenden wird auf ihre Funktionsweise eingegangen, beginnend mit dem Bändermodell, das die Energiezustände in Festkörpern beschreibt. Auf Grundlage verschiedener Eigenschaften werden weitere Halbleitermaterialien sowie deren Anwendungen erläutert. Ein grundlegendes Konzept, das eine Schlüsselrolle spielt, ist der pn-Übergang, der die Basis für eine Vielzahl von Bauelementen bildet. In diesem Kontext werden im zweiten Teil verschiedene Halbleiterbauelemente wie Dioden und Transistoren thematisiert sowie ihre Funktionen erläutert.



Abbildung 9.1: **Beispielfotos typischer Halbleiterbauelemente.** V.l.n.r.: Feldeffekttransistor, Bipolartransistor, Leuchtdiode, Diode.

Lernziele: Halbleiter

Die Studierenden können

- Zusammenhänge zwischen Festkörpern und dem Bändermodell erklären.
- Vorgänge innerhalb von Halbleitern beschreiben.
- verschiedene Halbleitermaterialien und deren Eigenschaften benennen.

9.1.1 Bändermodell

Das Bändermodell ist ein grundlegendes Konzept in der Festkörperphysik, das die physikalischen Eigenschaften von Festkörpern beschreibt. Es bietet eine theoretische Grundlage für das Verständnis der elektrischen, optischen und magnetischen Eigenschaften von Materialien. Das Modell organisiert die Energiezustände von Elektronen in sogenannten Energiebändern. Diese Bänder beeinflussen maßgeblich das elektronische Verhalten des Materials. Das Bändermodell ermöglicht es, komplexe Phänomene wie Leitung, Isolation, Halbleiterverhalten und die Bildung von Oberflächen- und Grenzflächenzuständen zu verstehen und zu erklären. Im folgenden Abschnitt werden die Grundprinzipien erläutert und ein Blick auf den Ladungsträgertransport geworfen.

Um das Bändermodell zu verstehen, soll zunächst der Bezug zum aus der Schulphysik bekannten Bohrschen Atommodell hergestellt werden. Im Bohrschen Atommodell werden die Energieniveaus von Elektronen in einem Atom als diskret angenommen. Nach diesem Modell befinden sich Elektronen auf definierten Bahnen um den Atomkern, die als Schalen bezeichnet werden. Jede Schale hat ein charakteristisches Energieniveau. Diese Energieniveaus sind in Bezug auf den Abstand vom Atomkern quantisiert, wobei Elektronen in den inneren Schalen niedrigere Energieniveaus aufweisen als Elektronen in den äußeren Schalen. Der Zusammenhang zwischen dem Bohrschen Atommodell und dem Bändermodell ist in Abbildung 9.2 dargestellt.

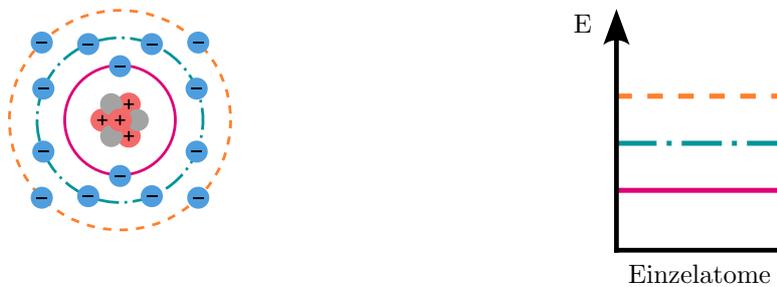


Abbildung 9.2: **Zusammenhang zwischen dem Bohrschen Atommodell und Bändermodell.** Darstellung des Zusammenhangs zwischen dem Abstand von Elektronen zum Kern und der Höhe des zugehörigen diskreten Energieniveaus. Links: Bohrsches Atommodell eines Si-Atoms. Rechts: Bändermodell eines Si-Atoms mit den möglichen Energieniveaus.

Bei einem einzelnen Atom sind die möglichen Energiezustände eindeutig definiert. Werden mindestens zwei Atome zusammengeführt, sodass sie elektrisch miteinander wechselwirken, überlappen sich deren Energiezustände. Aufgrund des Pauli-Prinzips, welches auch Ausschlussprinzip genannt wird, können zwei Elektronen allerdings nicht genau denselben Zustand annehmen, weshalb sich die Zustände minimal zueinander verschieben. Mit steigender Anzahl an Atomen steigt auch die Anzahl der verschiedenen Energiezustände in einem Festkörper. Da diese Niveaus sehr nahe beieinander liegen, werden sie zu den Energiebändern zusammengefasst. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 9.3 dargestellt.

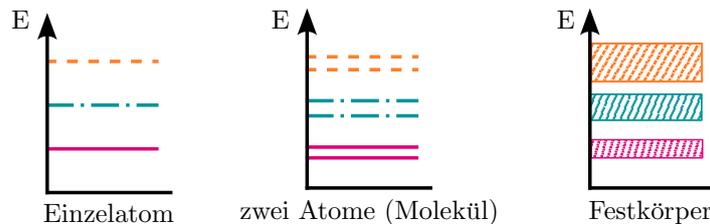


Abbildung 9.3: **Übergang von Energieniveaus zu Bändern.** Zusammenhang zwischen den möglichen Energiezuständen in Abhängigkeit zur Anzahl der Atome. V.l.n.r.: Energieniveaus von Elektronen bei einem Einzelatom, zwei Atomen (Molekül) und einem Festkörper.

Elektronen können nur feste Werte innerhalb der Energiebänder annehmen. In den Lücken zwischen den Bändern können sich keine Ladungsträger frei bewegen. Diese Lücken werden als „verbotener Bereich“ oder Bandlücke bezeichnet. Die Größe dieser Lücken bestimmt die elektrischen Eigenschaften des Materials. Die Energiedifferenz zwischen den Bändern entspricht der Energie, die bei Absorption oder Emission von Photonen aufgenommen oder abgegeben wird.

9.1.1.1 Einteilung von Materialien

Zwei Bänder sind besonders relevant für den Ladungstransport und somit für die elektrischen Eigenschaften: das Valenzband (VB) und das Leitungsband (LB). Das Valenzband ist das Band, das die höchsten Energieniveaus enthält, die von Elektronen besetzt sind, wenn das Material bei einer Temperatur von 0 K vorliegt. Diese Elektronen sind eng an die Atomkerne gebunden und tragen nicht zum elektrischen Strom bei. Das Leitungsband liegt oberhalb des Valenzbands und enthält leere Zustände, in denen Elektronen leicht angeregt werden können, beispielsweise durch eine Erhöhung der Temperatur. Elektronen im Leitungsband können sich relativ frei durch das Material bewegen und ermöglichen somit den elektrischen Stromfluss. Die drei grundlegenden Klassen Leiter, Halbleiter und Isolatoren lassen sich durch den Abstand (Bandlücke) dieser beiden relevanten Bänder definieren. In der folgenden Abbildung ist das Bändermodell eines Materials bei 0 K dargestellt, mit den relevanten Größen und Bezeichnungen.

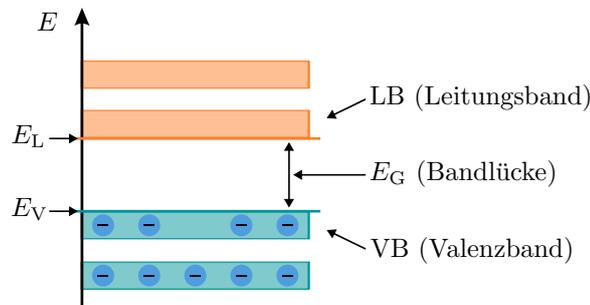


Abbildung 9.4: **Bändermodell eines Materials bei 0 K.** Darstellung der Energiebänder mit zugehöriger Beschriftung sowie deren alternativen Bezeichnungen.

Die Besetzung der Bänder mit Elektronen hängt neben der Temperatur von weiteren Faktoren ab. Vor allem durch gezielte Verunreinigung mit Fremdatomen, sogenannter Dotierung, kann die Leitfähigkeit beeinflusst werden. Die Fremdatome bringen freie Ladungsträger ein und führen zu zusätzlichen Energieniveaus innerhalb der Bandlücke, von denen aus zum Beispiel leichter Ladungsträger das Band wechseln können (siehe Abschnitt 9.1.3). Neben den bisher gezeigten Energieniveaus ist das Fermienergielevel eine weitere wichtige Größe. Dieses gibt den Energiewert an, bei dem Elektronen eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit von $1/2$ aufweisen. Bei einem undotierten Halbleiter liegt das Niveau mittig zwischen Valenz- und Leitungsband, bei dotierten Halbleitern verschiebt sich das Niveau in Richtung des jeweiligen Dotierbands.

Leiter sind Materialien, deren Valenz- und Leitungsbander aneinandergrenzen oder überlappen, was bedeutet, dass Elektronen leicht zwischen den Bändern wechseln können. Diese Nähe ermöglicht eine hohe Leitfähigkeit, da Elektronen sich frei durch das Material bewegen können. Metalle wie Kupfer und Aluminium sind typische Beispiele für Leiter.

Halbleiter haben eine kleine Bandlücke, die zwischen der des Leiters und der des Isolators liegt. Diese Bandlücke ist so groß, dass in dem Material bei niedrigen Temperaturen kein elektrischer Strom fließt, da Elektronen nicht genügend Energie haben, um ins Leitungsband angeregt zu werden. Mit steigender Temperatur oder durch das Einbringen von Fremdatomen kann die Leitfähigkeit jedoch deutlich erhöht werden. Halbleiter wie Silizium und Germanium sind häufig eingesetzte Materialien in der Elektronikindustrie.

Isolatoren haben eine große Bandlücke, die dazu führt, dass das Valenzband vollständig besetzt ist und das Leitungsband leer ist. Dadurch können Elektronen nur schwer ins Leitungsband angeregt werden, selbst bei hohem Energieeintrag. Isolatoren wie Glas und Keramik zeigen daher eine sehr geringe Leitfähigkeit.

Im Folgenden sind beispielhaft die Bändermodelle mit den Valenz- und Leitungsbandern der drei genannten Klassen dargestellt.

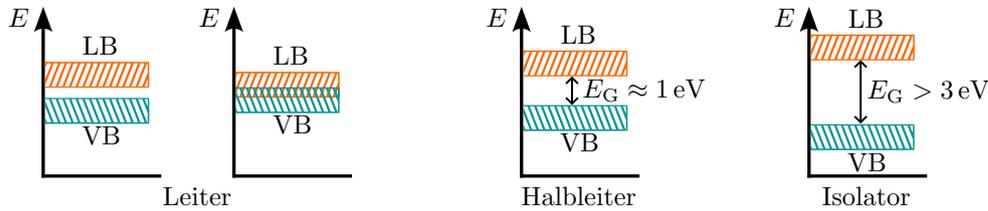


Abbildung 9.5: **Bändermodell verschiedener Halbleitermaterialien.** V.l.n.r.: Leiter ohne und mit Überlappung, Halbleiter und Isolator.

Merke:

- Ladungsträger können nur definierte Energieniveaus im Festkörper besetzen.
- Bei $T = 0 \text{ K}$ ist das Valenzband das höchste besetzte Energieniveau, das darüberliegende Leitungsband beinhaltet keine freien Ladungsträger.
- Materialien können über die Bandlücke, Leiter, Halbleiter und Isolatoren kategorisiert werden.

9.1.2 Halbleitermaterialien

Die Gitterstrukturen von Halbleitermaterialien spielen eine entscheidende Rolle im Bezug auf deren elektronischen und mechanischen Eigenschaften. Im Folgenden werden die Gitterstrukturen von Silizium und Galliumarsenid (GaAs) betrachtet. Silizium ist aufgrund seiner hohen Verfügbarkeit und dem damit verbundenen geringen Preis das am weitesten verbreitete Halbleitermaterial. Darüber hinaus lässt es sich sehr gut verarbeiten und seine elektrischen Eigenschaften lassen sich gut beeinflussen. Galliumarsenid hingegen dient als Beispiel für einen Verbindungshalbleiter aus einem Element der III. und V. Hauptgruppe des Periodensystems, entsprechend wird ein solcher Halbleiter auch als III/V-Verbindungshalbleiter bezeichnet. Die einzelnen Elemente weisen kein Halbleiterverhalten auf, erst bei besonderer Anordnung und besonderem Atomverhältnis bildet sich das Halbleiterverhalten aus.

Silizium hat eine Diamantgitterstruktur, bei der jedes Siliziumatom von vier benachbarten Atomen in einer tetraedrischen Anordnung umgeben ist. Diese Struktur führt zu einer stabilen und robusten Kristallstruktur, die eine hohe mechanische Stabilität aufweist. Darüber hinaus ermöglicht die Anordnung eine hohe Beweglichkeit der freien Elektronen in alle Raumrichtungen.

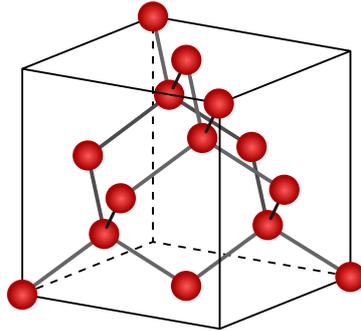


Abbildung 9.6: **Diamantgitterstruktur von Silizium.** Resultierende Gitterstruktur von Silizium.

Im Gegensatz dazu sind bei Galliumarsenid die Gallium- und Arsenatome so angeordnet, dass sie zwei ineinander verschobene kubisch flächenzentrierte Gitter darstellen, die sogenannte Zinkblende-Gitterstruktur. Die resultierende Anordnung ist identisch mit der Diamantgitterstruktur, jedoch mit dem regelmäßigen Wechsel zwischen zwei Ionenarten. Diese Struktur ermöglicht eine geringe Bandlücke, was zu einer geringen Anregungsenergie führt, die notwendig ist, um Elektronen zwischen Valenz- und Leistungsband zu verschieben.

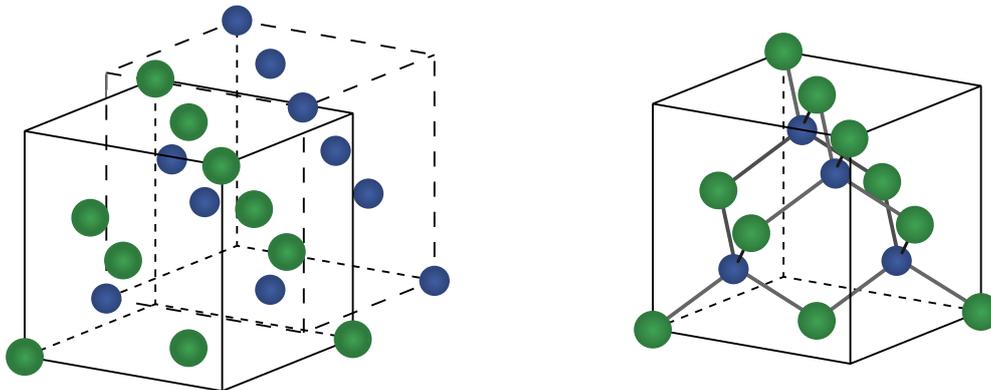


Abbildung 9.7: **Zinkblende-Gitterstruktur von GaAs.** Links: Zwei ineinander verschobene kubisch flächenzentrierte Gitter von verschiedenen Materialien. Rechts: Resultierende Zinkblende-Gitterstruktur.

Merke:

- Silizium ist das am weitesten verbreitete Halbleitermaterial.
- Verbindungshalbleiter bestehen aus zwei Materialien, die in bestimmter Kombination Halbleiterverhalten aufweisen.
- Silizium ist aus der IV. Hauptgruppe des Periodensystem, Verbindungshalbleiter typischerweise aus der III. und V. Hauptgruppe.

Die folgende Tabelle bietet einen Überblick über einige der wichtigsten Halbleitermaterialien und Verbindungshalbleiter sowie ihre wesentlichen Eigenschaften und Anwendungen. Diese Materialien spielen eine entscheidende Rolle in der modernen Elektrotechnik und werden in einer Vielzahl von Anwendungen eingesetzt, von Mikrochips und Solarzellen bis hin zu Hochfrequenzschaltungen und LED-Beleuchtung. Die Tabelle enthält Informationen über die Bandlücke, Ladungsträgerdichte (Ei-

genleitungsichte), Elektronen- und Löcherbeweglichkeit sowie charakteristische Eigenschaften und Anwendungen jedes Materials. Bei der Beweglichkeit handelt es sich um die Geschwindigkeit, mit der sich die Ladungsträger aufgrund eines elektrischen Feldes durch ein Medium bewegen. Bei Löchern handelt es sich um quasipartielle Zustände, die als positive Ladungsträger betrachtet werden. Es handelt sich hierbei nicht um tatsächliche positive Ladungsträger, sondern um lokale Bereiche, die aufgrund eines fehlenden Elektrons als positiv geladen betrachtet werden können.

Material	E_G (eV)	n $\left(\frac{1}{\text{cm}^3}\right)$	μ_e $\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{V}\cdot\text{s}}\right)$	μ_p $\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{V}\cdot\text{s}}\right)$	Eigenschaften	Anwendungen
Silizium (Si)	1,1	$1 \cdot 10^{10}$	1500	450	Häufigste Halbleitermaterial	Mikrochips, Solarzellen, Sensoren
Germanium (Ge)	0,7	$2 \cdot 10^{13}$	3900	1900	Früher häufig in elektronischen Geräten verwendet	Transistoren, Infrarot-Detektoren
Galliumarsenid (GaAs)	1,43	$2 \cdot 10^6$	8500	400	Direkter Bandübergang, Einsatz bei hohen Frequenzen	Hochfrequenzschaltungen, LEDs, Laserdioden
Indiumphosphid (InP)	1,35	$1 \cdot 10^{16}$	5000	200	Direkter Bandübergang, Hohe Lichtabsorption bei Wellenlängen im Bereich von $1,3 - 1,55 \mu\text{m}$	Optoelektronik, Solarzellen
Galliumnitrid (GaN)	3,4	$1 \cdot 10^{-10}$	380	–	Hohe thermische und chemische Stabilität, Hohe elektronische Durchbruchfeldstärke	Leistungselektronik, LED-Beleuchtung, Displays
Siliziumkarbid (SiC)	3,0	$1 \cdot 10^{-7}$	500	–	Extrem hohe thermische Stabilität, Hohe elektronische Durchbruchfeldstärke	Leistungselektronik, Hochtemperaturanwendung

Tabelle 9.1: **Eigenschaften verschiedener Halbleitermaterialien.** Auflistung von physikalischen Größen wie der Bandlücke (E_G), Eigenleitungsichte (n) bei $T = 300$ K, Elektronenbeweglichkeit (μ_e) und Löcherbeweglichkeit (μ_p).

9.1.3 Ladungsträgertransport

Bei einer Temperatur von 0 K (absoluter Nullpunkt) weisen Halbleiter wie Silizium ein vollständig besetztes Valenzband mit dem Energieniveau E_V und ein leeres Leitungsband mit dem Energieniveau E_L auf. Dies bedeutet, dass alle Elektronen im Valenzband gebunden und keine freien Ladungsträger vorhanden sind. Das Bändermodell zeigt eine deutliche Bandlücke zwischen dem Valenz- und dem Leitungsband. Wenn die Temperatur über 0 K erhöht wird, steigt die Beweglichkeit der Elektronen im Kristallgitter. Einige Elektronen im Valenzband können durch thermische Anregung Energie erhalten und in das Leitungsband übergehen, wodurch freie Elektronen und Löcher erzeugt werden. Diese freien Ladungsträger tragen zur Leitfähigkeit des Halbleiters bei.

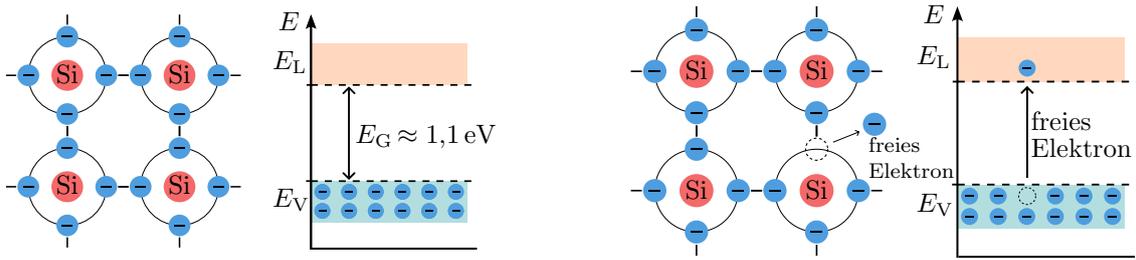


Abbildung 9.8: **Gitterstruktur und Bändermodell von Si.** Vereinfachte 2D-Betrachtung des Si-Gitters. Links: Reines Silizium bei $T = 0\text{ K}$. Rechts: Reines Silizium bei $T > 0\text{ K}$.

Bei der Zugabe von Phosphor zu Silizium führt dies dazu, dass das Phosphoratom fünf Valenzelektronen einbringt (n-dotiert), eins mehr als Silizium. Das in diesem Fall überschüssige Elektron wird locker an das Kristallgitter gebunden und kann leicht von äußeren Energiequellen entfernt werden, wodurch es zu einem Donator von freien Elektronen wird. Diese Elektronen befinden sich im Donatorband (E_D), unmittelbar unterhalb des Leitungsbands. Bei einer Temperatur über 0 K verfügen die Elektronen aufgrund der thermischen Anregung über ausreichend Energie, um die Bandlücke zu überwinden und ins Leitungsband zu gelangen. Die durch den Phosphor bereitgestellten Elektronen erleichtern diesen Prozess. Daher erhöht sich die Leitfähigkeit des Materials.

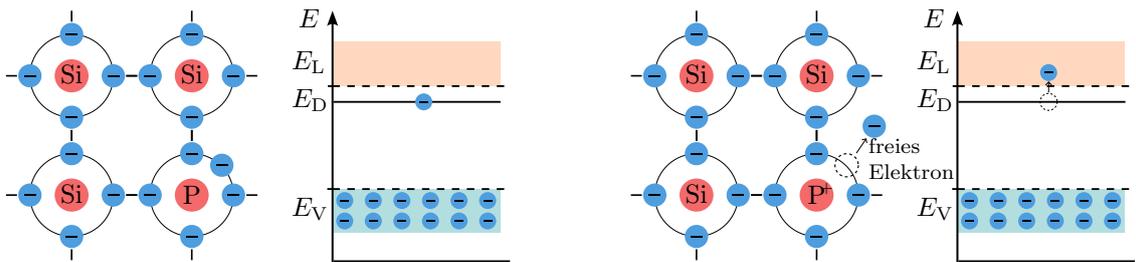


Abbildung 9.9: **Gitterstruktur und Bändermodell von n-dotiertem Si.** Links: N-dotiertes Silizium bei $T = 0\text{ K}$. Rechts: N-dotiertes Silizium bei $T > 0\text{ K}$.

Bei der Zugabe von Bor zu Silizium (p-dotiert) hat das Boratom nur drei Valenzelektronen, eins weniger als Silizium. Dadurch entsteht im Kristallgitter ein Loch im Valenzband, das als Akzeptor von Elektronen wirkt. Bei 0 K sind jedoch keine thermisch erzeugten Löcher vorhanden. Bei einer Temperatur über 0 K führt die thermische Energie dazu, dass Elektronen aus dem Valenzband ins Akzeptorband (E_A) gelangen, wodurch Löcher im Valenzband zurückbleiben. Diese Löcher wirken wie positive Ladungsträger und erhöhen die Leitfähigkeit des Materials.

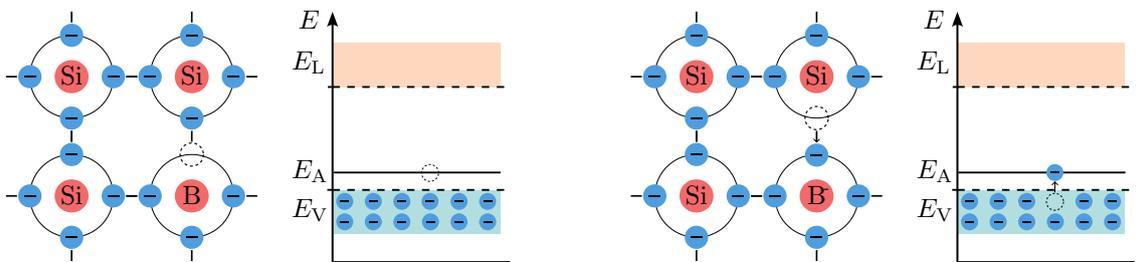


Abbildung 9.10: **Gitterstruktur und Bändermodell von p-dotiertem Si.** Links: P-dotiertes Silizium bei $T = 0\text{ K}$. Rechts: P-dotiertes Silizium bei $T > 0\text{ K}$.

 **Merke:**

- Durch thermische Anregung können freie Elektronen entstehen, die zum Ladungsträgertransport beitragen.
- Dotierung ist das gezielte Einbringen von Fremdatomen mit mehr oder weniger Valenzelektronen als das Ausgangsmaterial.
- Für n-Dotierung kann Phosphor und für p-Dotierung Bor genutzt werden.

Neben den zuvor genannten Vorgängen innerhalb des Kristallgitters, die den Ladungsträgertransport durch zusätzliche Ladungsträger ermöglichen, sind zwei weitere wichtige Größen der Driftstrom und Diffusionsstrom. Driftstrom in einem Halbleiter tritt aufgrund der Bewegung geladener Teilchen unter dem Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes auf. Wenn ein elektrisches Feld an einem Halbleiter angelegt wird, wirkt eine Kraft auf die freien Ladungsträger (Elektronen und Löcher), die sie, je nach Vorzeichen oder Ladung, in Feldrichtung beschleunigt oder verlangsamt. Für Elektronen im Leitungsband bedeutet dies, dass sie unter dem Einfluss des elektrischen Feldes in Richtung der positiven Elektrode (Anode) driften. Für Löcher im Valenzband bedeutet dies eine Drift in Richtung der negativen Elektrode (Kathode). Für eine bessere Vergleichbarkeit wird in der folgenden Abbildung das Loch als positiver Ladungsträger dargestellt. Die Driftgeschwindigkeit der Ladungsträger hängt von der Stärke des angelegten elektrischen Feldes und von der Beweglichkeit der Ladungsträger im Halbleitermaterial ab. Es ist wichtig zu beachten, dass der Driftstrom nur einen Teil des Gesamtstroms in einem Halbleiter ausmacht.

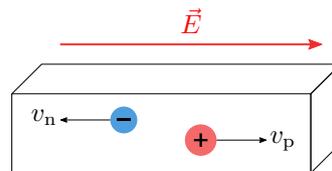


Abbildung 9.11: **Driftstrom innerhalb eines Halbleiters.** Darstellung mit der Geschwindigkeit v der Ladungsträger aufgrund der elektrischen Feldstärke E .

Der andere Teil des Stroms entsteht durch Diffusion, was die Bewegung von Ladungsträgern aufgrund von Konzentrationsunterschieden darstellt. In vielen Halbleiterbauelementen wie Dioden und Transistoren wirken Drift- und Diffusionsströme zusammen, um das Verhalten des Bauelements zu bestimmen. Beim Diffusionsstrom bewegen sich freie Elektronen oder Löcher von Bereichen hoher Konzentration zu Bereichen niedriger Konzentration, ähnlich wie bei der Diffusion von Teilchen in einem Konzentrationsgradienten. Im Falle von Elektronen in einem n-dotierten Halbleiter bewegen sich Elektronen von Regionen mit hoher Elektronenkonzentration zu Regionen mit niedriger Elektronenkonzentration. Umgekehrt bewegen sich bei einem p-dotierten Halbleiter Löcher von Regionen hoher Lochkonzentration zu Regionen niedriger Lochkonzentration.

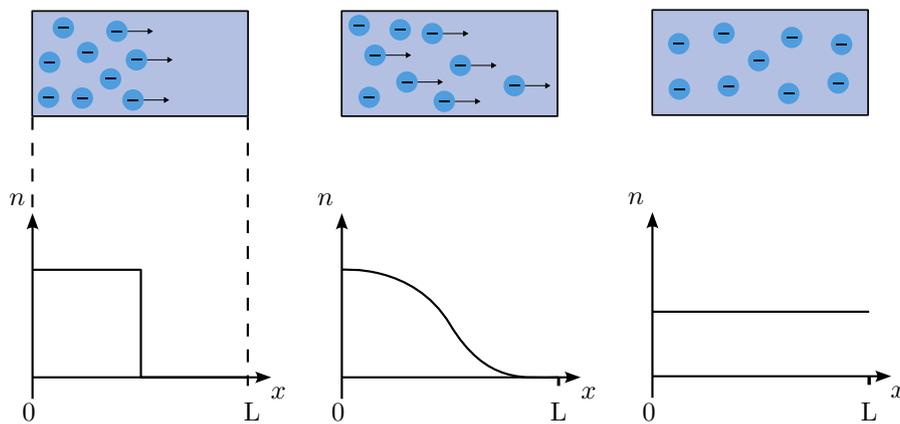


Abbildung 9.12: **Diffusionsstrom innerhalb eines Halbleiters.** Diffusion von Elektronen in einem n-dotierten Halbleiter in Richtung einer geringeren Konzentration. Mit der Länge L des Halbleiters, der Ladungsträgerkonzentration n und der Position x .

Abschließend wird in diesem Abschnitt der Ladungstransport im Bänderdiagramm bei einer angelegten Spannung betrachtet. Bislang wurde das Bänderdiagramm ausschließlich im Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts analysiert. Es wird der allgemeine Fall betrachtet, in dem ein Strom durch den Halbleiter fließt. Als Beispiel dient ein homogener, n-dotierter Halbleiter. Anfänglich liegt

keine Spannung am Halbleiter an, wodurch auch kein elektrischer Strom fließt. Das Bänderdiagramm über den Ort x zeigt daher einen Verlauf ähnlich dem in Abbildung 9.13 links, wobei mögliche Randeffekte an den Kontakten nicht berücksichtigt sind. Die Bänder eines Halbleiters ohne angelegte Spannung sind horizontal ausgerichtet. Sobald jedoch eine Spannung angelegt wird, verschiebt sich das Bänderdiagramm, was dazu führt, dass die Elektronen in Richtung niedrigerer Energie wandern.

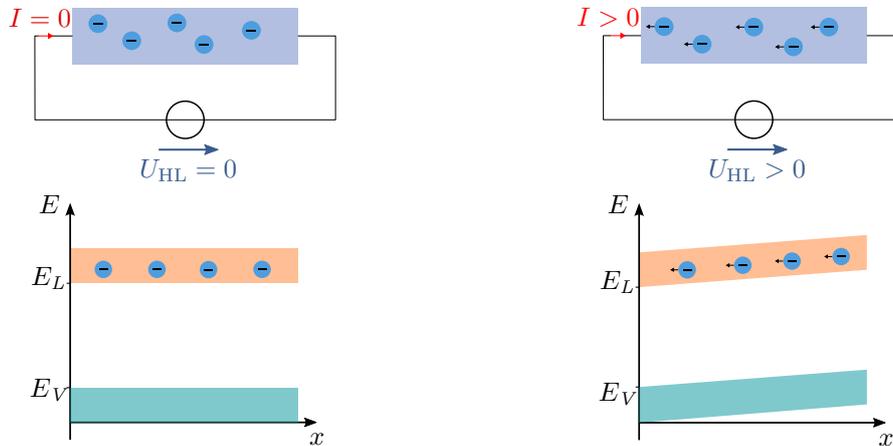


Abbildung 9.13: **Einfluss von Spannungen auf Halbleiter.** Links: Festkörper und Bändermodell ohne angelegte Spannung. Rechts: Verschiebung des Bändermodells aufgrund einer angelegten Spannung.

Merke:

- Driftstrom ist der Ladungsträgertransport aufgrund eines elektrischen Feldes.
- Diffusionsstrom ist die Bewegung von Ladungsträgern aufgrund eines Konzentrationsunterschiedes.
- Drift- und Diffusionsstrom ergeben zusammen den Gesamtstrom.
- Eine externe Spannung führt zu einer Verschiebung des Bändermodells.

9.1.4 pn-Übergang

Der pn-Übergang ist das zentrale Element von Halbleiterbauelementen wie Dioden und Transistoren. Er entsteht durch die Verbindung von zwei unterschiedlich dotierten Halbleiterschichten, einer p-dotierten und einer n-dotierten Schicht. Der Übergang zwischen diesen Schichten wird als pn-Übergang bezeichnet. Im pn-Übergang kommt es zur Diffusion von freien Ladungsträgern: Elektronen aus der n-dotierten Schicht diffundieren zur p-dotierten Schicht und Löcher aus der p-dotierten Schicht diffundieren zur n-dotierten Schicht. Dieser Diffusionsprozess führt dazu, dass sich im Übergangsbereich eine sogenannte Raumladungszone (RLZ) bildet. In Abbildung 9.14 ist dieser Vorgang dargestellt. Die RLZ ist eine schmale Region um den pn-Übergang herum, in der positive Ionen aus der n-Schicht und negative Ionen aus der p-Schicht verbleiben, nachdem die Diffusion abgeschlossen ist. In dieser Zone gibt es keine freien Ladungsträger, da die positiven und negativen Ladungen sich gegenseitig neutralisieren. Dadurch entsteht ein elektrisches Feld (\vec{E}), das sowohl einen Driftstrom erzeugt als auch die Diffusion von weiteren Ladungsträgern unterdrückt. Die Raumladungszone wirkt wie eine Sperrschicht und verhindert den Stromfluss in Sperrrichtung.

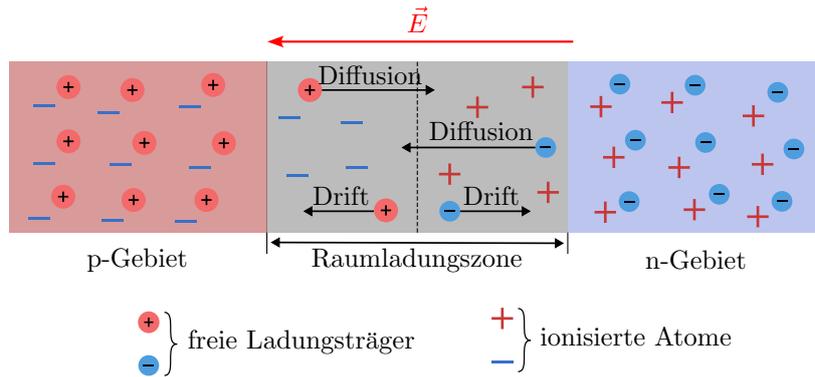


Abbildung 9.14: **Vorgänge innerhalb des pn-Übergangs.** Drift und Diffusion von Ladungsträgern im Halbleiter, zurückbleibende Ionen in der RLZ.

Wenn eine Spannung in Durchlassrichtung angelegt wird (siehe Abbildung 9.15 links), wird die RLZ verkleinert und der Übergang wird leitend. Elektronen aus der n-dotierten Seite wandern zur p-dotierten Seite, während Löcher von der p-dotierten Seite zur n-dotierten Seite diffundieren. Dadurch entsteht ein Stromfluss durch den pn-Übergang. Andersherum vergrößert eine Spannung entgegen der Durchlassrichtung die RLZ (siehe Abbildung 9.15 rechts). Die freien Ladungsträger werden durch die Spannungsquelle ausgeglichen. Der pn-Übergang ist daher ein Schlüsselement in Halbleiterbauelementen, das die Richtung und Stärke des Stromflusses steuert. Seine Eigenschaften werden durch die Dotierungskonzentration, die Größe der Raumladungszone und die angelegte Spannung beeinflusst.

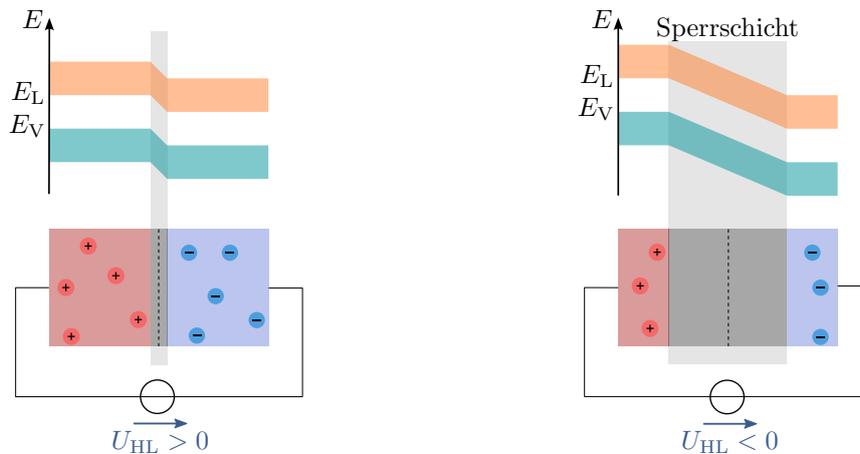


Abbildung 9.15: **Einfluss von Spannungen auf pn-Übergang.** Raumladungszone bei verschiedenen angelegten Spannungen. Links: Spannung in Durchlassrichtung. Rechts: Spannung in Sperrrichtung.

Merke:

- Der pn-Übergang kombiniert eine p- und n-dotierte Halbleiterschicht.
- Im Übergangsbereich, Raumladungszone genannt, sind keine freien Ladungsträger.
- In Durchlassrichtung wird die RLZ verkleinert, in Sperrrichtung wird diese vergrößert.

9.2 Bauelemente

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Arten von Halbleiterbauelementen genauer betrachtet, darunter Dioden, Leuchtdioden (LEDs), Bipolartransistoren und Feldeffekttransistoren. Dabei wird auf das elektrische Verhalten, den Aufbau, die wichtigsten Kenngrößen und deren vielfältige Anwendungen eingegangen.

Lernziele: Halbleiterbauelemente

Die Studierenden können

- Bauteile für verschiedene Anwendungen auswählen.
- den Aufbau verschiedener Halbleiterbauelemente beschreiben.
- Arbeitspunkte bestimmen und fehlende Bauteilwerte berechnen.
- Anwendungen einzelner Bauelemente nennen.

9.2.1 Diode

Die Diode ist das Halbleiterbauelement mit dem einfachsten Aufbau, bestehend aus nur einem pn-Übergang. Dadurch ergeben sich zwei Anschlüsse: Die sogenannte Anode am p-dotierten Bereich und die Kathode am n-dotierten Bereich. Wie bereits im Abschnitt 1.4 beschrieben, ermöglicht der pn-Übergang den Stromfluss in nur einer Richtung, weshalb Dioden oft zur Gleichrichtung und Spannungsstabilisierung eingesetzt werden.

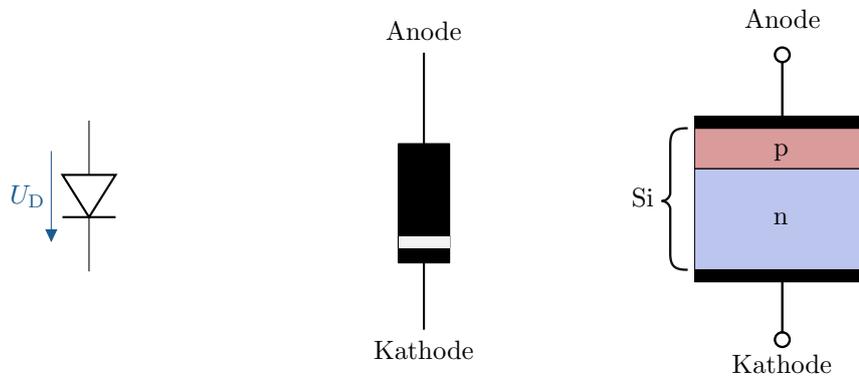


Abbildung 9.16: **Silizium Diode.** V.l.n.r.: Schaltzeichen, Bauform und Querschnitt einer Silizium Diode.

9.2.1.1 Elektrisches Verhalten

Das elektrische Verhalten von Dioden wird wesentlich durch ihre Kennlinie beschrieben, die stark nichtlinear ist. Diese Kennlinie stellt den durch die Diode fließenden Strom in Abhängigkeit von der extern angelegten Spannung dar. Charakteristische Bereiche der Kennlinie sind der Durchlass-, Sperr- und Durchbruchbereich.

- **Durchlassbereich:** Vom Betrieb im Durchlassbereich wird gesprochen, wenn eine positive Spannung in Richtung der Diode angelegt wird, also wenn das elektrische Potenzial an der Anode größer ist als das an der Kathode (Bereich rechts von der y-Achse, siehe Abbildung 9.17). Bei

einer Spannung oberhalb der Schleusenspannung (U_S) steigt der Diodenstrom näherungsweise exponentiell an. Die Schleusenspannung ist eine materialspezifische Spannung, die mindestens benötigt wird, um die Raumladungszone so stark zu verringern, dass ein Stromfluss ermöglicht wird. Bei Siliziumdioden liegt diese typischerweise bei 0,6 bis 0,7 V.

- **Sperrbereich:** Liegt vor, wenn die angelegte Spannung negativ ist (Bereich links von der y-Achse). In diesem Bereich fließt kaum Strom, da der Widerstand der Diode sehr groß ist.
- **Durchbruchbereich:** Bei einer Spannung unterhalb der Durchbruchspannung (U_{BR}) kommt es zu einem Durchbruch und es fließt schlagartig ein sehr hoher Strom. Ist die Diode nicht speziell für den Durchbruch ausgelegt, führt der hohe Strom zur Überlastung und folglich zur Zerstörung des Bauelements.

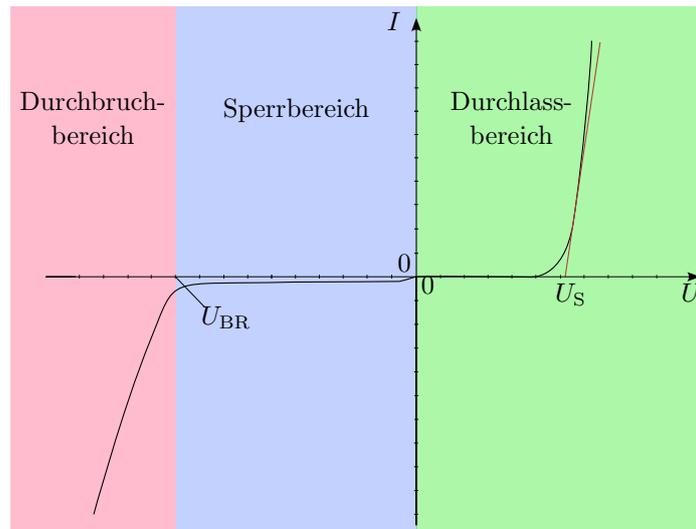


Abbildung 9.17: **Diodenkennlinie.** Relevante Bereiche v.l.n.r.: Durchbruchbereich, Sperrbereich und Durchlassbereich.

Das Ersatzschaltbild einer Siliziumdiode hilft, das Verhalten der Diode in verschiedenen Betriebszuständen besser zu verstehen. Es vereinfacht die reale Diode, indem es ihre wesentlichen Eigenschaften modelliert.

Komponenten des Ersatzschaltbilds:

- **Ideale Diode (D):** Leitet in Vorwärtsrichtung ohne Spannungsverlust und sperrt in Rückwärtsrichtung vollständig.
- **Schleusenspannung/Schwellenspannung (U_S/ U_{T0}):** Diese Spannung ist der Wert, bei dem ein messbarer Stromfluss durch die reale Diode vorliegt. Im Ersatzschaltbild wird diese durch eine ideale Spannungsquelle dargestellt.
- **Differenzieller Widerstand (r_D):** Der differentielle Widerstand (r_D) beschreibt den Widerstand der Diode im Durchlassbereich. Er ist definiert als die Änderung der Spannung (Δu_D) geteilt durch die Änderung des Stroms (Δi_D) und modelliert die Nichtlinearität der Diode nach dem Erreichen der Schleusenspannung.

$$r_D = \frac{\Delta u_D}{\Delta i_D} \quad (9.1)$$

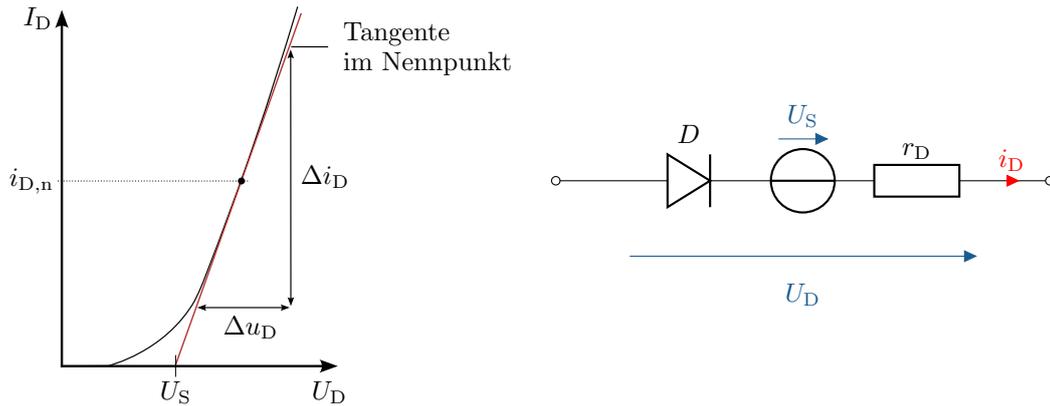


Abbildung 9.18: **Diodenkennlinie und Ersatzschaltbild.** Links: Diodenkennlinie mit Näherung für den differentiellen Widerstand. Rechts: Diodenersatzschaltbild mit der idealen Diode, Spannungsquelle und differentiellen Widerstand.

Die Bestimmung des Arbeitspunktes einer Diode ist ein wichtiger Schritt in der Schaltungsentwicklung, da er den stabilen Betriebszustand der Diode unter Berücksichtigung der angelegten Spannung und des Durchlassstroms definiert. Dabei ist es wichtig, die maximale Verlustleistung der Diode zu beachten, um sicherzustellen, dass sie nicht überhitzt und beschädigt wird. Sowohl grafische als auch mathematische Methoden können zur Bestimmung des Arbeitspunktes verwendet werden. Die grafische Methode basiert auf der Darstellung der Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode und der Lastlinie der Schaltung. Der Arbeitspunkt ist der Schnittpunkt dieser beiden Linien. Es kann sowohl der Arbeitspunkt durch den vorgegebenen Widerstand ermittelt werden, als auch der Widerstand auf Basis des gewünschten Arbeitspunktes bestimmt werden. In beiden Fällen sollte der Arbeitspunkt unterhalb der Asymptote für die maximale Verlustleistung der Diode liegen.

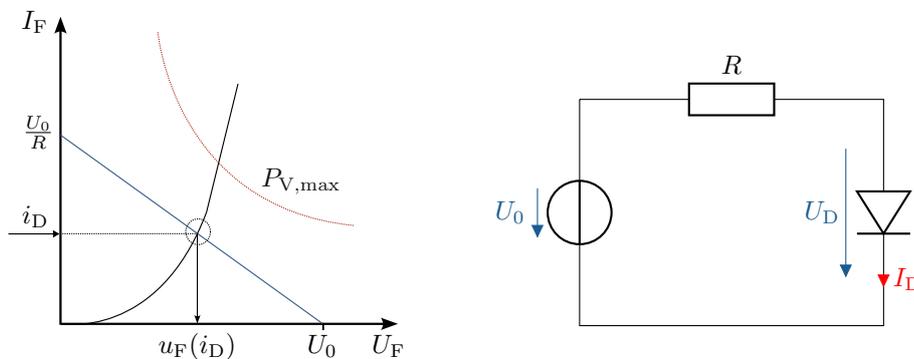


Abbildung 9.19: **Grafische Bestimmung des Arbeitspunktes.** Links: Diodenkennlinie (schwarz), Widerstandsgerade (blau) und Asymptote der maximalen Verlustleistung (rot) der Diode. Rechts: Schaltung der Diode mit Vorwiderstand.

Die mathematische Methode basiert auf der Lösung von Gleichungen, die den Durchlassstrom der Diode und den Spannungsabfall über der Last beschreiben. Der Arbeitspunkt wird durch das Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke bestimmt. Dabei ist es wichtig, die maximale Verlustleistung der Diode zu berücksichtigen, um sicherzustellen, dass sie innerhalb ihrer Spezifikationen betrieben wird.

Merke:

- Die Kennlinie der Diode ist stark nichtlinear.
- Das Verhalten der Kennlinie kann in drei Bereichen beschrieben werden: Den Durchbruch-, Sperr- und Durchlassbereich.
- Mittels idealer Diode, Spannungsquelle und Widerstand kann die reale Diode in verschiedenen Bereichen angenähert werden.

9.2.1.2 Aufbau

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, besteht die Diode in der Regel aus einem einzelnen pn-Übergang. Neben der bisher betrachteten einfachen Siliziumdiode gibt es noch zahlreiche weitere Dioden. In diesem Abschnitt wird der bisher betrachtete Aufbau mit dem einer Schottky-Diode verglichen. Diese ist sehr verbreitet und kommt ohne pn-Übergang aus.

Die pn-Diode besteht aus zwei Halbleiterregionen, nämlich der p-dotierten (positiv geladenen) und der n-dotierten (negativ geladenen) Region, die sich an einer gemeinsamen Grenzfläche treffen. Die p-Seite wird als Anode und die n-Seite als Kathode bezeichnet. Typischerweise besteht der pn-Übergang aus Silizium oder Germanium. Die Elektronen aus der n-Seite rekombinieren mit den Löchern aus der p-Seite an der Grenzfläche, was zur Bildung einer Raumladungszone führt. Diese Raumladungszone bildet die Barriere für den Stromfluss in Sperrrichtung. Eine Schottky-Diode besteht aus einem Metall-Halbleiter-Übergang anstelle eines pn-Übergangs. Bei der Herstellung müssen keine verschiedenen Dotierungen eingebracht werden. Ein Aufbringen einer geeigneten Metallschicht reicht bereits aus. Das Halbleitermaterial ist typischerweise n-dotiert. Der Übergang zwischen dem Metall und dem Halbleiter bildet eine Schottky-Barriere, die den Stromfluss blockiert. Durch eine geeignete Materialkombination kann sich an der Grenzfläche eine Raumladungszone ausbilden, ähnlich wie bei der Siliziumdiode. Diese Dioden sind für schnelle Schaltvorgänge und einem niedrigen Spannungsabfall in Durchlassrichtung optimiert.

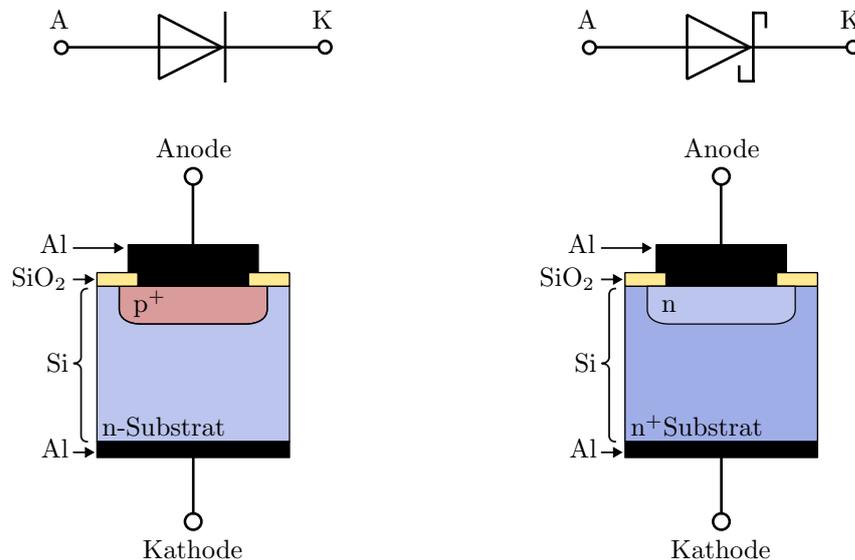


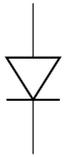
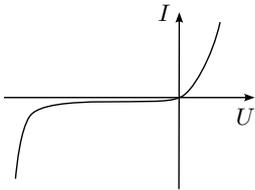
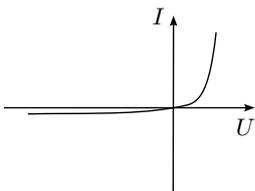
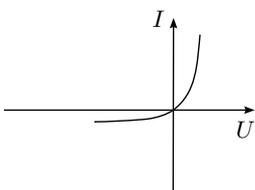
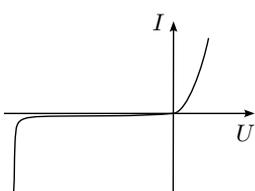
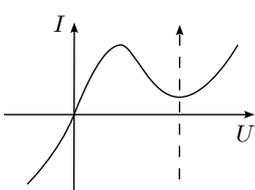
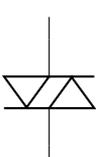
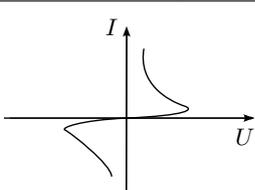
Abbildung 9.20: **Schichtaufbau von Dioden.** Aufbau und Vergleich einer klassischen Si-Diode (links) und Schottky-Diode (rechts). Siliziumdioxid (SiO₂) ist ein natürliches Oxid von Silizium und dient zur Isolierung. Aluminium (Al) ist ein typisches Metall für elektrische Kontakte.

Merke:

- Schottky-Dioden weisen keinen pn-Übergang auf, sondern einen Schottky-Kontakt.
- Bei geeigneter Materialkombination bildet sich zwischen Metall und Halbleiter eine RLZ aus.

9.2.1.3 Spezielle Dioden

Neben den bisher genannten Dioden gibt es noch eine Vielzahl weiterer Varianten, die durch ihren Aufbau verschiedene Eigenschaften aufweisen und entsprechende Anwendungen ermöglichen. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über typische Dioden.

Bezeichnung	Symbol	Kennlinie	Eigenschaften	Anwendung
Gleichrichterdiode			hoher Durchlassstrom, große Sperrspannung	Gleichrichtung
Schaltdiode			kleiner Durchlasswiderstand, hoher Sperrwiderstand	kleine Umschaltzeiten
Schottkydiode			kleine Durchlassspannung, kleine Sperrspannung	HF-Gleichrichter, Freilaufdiode, Schaltnetzteile
Z-Diode			definierte Durchbruchspannung	Stabilisierung von Spannungen, Begrenzung
Tunneldiode			negativer differentieller Widerstand	Entdämpfung von Schwingkreisen, HF-Oszillator
Diac			gesteuerter Durchbruch	Entdämpfung, Triggerdiode

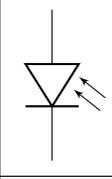
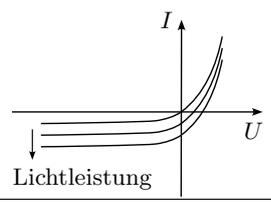
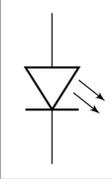
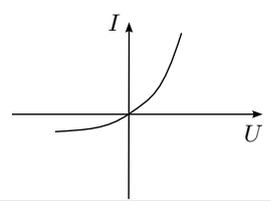
Bezeichnung	Symbol	Kennlinie	Eigenschaften	Anwendung
Photodiode			Strom ändert sich proportional zur Lichtleistung	Photoempfänger, Messtechnik, Solarzellen
LED, Laserdiode			Durchlassstrom erzeugt optische Strahlung	Beleuchtung, Strahlungsquelle

Tabelle 9.2: Übersicht typischer Dioden.

9.2.1.4 Anwendungen/Grundsaltungen

In diesem Abschnitt werden typische Anwendungen und Grundsaltungen von Dioden vorgestellt. Zu den behandelten Themen gehören Einweggleichrichter, Brückengleichrichter sowie Reihen- und Parallelschaltungen von Dioden. Einweggleichrichter und Brückengleichrichter sind wesentliche Schaltungen zur Umwandlung von Wechselstrom in Gleichstrom.

Einweggleichrichter

Ein Einweggleichrichter ist eine einfache Schaltung zur Umwandlung von Wechselstrom in Gleichstrom. Diese Schaltung besteht typischerweise aus einer einzigen Diode, die in Serie mit der Last angeschlossen ist. Die Hauptfunktion des Einweggleichrichters besteht darin, nur die positiven Halbwellen des Wechselstroms durchzulassen, während die negativen Halbwellen blockiert werden. Während der positiven Halbwelle des Wechselstroms ist das Potenzial an der Anode höher als das an der Kathode, wodurch die Diode in Durchlassrichtung leitet. Dies ermöglicht den Stromfluss durch die Diode und die angeschlossene Last, wodurch eine positive Spannung an der Last anliegt. Während der negativen Halbwelle des Wechselstroms ist das Potenzial an der Anode niedriger als das an der Kathode, sodass die Diode in Sperrrichtung arbeitet und den Stromfluss blockiert. Infolgedessen fällt keine Spannung an der Last ab. In der folgenden Abbildung ist beispielhaft die Eingangsspannung und die resultierende Spannung an der Last dargestellt. Die Differenz der beiden Spannungen (Δu) entspricht dem Spannungsabfall über der Diode. Der Spannungsabfall wird in dem Beispiel mit der Schleusenspannung einer Siliziumdiode angenähert.

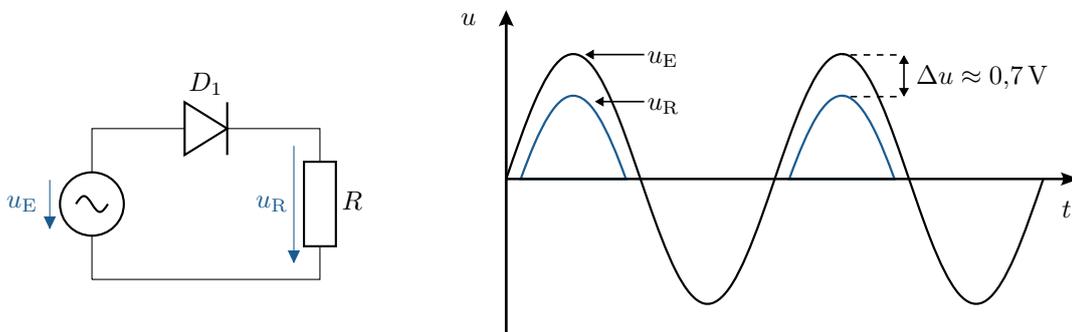


Abbildung 9.21: **Einweggleichrichter**. Links: Schaltkreis des Einweggleichrichters. Rechts: Spannungsverlauf der Eingangsspannung und Lastspannung des Einweggleichrichters.

Der Einweggleichrichter hat den Vorteil einer einfachen Schaltung und niedriger Kosten, was ihn für grundlegende Anwendungen geeignet macht, bei denen eine einfache Gleichrichtung ausreicht. Allerdings weist diese Schaltung auch erhebliche Nachteile auf. Da nur die positiven Halbwellen des Wechselstroms genutzt werden, ist die Effizienz gering und die Ausgangsspannung hat eine starke Welligkeit, die als Brummspannung bezeichnet wird. Diese Welligkeit kann durch zusätzliche Filter- und Glättungsschaltungen reduziert werden. Um eine stabilere Gleichspannung zu erzeugen kann bereits ein Kondensator ausreichen.

Brückengleichrichter

Ein Brückengleichrichter ist eine weit verbreitete Schaltung zur Umwandlung von Wechselstrom in Gleichstrom. Diese Schaltung besteht aus vier Dioden, die in einer Brückenkonfiguration angeordnet sind. Der Brückengleichrichter nutzt beide Halbwellen des Wechselstroms, was zu einer effizienteren Gleichrichtung führt als bei Einweggleichrichtern.

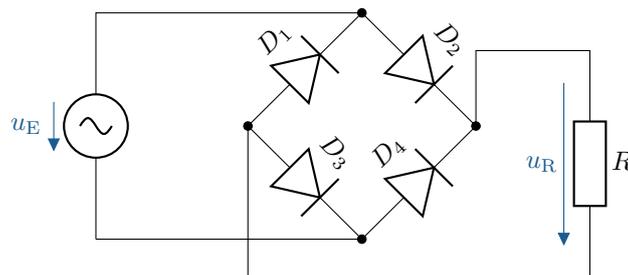


Abbildung 9.22: **Brückengleichrichter Schaltung.** Schaltkreis eines Brückengleichrichters mit angelegter Last R .

Während jeder Halbwelle des Wechselstroms leiten zwei der vier Dioden und bilden einen Pfad für den Stromfluss durch die Last. In der positiven Halbwelle leiten zwei Dioden den Strom in einer Richtung (Abbildung 9.23 links) und in der negativen Halbwelle leiten die anderen beiden Dioden den Strom in derselben Richtung durch die Last (Abbildung 9.23 rechts).

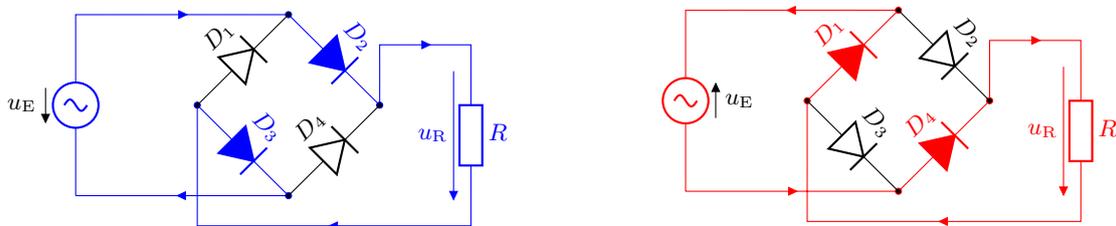


Abbildung 9.23: **Strompfade im Brückengleichrichter.** Links: Strompfad bei der positiven Halbwelle der Eingangsspannung. Rechts: Strompfad bei der negativen Halbwelle der Eingangsspannung.

Im Folgenden sind die resultierenden Spannungen, als Folge der beiden zuvor gezeigten Strompfade, dargestellt. Dieses Verhalten des Brückengleichrichters führt dazu, dass die Spannung über der Last immer die gleiche Polarität hat, was eine gleichgerichtete Ausgangsspannung erzeugt.

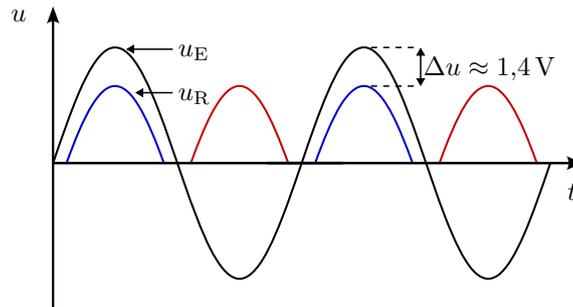


Abbildung 9.24: **Brückengleichrichter Signalverläufe.** Verlauf der Eingangsspannung und Lastspannung des Brückengleichrichters.

Die Ausgangsspannung hat deutlich kürzere Unterbrechungen im Vergleich zu einem Einweggleichrichter, was eine stabilere und glattere Gleichspannung zur Folge hat. Allerdings benötigt der Brückengleichrichter mehr Dioden als ein Einweggleichrichter, was zu höheren Kosten und einem größeren Spannungsabfall führt.

Merke:

- Dioden werden in Gleichrichtern eingesetzt, um Wechselspannungen in Gleichspannungen umzuformen.
- In Einweggleichrichtern wird nur eine Polarität der Halbwellen durchgelassen.
- Brückengleichrichter nutzen beide Polaritäten der Eingangsspannung.

Reihen- und Parallelschaltung

Die Reihen- und Parallelschaltung von Dioden sind grundlegende Methoden zur Anpassung der elektrischen Eigenschaften von Schaltungen. Diese Konfigurationen werden häufig verwendet, um die Spannungs- und Stromanforderungen von Dioden in verschiedenen Anwendungen zu erfüllen.

- **Reihenschaltung:** In einer Reihenschaltung werden mehrere Dioden hintereinander geschaltet. Die maximal zulässige Gesamtspannung ergibt sich aus der Summe der Sperrspannungen der einzelnen Dioden. Dies ermöglicht es, höhere Spannungen zu blockieren als mit einer einzelnen Diode. Diese Konfiguration wird oft in Hochspannungsanwendungen eingesetzt.
- **Parallelschaltung:** In einer Parallelschaltung werden mehrere Dioden parallel geschaltet, wobei die Anoden und Kathoden jeweils miteinander verbunden sind. Diese Konfiguration erhöht die maximale Strombelastbarkeit, da der Strom durch die Dioden aufgeteilt wird. Diese Methode wird oft verwendet, um den Strom zu verteilen und die Belastung einzelner Dioden zu reduzieren.

Durch die Kombination von Dioden in Reihen- oder Parallelschaltungen können die elektrischen Eigenschaften der Gesamtschaltung gezielt angepasst werden, um spezifische Anforderungen zu erfüllen.

9.2.2 Bipolartransistor

Der Bipolartransistor (engl.: BJT, bipolar junction transistor) ist ein wesentlicher Bestandteil vieler elektronischer Schaltungen. Er besteht aus drei Schichten von Halbleitermaterialien mit wechselnder Dotierung: dem Emittor (E), der Basis (B) und dem Kollektor (C). Die Funktionsweise eines Bipolartransistors basiert auf der Steuerung des Stromflusses zwischen Kollektor und Emittor durch den Basisstrom. Abhängig von der Reihenfolge der Dotierung wird zwischen npn- und pnp-Transistoren unterschieden. Die folgende Abbildung zeigt sowohl vereinfacht den Querschnitt, die Repräsentation mittels Dioden gemäß den pn-Übergängen und das jeweilige Schaltzeichen.

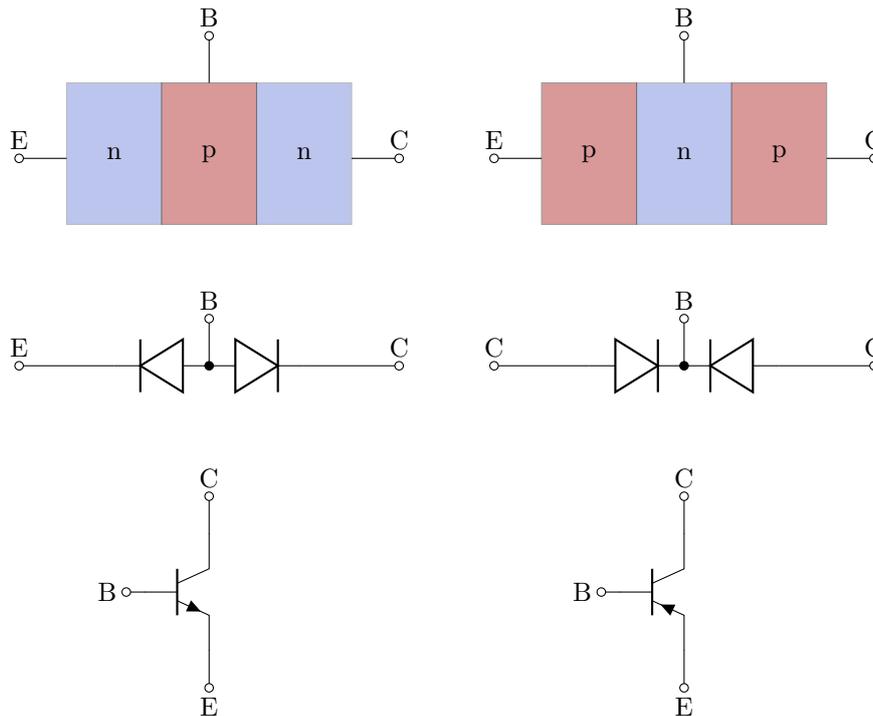


Abbildung 9.25: **Übersicht Bipolartransistoren.** Vereinfachte Darstellung des Querschnittes, Logik und Schaltzeichen von npn- und pnp-Transistoren.

9.2.2.1 Elektrisches Verhalten

Im Folgenden wird das elektrische Verhalten des häufiger verwendeten npn-Transistors anhand der unterschiedlich dotierten Halbleiterschichten und des zugehörigen Bändermodells betrachtet. Das Verhalten lässt sich entsprechend auch auf den pnp-Transistor übertragen. Gemäß dem Aufbau bilden sich zwischen den drei Schichten zwei pn-Übergänge. Das sperrende Verhalten der beiden Dioden im unbeschalteten Zustand ist sowohl an der ausgebildeten Raumladungszone (RLZ) als auch der hohen Energiedifferenz der Bänder in den verschiedenen Bereichen zu sehen. Die unterschiedlichen Höhen des zusammengesetzten Bändermodells lassen sich aus den Fermi-niveaus der einzelnen Bereiche erklären. Im p-Bereich ist das Fermi-niveau niedriger als im n-Bereich. Da das Fermi-niveau über die einzelnen Bereiche hinweg jedoch konstant ist, ergeben sich die gezeigten Stufen im Bändermodell.

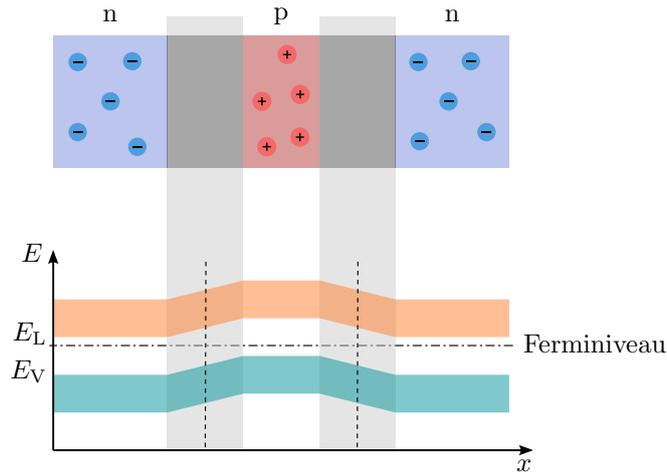


Abbildung 9.26: **Verhalten unbeschalteter Bipolartransistor.** Querschnitt eines unbeschalteten npn-Transistors und zugehöriges Bändermodell.

Wird eine positive Spannung zwischen Kollektor und Emitter angelegt befindet sich der pn-Übergang zwischen Basis und Emitter in Durchlassrichtung, der Übergang zwischen Basis und Kollektor ist jedoch in Sperrrichtung, weshalb kein Stromfluss möglich ist. Die durch die Spannungsquelle bereitgestellten Ladungsträger reduzieren die RLZ zwischen Basis und Emitter. Umgekehrt erhöhen die abfließenden Elektronen von der Kollektorseite die zugehörige RLZ. Zusätzlich ist in der folgenden Abbildung die starke Verschiebung der Bänder aufgrund der angelegten Spannung zu sehen.

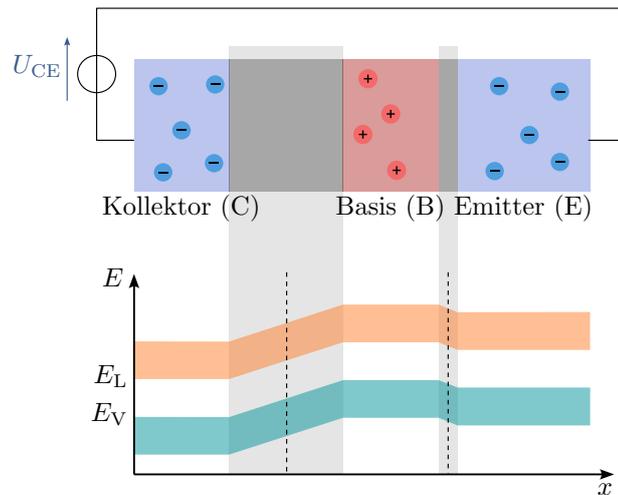


Abbildung 9.27: **Bipolartransistor mit Kollektor-Emitter-Spannung.** Querschnitt eines npn-Transistors und zugehöriges Bändermodell bei einer positiven Spannung zwischen Kollektor und Emitter.

Durch das Anlegen einer zusätzlichen positiven Spannung zwischen Basis und Emitter wird die RLZ in Richtung Emitter vollständig abgebaut. Die angelegte Spannung entspricht der Schleienspannung des pn-Übergangs. Infolge dessen können Elektronen vom Emitter in die Basis gelangen. Diese Elektronen befinden sich unmittelbar vor der RLZ des Kollektor-Basis-Übergangs, welcher in Durchlassrichtung liegt. Folglich werden die Elektronen durch das ausgebildete elektrische Feld beschleunigt und können den Halbleiter vollständig durchqueren. Das durch die Elektronen einfach zu durchschreitende Potenzialgefälle zwischen Basis und Kollektor ist zusätzlich auch im Bändermodell zu sehen.

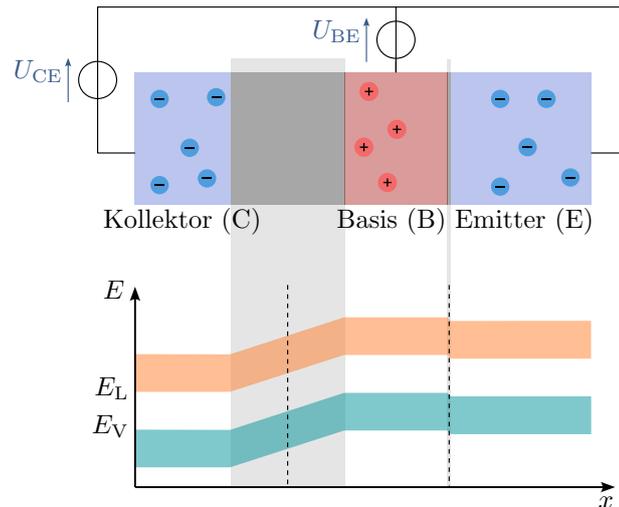


Abbildung 9.28: **Beschalteter Bipolartransistor.** Querschnitt eines npn-Transistors und zugehöriges Bändermodell bei einer positiven Spannung zwischen Kollektor und Emitter sowie Basis und Emitter.

Merke:

- Bipolartransistoren weisen zwei pn-Übergänge auf.
- Es gibt drei Anschlüsse: den Kollektor (C), die Basis (B) und den Emitter (E).

In der folgenden Abbildung sind die relevanten Ströme und Spannungen bei npn- und pnp-Transistoren eingezeichnet. Die Spannungen werden üblicherweise auf das Emitterpotenzial bezogen und die Ströme in Richtung der Transistoren eingezeichnet. Beim npn-Transistor ergibt sich somit für den Emitterstrom, welcher die Summe der beiden Teilströme darstellt, ein negativer Wert.



Abbildung 9.29: **Ströme und Spannungen beim Bipolartransistor.** Relevante Ströme und Spannungen bei npn und pnp Transistor.

Um das elektrische Verhalten zu beschreiben, wird der Kollektor- und Emitterstrom sowie die beiden zuvor genannten Spannungen betrachtet. Daraus ergeben sich vier Kopplungen: die Ströme als Folge der zugehörigen Spannungen sowie jeweils zwischen den beiden Strömen und den beiden Spannungen. Zunächst wird die Eingangskennlinie, der Basisstrom I_B als Folge der Basis-Emitter-Spannung U_{BE} , betrachtet. Wie der folgenden Abbildung zu entnehmen ist, entspricht der Verlauf dem einer Diodenkennlinie. Die dargestellte Kennlinie ist repräsentativ für eine definierte Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} , bei einer Variation dieser Spannung wird der Verlauf gestreckt bzw. gestaucht. Es wird dann

auch vom Eingangskennlinienfeld gesprochen. Wie bereits von der Diodenkennlinie bekannt, kann der differentielle Widerstand r_{BE} über die Steigung im Arbeitspunkt bestimmt werden.

$$r_{BE} = \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B} \quad (9.2)$$

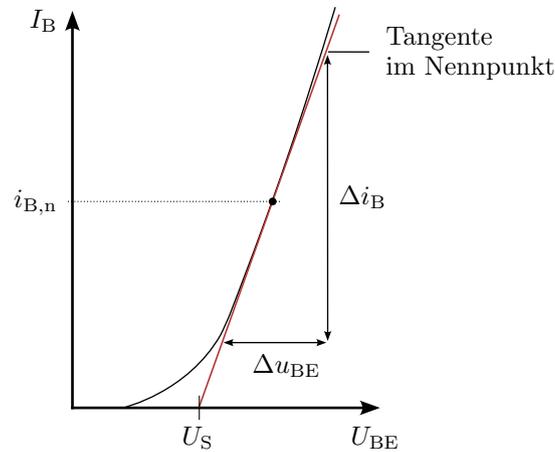


Abbildung 9.30: Eingangskennlinie eines npn Transistors. Kennzeichnung von relevanten Größen.

Merke:

- Die Eingangskennlinie $I_B = f(U_{BE})$ gleicht der einer Diode.
- Eine Änderung von U_{CE} führt zu einer Verschiebung der Kennlinie.

Bei der Ausgangskennlinie wird der Kollektorstrom I_C als Folge der Kollektor-Emitter-Spannung U_{CE} betrachtet. Im aktiven Bereich ist der Einfluss von U_{CE} auf I_C kaum vorhanden und es kann von einem linearen Zusammenhang ausgegangen werden. Bei realen Bauteilen ist der Verlauf flacher als in der gezeigten Darstellung. Abhängig vom Basisstrom ergibt sich das gezeigte Ausgangskennlinienfeld (siehe Abbildung 9.31). Mittels der Steigung der Kennlinie kann der differentielle Widerstand r_{CE} bestimmt werden.

$$r_{CE} = \frac{\Delta u_{CE}}{\Delta i_C} \quad (9.3)$$

Unterhalb des aktiven Bereichs, bei geringen Werten von U_{CE} , sind beide Dioden in Durchlassrichtung geschaltet und der Transistor geht in Sättigung mit einem sinkenden Kollektorstrom. Werden die Kennlinien bis in den negativen Bereich links von der y-Achse verlängert, schneiden sich diese an einem Punkt auf der x-Achse. Die zugrunde liegende Abhängigkeit wird als Early-Effekt bezeichnet und die Spannung entsprechend Early-Spannung (U_{Early}).

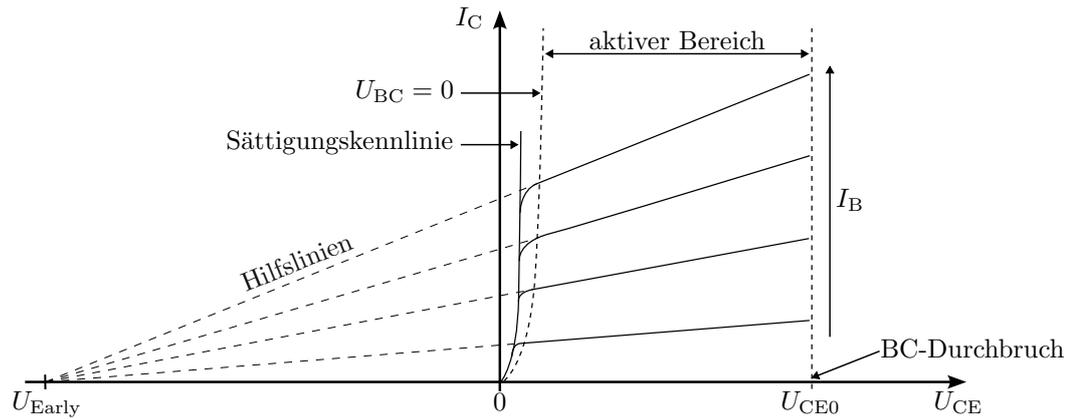


Abbildung 9.31: **Ausgangskennlinienfeld eines npn Transistors.** Kennzeichnung von relevanten Bereichen und Größen sowie grafische Ermittlung der Early-Spannung.

Merke:

- Die Ausgangskennlinie stellt $I_C = f(U_{CE})$ dar.
- Im aktiven Bereich flacht der Verlauf ab, der Einfluss von U_{CE} auf I_C sinkt.
- I_B beeinflusst die Höhe der Kennlinie.

Ein weiterer Zusammenhang betrachtet die Auswirkung des Steuerstrom I_B auf I_C . Die Darstellung wird folglich als Stromsteuerungskennlinienfeld bezeichnet. Es ergibt sich die Kenngröße der Gleichstromverstärkung B sowie der differentielle Stromverstärkungsfaktor β im Arbeitspunkt.

$$B = \frac{I_C}{I_B} \quad (9.4)$$

$$\beta = \frac{\Delta i_C}{\Delta i_B} \quad (9.5)$$

Im letzten Fall, dem Rückwirkungskennlinienfeld, wird der Zusammenhang zwischen U_{BE} und U_{CE} betrachtet. Die Kopplungen sind abhängig vom eingestellten Basisstrom. Analog zur Beschreibung beim Strom kann bei den Spannungen die differentielle Gleichspannungsverstärkung D im Arbeitspunkt betrachtet werden.

$$D = \frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}} \quad (9.6)$$

Beim Zusammenführen der vier Kennlinienfelder ergibt sich das folgende Vierquadranten-Kennlinienfeld (siehe Abbildung 9.32). Die Darstellung aller Kopplungen ermöglicht es beispielsweise, eine grafische Überführung eines gewünschten Arbeitspunktes am Ausgang auf den Eingang zu überführen und die dafür notwendigen Parameter zu ermitteln.

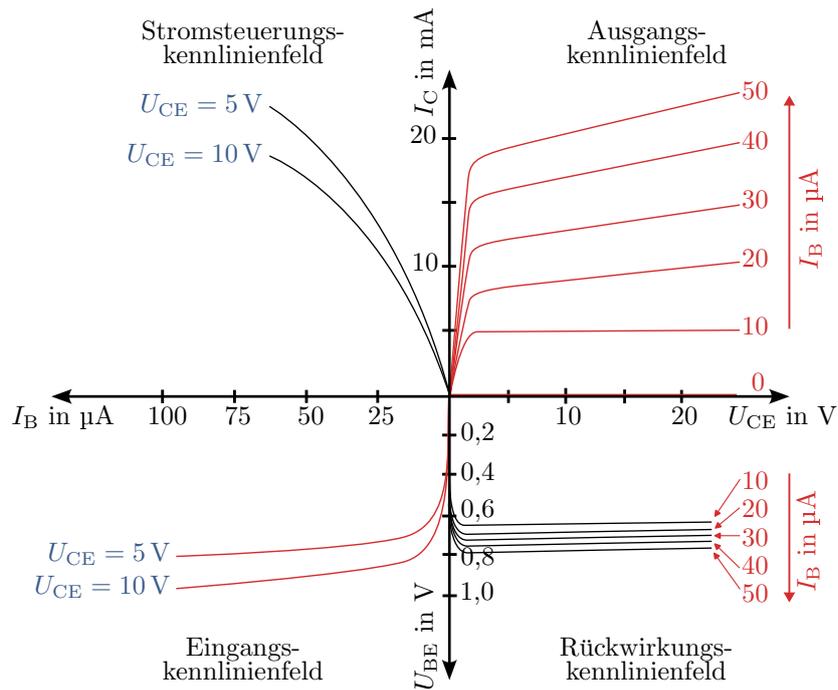


Abbildung 9.32: **Vierquadrantenkennlinienfeld eines npn Transistors.** Darstellung aller relevanten Bereiche und Größen.

Die differentiellen Größen zur mathematischen Beschreibung im Arbeitspunkt werden auch Kleinsignalparameter genannt. Mittels der Kleinsignalparameter können die folgenden Gleichungen aufgestellt und in einem Ersatzschaltbild dargestellt werden. Dieses kann für den Kleinsignalbetrieb bis ca. 1 MHz genutzt werden.

$$u_{BE} = r_{BE} \cdot i_B + D \cdot u_{CE} \tag{9.7}$$

$$i_C = \beta \cdot i_B + \frac{u_{CE}}{r_{CE}} \tag{9.8}$$

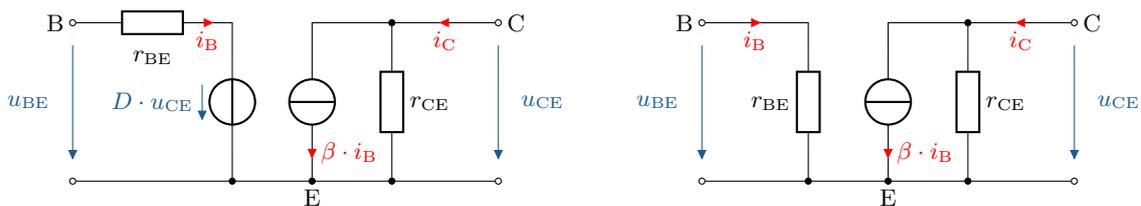


Abbildung 9.33: **Ersatzschaltbild eines Bipolartransistors.** Links: vollständiges Kleinsignalerersatzschaltbild mit allen relevanten Komponenten und Größen. Rechts: Vereinfachung durch Vernachlässigung der differentiellen Stromverstärkung.

Da D typischerweise sehr klein ist, kann die Spannungsquelle in der Regel vernachlässigt werden.

Merke:

- Das Vierquadrantenkennlinienfeld zeigt die Strom-Spannungs-Kennlinien am Ein- und Ausgang sowie die Kopplungen dazwischen.
- Mittels der differentiellen Größen kann das Ersatzschaltbild aufgestellt werden.

9.2.2.2 Arbeitspunkt und Kleinsignalverhalten

Zur Bestimmung des Arbeitspunktes und der dafür notwendigen Parameter können die zuvor gezeigten Kennlinienfelder genutzt werden. Dazu betrachten wir im folgenden Beispiel die in Abbildung 9.34 dargestellte Schaltung.

Beispiel 9.1

Die Versorgungsspannung U_V beträgt 20 V. Über den Widerstand R_C , der einen ohmschen Verbraucher repräsentiert, soll die halbe Versorgungsspannung anliegen und ein Strom von 10 mA fließen.

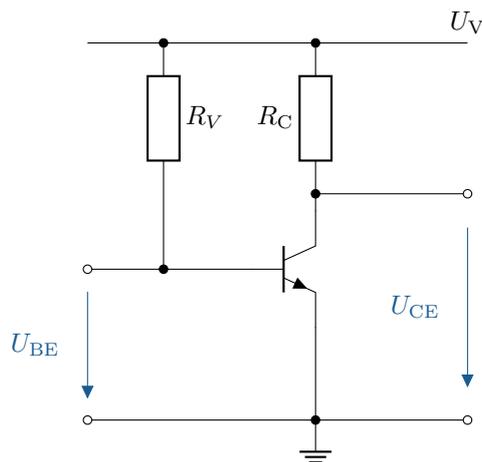


Abbildung 9.34: **Beispiel einer Transistorschaltung zur Bestimmung von relevanten Parametern.** Mit dieser Schaltung lassen sich die relevanten Parameter bestimmen.

Im ersten Schritt kann die Widerstandsgerade, ausgehend von der Betriebsspannung, in das Ausgangs- kennlinienfeld eingezeichnet werden. Der zweite notwendige Punkt stellt den gewünschten Arbeitspunkt A dar. Von diesem Punkt ausgehend kann der Arbeitspunkt in die anderen Quadranten übertragen werden.

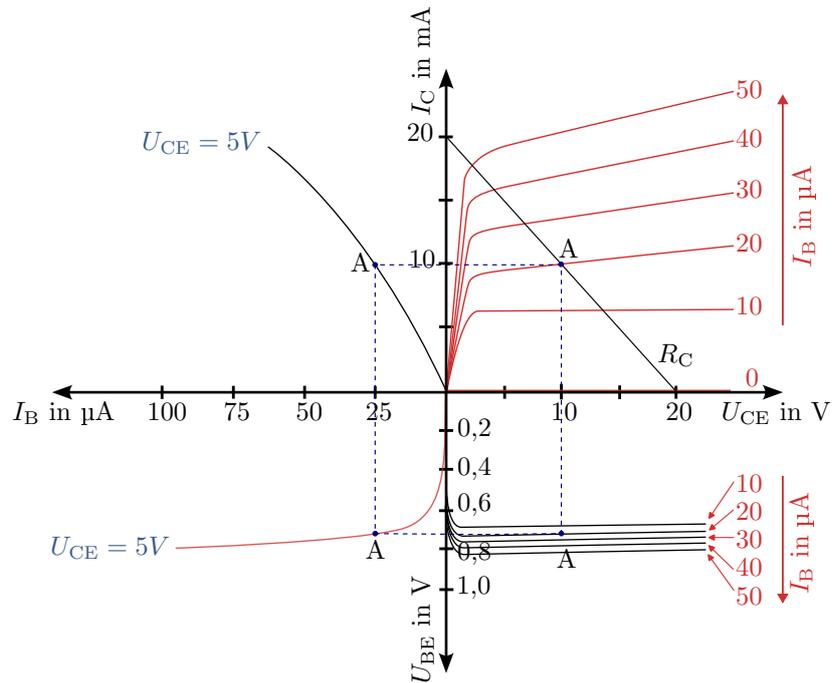


Abbildung 9.35: **Vierquadrantenkennlinienfeld mit Arbeitspunkt A.** Darstellung aller relevanten Bereiche und Größen inklusive Arbeitspunkte.

In den jeweiligen Quadranten ergeben sich die folgenden Arbeitspunkte und Kenngrößen.

Ausgang (bei: $I_B = 20 \mu\text{A}$):

$$\begin{aligned} U_{CE} &= 10 \text{ V} \\ I_C &= 10 \text{ mA} \\ R_C &= \frac{U_{RC}}{I_{RC}} = \frac{U_V/2}{I_C} = \frac{10 \text{ V}}{10 \text{ mA}} = 1000 \Omega \end{aligned}$$

Stromsteuerung:

$$\begin{aligned} I_C &= 10 \text{ mA} \\ I_B &= 25 \mu\text{A} \\ B &= \frac{I_C}{I_B} = \frac{10 \text{ mA}}{25 \mu\text{A}} = 400 \end{aligned}$$

Eingang:

$$\begin{aligned} I_B &= 25 \mu\text{A} \\ U_{BE} &= 0,72 \text{ V} \\ R_V &= \frac{U_{RV}}{I_{RV}} = \frac{U_V - U_{BE}}{I_B} = \frac{20 \text{ V} - 0,72 \text{ V}}{25 \mu\text{A}} = 771,2 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Rückwirkung:

$$\begin{aligned} U_{BE} &= 0,72 \text{ V} \\ U_{CE} &= 10 \text{ V} \\ D &= \frac{U_{BE}}{U_{CE}} = \frac{0,72 \text{ V}}{10 \text{ V}} = 0,072 \end{aligned}$$

Bei Schwankungen des Basisstroms, sei es durch ein analoges Eingangssignal oder auch Störungen, können sich die daraus resultierenden Arbeitspunkte bzw. Bereiche ebenso über das Vierquadranten-Kennlinienfeld darstellen lassen. Das Verhalten ist in der folgenden Abbildung zu sehen. Eine Erhöhung der Basis-Emitter-Spannung (U_{BE}) bewirkt ebenso eine Erhöhung des Basisstroms (I_B), gemäß der Kopplung über die Stromsteuerungskennlinie steigt auch der Kollektorstrom (I_C), lediglich die Kollektor-Emitter-Spannung (U_{CE}) sinkt in diesem Beispiel.

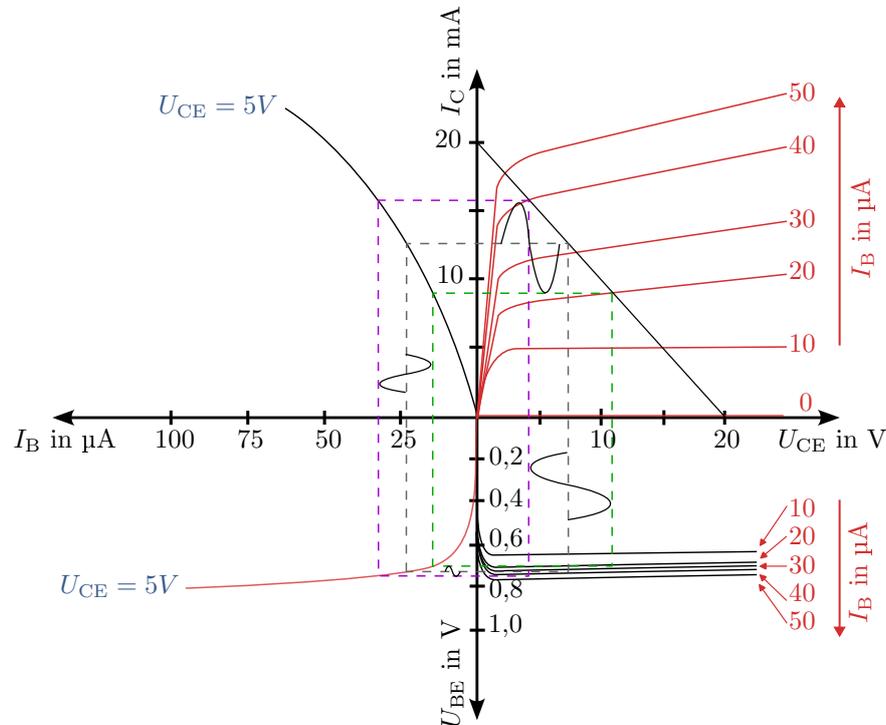


Abbildung 9.36: **Vierquadrantenkennlinienfeld bei AC Eingangssignal.** Darstellung aller relevanten Bereiche und Größen.

9.2.2.3 Aufbau

Bisher wurde der Bipolartransistor gemäß der linken Seite in Abbildung 9.37 gestapelt dargestellt, wobei die verschieden dotierten Gebiete direkt übereinander liegen und die Basis in der Mitte. Diese vereinfachte Darstellung ist in der Realität nicht direkt umsetzbar, da die verschiedenen Dotierungen nacheinander in eine Fläche eingebracht werden. Entsprechend können die unteren Schichten gemäß der linken Darstellung nicht direkt elektrisch kontaktiert werden. Eine typische Realisierung ist rechts in Abbildung 9.37 zu sehen. In einen n-dotierten Halbleiter wird nachträglich ein p-dotierter Bereich für die Basis eingebracht. Innerhalb dieser p-Wanne folgt das Einbringen weiterer Dotieratome, wodurch eine kleinere n-Wanne für den Emitter entsteht. Der gewünschte Schichtaufbau mit n-p-n ist somit unterhalb des Emittergebietes zu sehen. Die verschiedenen Gebiete können mittels leitender Verbindungen an der Oberfläche elektrisch kontaktiert werden.

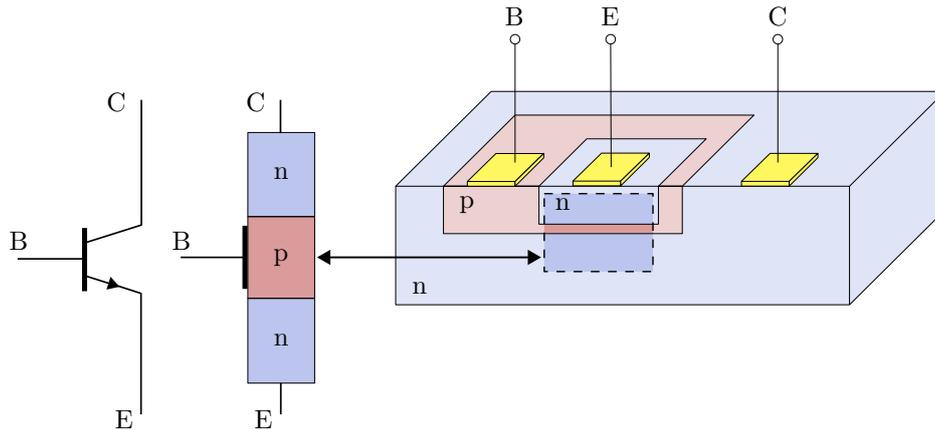


Abbildung 9.37: **Aufbau npn-Bipolartransistor.** Links: Idealer schematischer Aufbau eines npn-Bipolartransistors, angelehnt an dessen Schaltbild. Rechts: Realer Aufbau eines planaren npn-Transistors.

9.2.2.4 Anwendung/Grundschaltungen

Grundschaltungen

Bei Bipolartransistoren wird zwischen drei Grundschaltungen unterschieden: Emitter-, Kollektor- und Basisschaltung. Die Namensgebung erfolgt gemäß des Bezugspotentials der Ein- und Ausgangsspannung.

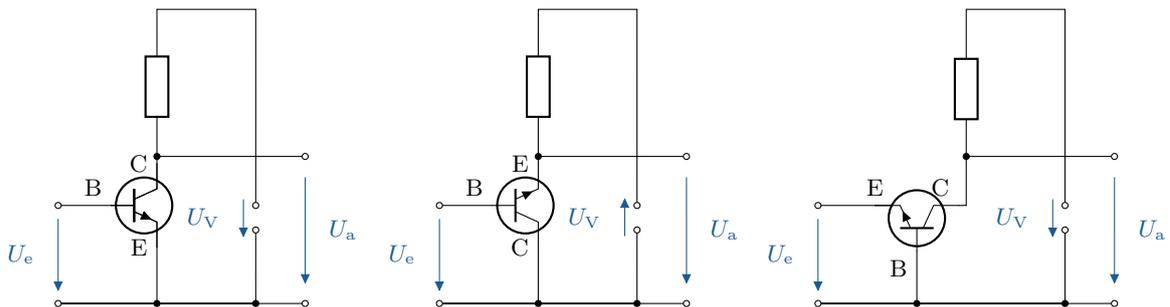


Abbildung 9.38: **Grundschaltungen npn-Bipolartransistor.** V.l.n.r.: Emitter-, Kollektor- und Basisschaltung.

Die häufigste Verwendung findet die bisher gezeigte Emitterschaltung, bei der der Transistor als invertierender Verstärker genutzt wird. Das invertierende Verhalten bezieht sich auf eine Phasendrehung von -180° des Ausgangssignal zum Eingangssignal. In der folgenden Abbildung werden die zugehörigen Ersatzschaltbilder dargestellt, die daraus resultierenden Eigenschaften sind in Tabelle 9.3 zusammengefasst. Der differentielle Widerstand r_{CE} liegt parallel zur Stromquelle $\beta \cdot i_B$. Da er sehr groß ist, wird er in der vereinfachten Betrachtung nicht berücksichtigt.

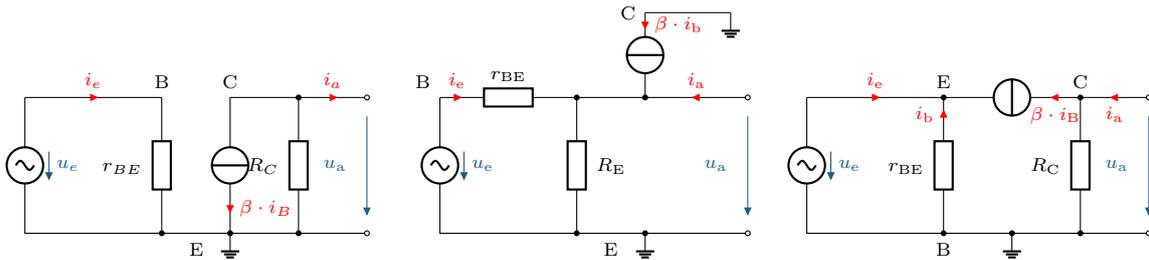


Abbildung 9.39: **Ersatzschaltbilder der Grundschaltungen.** V.l.n.r.: Emitter-, Kollektor- und Basisschaltung von npn-Transistoren.

Eigenschaft	Emitterschaltung	Kollektorschaltung	Basisschaltung
Eingangswiderstand r_e	mittel 1 k Ω	gro β > 100 k Ω	klein 50 Ω
Ausgangswiderstand r_a	mittel 10 k Ω	klein 50 Ω	gro β 100 k Ω
Stromverstärkung v_i	gro β 100	gro β 100	klein < 1
Spannungsverstärkung v_u	gro β 100	klein < 1	gro β 100
Leistungsverstärkung v_p	sehr gro β 1 k	gro β 100	gro β 100
Phasendrehung φ_u	gegenphasig 180 $^\circ$	gleichphasig 0 $^\circ$	gleichphasig 0 $^\circ$

Tabelle 9.3: **Elektrische Eigenschaften von Grundschaltungen.** Typische Werte der elektrischen Eigenschaften verschiedener Grundschaltungen von npn-Transistoren.

Transistor als Schalter

Sollen kleine elektrische Leistungen kontaktlos und schnell geschaltet werden, kann ein Bipolartransistor verwendet werden. Dieser nimmt zwei verschiedene Zustände ein: leitend und sperrend in der Kollektor-Emitter-Strecke. Im leitenden Fall ist die Strecke C-E niederohmig und stellt einen geschlossenen Schalter dar, im sperrenden Fall entsprechend umgekehrt. Der Zustand kann über die Basis-Emitter-Strecke gesteuert werden, es ergibt sich eine Emitterschaltung. Die folgende Abbildung zeigt die zugehörige Schaltung und die Spannungsverläufe.

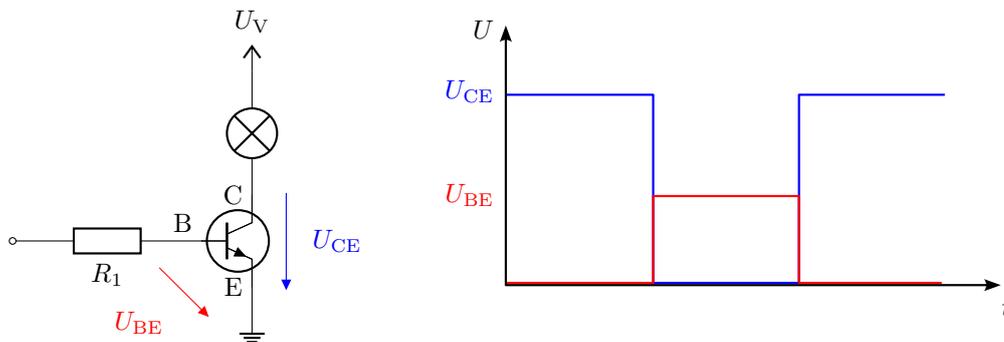


Abbildung 9.40: **Transistor als Schalter.** Links: Schaltbild mit Lampe als Verbraucher in der Kollektor-Emitter-Strecke. Rechts: Spannungsverläufe mit U_{CE} als Folge von U_{BE} .

Merke:

Im Vergleich zu einem elektromechanischen Schalter in Form eines Relais weisen Transistoren einen deutlich kleineren Bauraum und geringeren Preis auf. Durch den kontaktlosen Aufbau tritt zudem kein Kontaktprellen auf, was zu einer höheren Lebensdauer führt.

Darlington Transistor

Ist die notwendige Stromverstärkung eines einzelnen Transistors zu gering, besteht die Möglichkeit, einen Darlington-Transistor bzw. eine Darlington-Schaltung einzusetzen. Diese basiert auf zwei Transistoren, wobei der Emittor des ersten Transistors die Basis des zweiten Transistors speist. Näherungsweise ist die resultierende Stromverstärkung das Produkt der einzelnen Verstärkungen:

$$B \approx B_1 \cdot B_2 \quad (9.9)$$

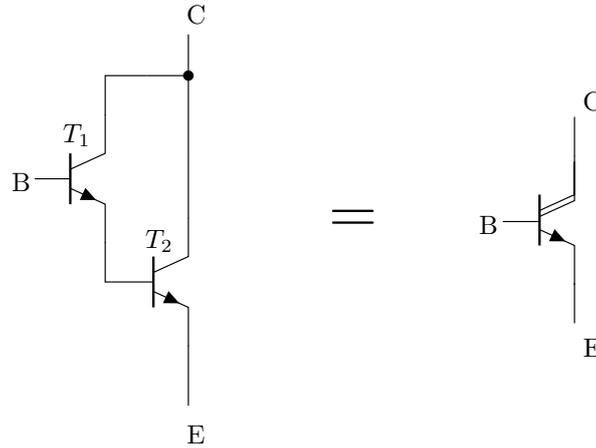


Abbildung 9.41: **Darlington Transistor.** Schaltung und Schaltsymbol eines npn-Darlington-Transistors.

9.2.3 Feldeffekttransistor

Neben dem Bipolartransistor gibt es einen weiteren weit verbreiteten Transistortyp, den sogenannten Feldeffekttransistor (FET). Sein Funktionsprinzip unterscheidet sich grundlegend vom Bipolartransistor. Während beim Bipolartransistor ein pn-Übergang durch einen Steueranschluss in den leitenden Zustand versetzt wird, beeinflusst beim Feldeffekttransistor ein elektrisches Feld die Verteilung der freien Ladungsträger im Halbleiter. Dadurch wird der Widerstand im Bauelement verändert. Beim FET werden die drei Anschlüsse Gate (G), Source (S) und Drain (D) genannt. Das auch als Steuerelektrode bekannte Gate, das das elektrische Feld beeinflusst, kann unterschiedlich ausgeführt sein, was zu verschiedenen Transistortypen führt. Die folgende Abbildung zeigt eine Übersicht der verschiedenen Transistortypen, einschließlich Bipolartransistoren. Bei den FETs wird hauptsächlich zwischen drei Typen unterschieden: Sperrschicht-FETs (JFETs), selbstleitende MOSFETs (Anreicherungstyp) und selbstsperrende MOSFETs (Verarmungstyp). Der Zusatz MOS steht für Metall-Oxid-Semiconductor, den ursprünglichen Schichtaufbau der Steuerelektrode.

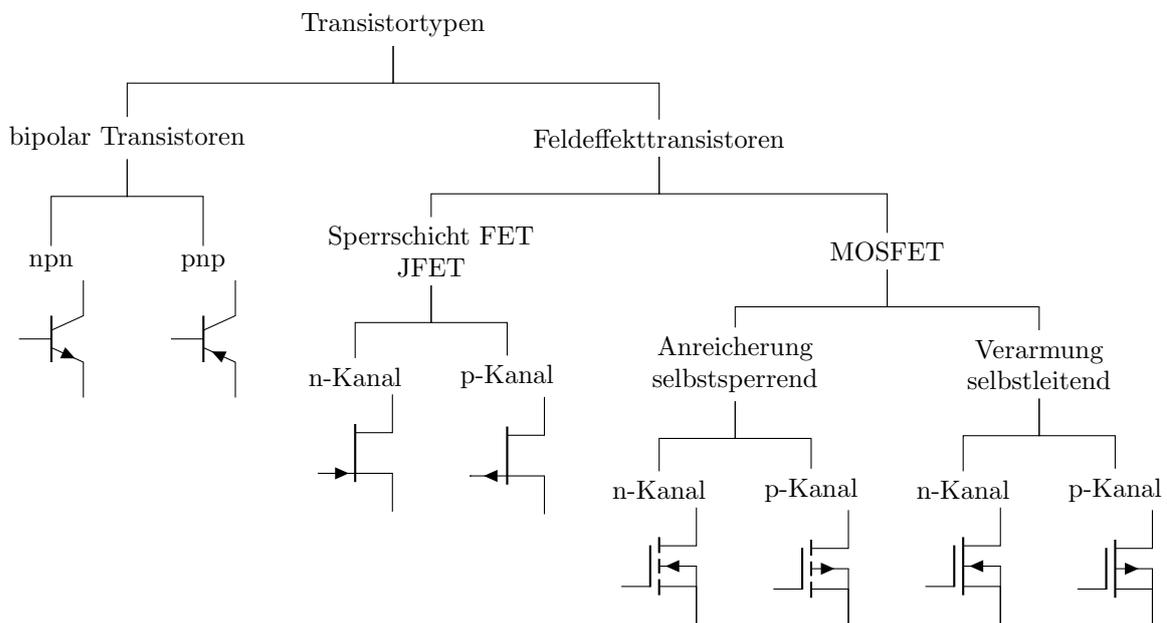


Abbildung 9.42: **Transistortypen.** Übersicht der gängigsten Transistortypen, sowohl bipolarer Transistoren als auch unipolarer Feldeffekttransistoren (FETs). Bei FETs wird zwischen JFETs und MOSFETs (selbstsperrend und selbstleitend) unterschieden, wobei bei jeden Typen zwischen n- und p-Kanal unterschieden wird.

9.2.3.1 Elektrisches Verhalten

Das allgemeine elektrische Verhalten von FETs unterscheidet sich stark von dem der bisher behandelten Bipolartransistoren, bei denen ein Basisstrom den Laststrom steuert. Dadurch wird eine geringere Leistung als beim Bipolartransistor benötigt. Beim FET wird gemäß dem Aufbau, der Widerstand des Strompfades durch eine an das Gate angelegte Spannung und dem dadurch erzeugten elektrischen Feld gesteuert. Der Stromfluss wird somit leistungslos gesteuert.

Im Folgenden wird exemplarisch die Funktionsweise eines selbstsperrenden n-Kanal MOSFETs genauer betrachtet. Die notwendigen Spannungen werden nicht mit Bezug zu Source, sondern zum vierten Anschluss Bulk (B) dargestellt. Dieser Anschluss ist bei Transistoren in der Regel bereits mit Source verbunden, weshalb sie gleichgesetzt werden können. Für das Verständnis und die resultierenden elektrischen Felder wird er separat aufgeführt.

1. Ohne angelegte Gate-Spannung ($U_{GS} = 0\text{ V}$)

Wenn keine Spannung zwischen Gate und Source (U_{GS}) anliegt, bilden sich an den pn-Übergängen Raumladungszonen, auch Verarmungszonen genannt. Es gibt keine freien Ladungsträger im Kanalbereich zwischen Drain und Source, weshalb kein Stromfluss möglich ist.

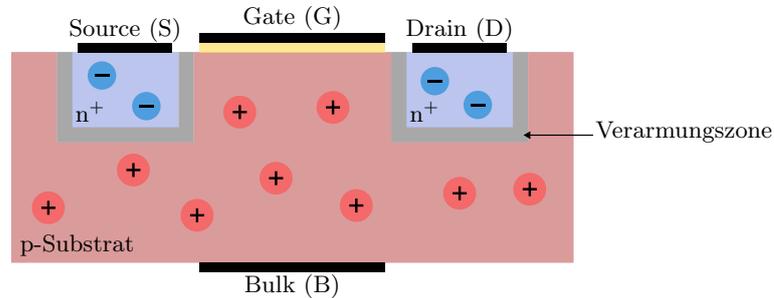


Abbildung 9.43: **Sperrbereich n-Kanal MOSFET.** Querschnitt eines n-Kanal MOSFETs (selbstsperrend) ohne angelegte Spannungen.

2. Positive Gate-Spannung ($U_{GS} > U_{th}$)

Wird eine positive Spannung zwischen Gate und Source angelegt, die größer als die Schwellenspannung (U_{th}) ist, zieht das elektrische Feld Elektronen aus dem p-dotierten Substrat in die Nähe des Gate-Oxids, was zur Bildung eines leitfähigen Kanals führt. Die sogenannte Inversionszone beinhaltet eine Anreicherung von freien Ladungsträgern mit entgegengesetztem Vorzeichen zu den primär in der Halbleiterschicht vorherrschenden Ladungsträgern.

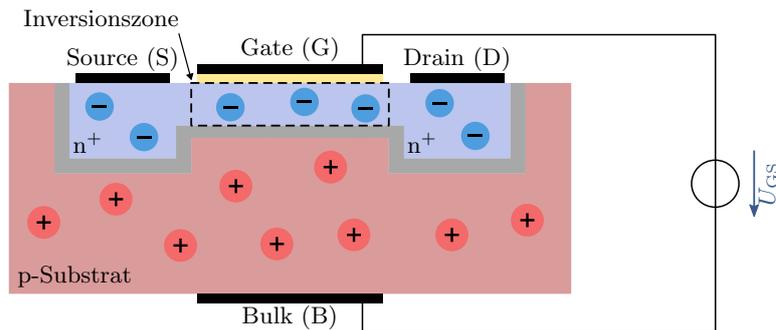


Abbildung 9.44: **Ohmscher Bereich n-Kanal MOSFET.** Querschnitt eines n-Kanal MOSFETs (selbstsperrend) mit angelegter Gate-Source-Spannung größer als der Schwellenspannung.

3. Stromfluss ($U_{DS} > 0\text{ V}$)

Sobald ein n-Kanal gebildet ist, kann eine Spannung zwischen Drain und Source (U_{DS}) angelegt werden, um einen Stromfluss zu erzeugen. Die Elektronen bewegen sich vom Source zum Drain, wodurch ein Stromfluss (I_D) entsteht. Bei kleinen U_{DS} liegt der MOSFET im linearen Bereich, wobei der Stromfluss I_D proportional zu U_{DS} ist. Das Verhalten ähnelt einem Widerstand. Bei höheren U_{DS} erreicht der MOSFET den Sättigungsbereich, in dem I_D weitgehend unabhängig von weiteren Erhöhungen von U_{DS} wird. Der Stromfluss wird primär durch U_{GS} gesteuert.

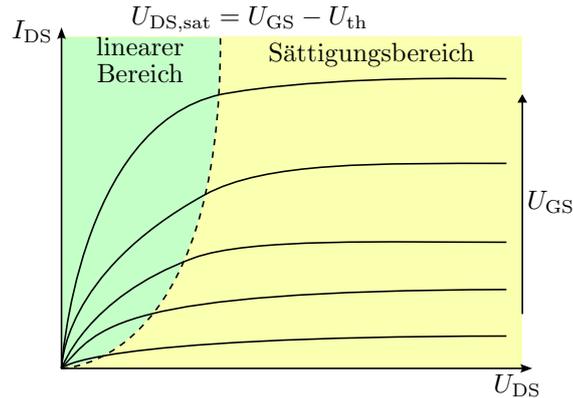


Abbildung 9.45: **Ausgangskennlinienfeld n-Kanal MOSFET.** Ausgangskennlinienfeld eines n-Kanal MOSFETs (selbstsperrend) mit dem linearen Bereich und Sättigungsbereich. Drainstrom als Folge der Drain-Source-Spannung bei verschiedenen Gate-Source-Spannungen.

Die Sättigung wird dadurch hervorgerufen, dass bei hoher Spannung die freien Ladungsträger aus dem Kanal verdrängt werden und der Kanal abgeschnürt wird. Die Ladungsträger können diesen Bereich noch durchqueren, jedoch ist keine weitere Steigerung von I_D durch U_{DS} möglich.

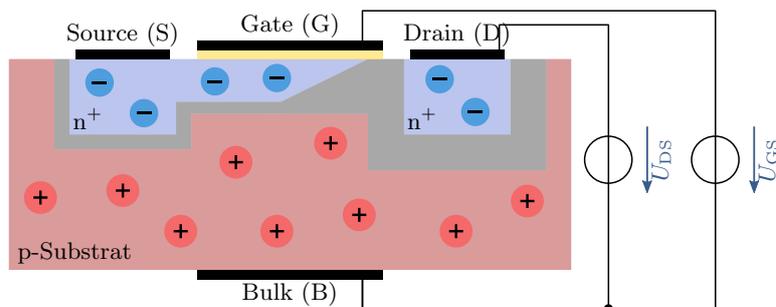


Abbildung 9.46: **Sättigungsbereich n-Kanal MOSFET.** Querschnitt eines n-Kanal MOSFETs (selbstsperrend) mit angelegter Spannung U_{GS} und U_{DS} .

Merke:

- MOSFETs besitzen drei Anschlüsse: Gate(G), Source(S) und Drain (D).
- Das elektrische Verhalten wird leistungslos gesteuert.
- Durch U_{GS} erfolgt eine Inversion der Ladungsträger unterhalb des Gates.

Nach der detaillierten Betrachtung des selbstsperrenden n-Kanal MOSFETs, wird in der folgenden Tabelle eine Zusammenfassung weiterer Arten von Feldeffekttransistoren bereitgestellt. In der Übersicht wird die Eingangskennlinie mit I_D als Funktion von U_{GS} und das Ausgangskennlinienfeld mit I_D als Funktion von U_{DS} bei verschiedenen Werten von U_{GS} dargestellt. Die einzelnen Verläufe unterscheiden sich in den Vorzeichen der Ströme und Spannungen, abhängig von der jeweiligen Dotierung. Zusätzlich unterscheiden sich die verschiedenen Typen über die Größe der Schwellenspannung U_{th} .

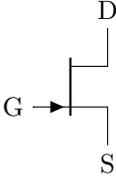
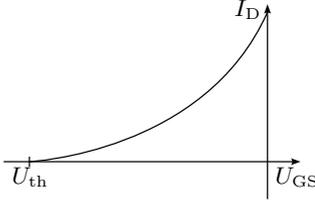
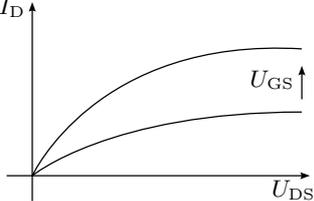
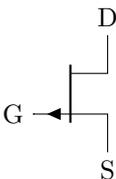
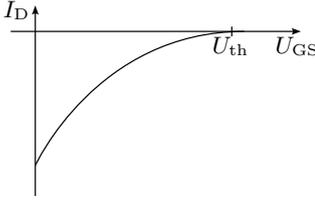
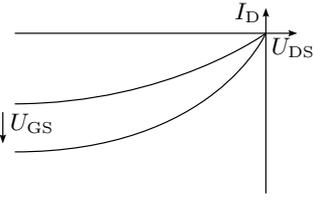
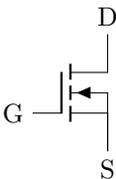
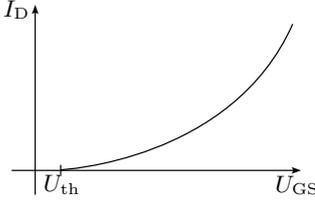
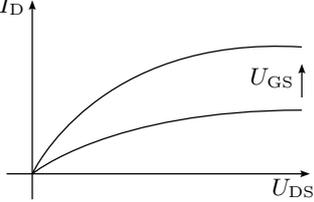
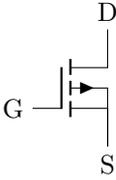
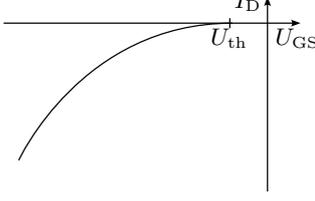
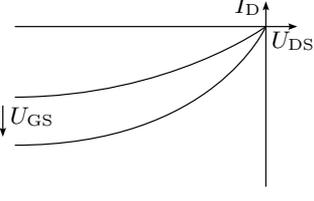
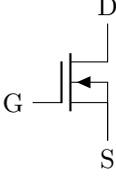
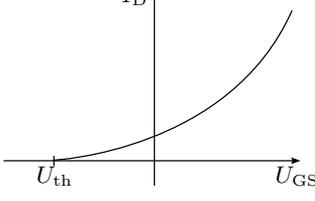
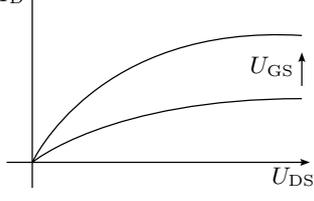
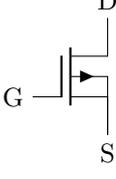
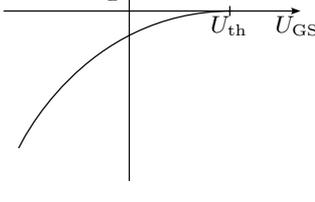
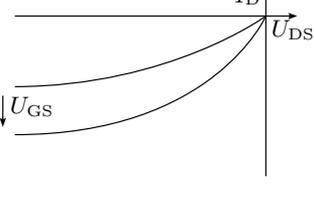
Type	Symbol	Eingangskennlinie	Ausgangskennlinienfeld
n-Kanal JFET			
p-Kanal JFET			
n-Kanal MOSFET selbstsperrend			
p-Kanal MOSFET selbstsperrend			
n-Kanal MOSFET selbstleitend			
p-Kanal MOSFET selbstleitend			

Tabelle 9.4: **Übersicht Feldeffekttransistoren.** Elektrisches Verhalten (Eingangskennlinie und Ausgangskennlinienfeld) verschiedener Feldeffekttransistoren.

Merke:

- Die Dotierung des Kanals gibt die notwendigen Vorzeichen der Ströme und Spannungen am Transistor vor.
- Die Eingangskennlinien können durch die Lage der Schwellenspannung U_{th} unterschieden werden.

9.2.3.2 Aufbau

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits schematisch der Querschnitt eines n-Kanal MOSFETs gezeigt. Für viele Anwendungen und Logikschaltungen sind zusätzlich auch p-Kanal MOSFETs notwendig. Beide komplementären Varianten lassen sich mit dem gleichen Ausgangsmaterial realisieren, es wird dann von CMOS-Technik (engl.: Complementary Metal-Oxide-Semiconductor) gesprochen. Im ersten Schritt der Herstellung muss für den p-Kanal MOSFET (PMOS) lokal eine n-Dotierung erfolgen, der restliche Aufbau entspricht dem eines n-Kanal MOSFET (NMOS) mit komplementärer Dotierung. Obwohl das M in MOSFET ursprünglich für Metall steht, ist das Gate-Material heutzutage heutzutage aus fertigungstechnischen Gründen in der Regel aus leitfähigem Polysilizium. Die Elektroden und die Verschaltung der Gebiete und des Gates erfolgen beispielsweise mittels Aluminiumstrukturen.

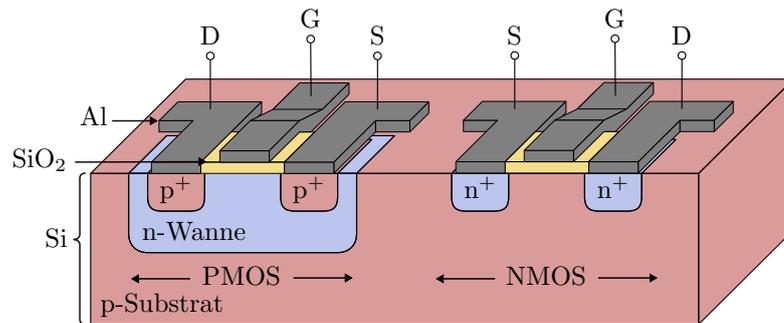


Abbildung 9.47: **Querschnitt CMOS Struktur.** Integration eines PMOS und NMOS in gemeinsamen p-dotierten Silizium-Substrat.

Die folgende Abbildung zeigt den möglichen Querschnitt eines n-Kanal JFETs. Im direkten Vergleich zum MOSFET ist der Aufbau, durch den Verzicht auf die Isolationsschicht am Gate deutlich einfacher. Obwohl die Funktionsweise eines MOSFETs früher beschrieben wurde, konnte der JFET aufgrund des einfacheren Aufbaus etwa 15 Jahre früher gefertigt werden. Die hochdotierten n^+ -Gebiete dienen zur besseren Kontaktierung des n-Kanals und sind nicht zwingend erforderlich. Wesentlich sind somit nur drei dotierte Bereiche notwendig und deren elektrische Kontaktierung: Der n-Kanal mit Drain- und Source-Anschluss sowie das p-dotierte Gate ober- und unterhalb des Kanals.

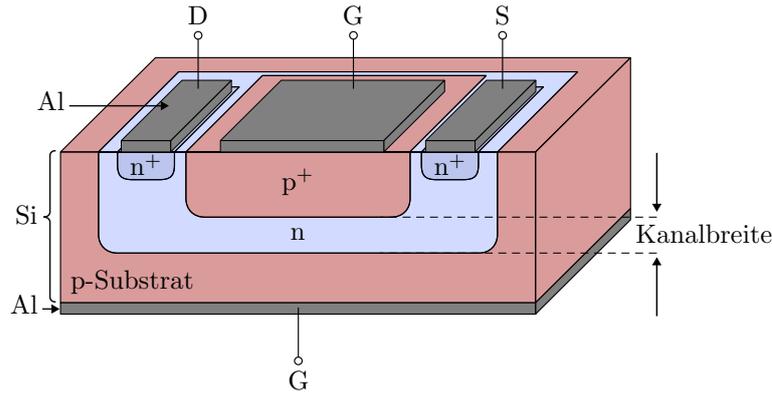


Abbildung 9.48: **Querschnitt n-Kanal JFET.** Allgemeiner Aufbau eines n-Kanal JFETs mit dotierten Gebieten und notwendigen Elektroden.

Merke:

- CMOS-Technik kombiniert komplementäre MOSFETs in einem Bauteil.
- JFETs weisen den einfachsten Aufbau von FETs auf.

9.2.3.3 Anwendungen/Grundsaltungen

Steuerbarer Widerstand

Durch den Betrieb des MOSFETs im linearen Bereich weist dieser einen variablen Widerstandswert auf, der elektronisch gesteuert werden kann. Der einstellbare Wert kann als Steuerelement für kompliziertere elektronische Schaltungen verwendet werden. Ein wichtiger Vorteil bei der Verwendung eines solchen Transistors liegt darin, dass das Steuersignal sehr gut von den Widerstandsklemmen isoliert ist. In der folgenden Abbildung ist gezeigt, wie im einfachsten Fall ein MOSFET als steuerbarer Widerstand in einem Spannungsteiler dient, sowie eine allgemeine Darstellung der dadurch repräsentierten Schaltung. Es ist zu beachten, dass die gezeigte Schaltung nur einen sehr begrenzten Einsatzbereich aufweist. Gründe dafür sind die begrenzte Linearität des Transistors, dessen geringer Widerstand sowie der Einfluss des Widerstandes R auf U_{DS} .

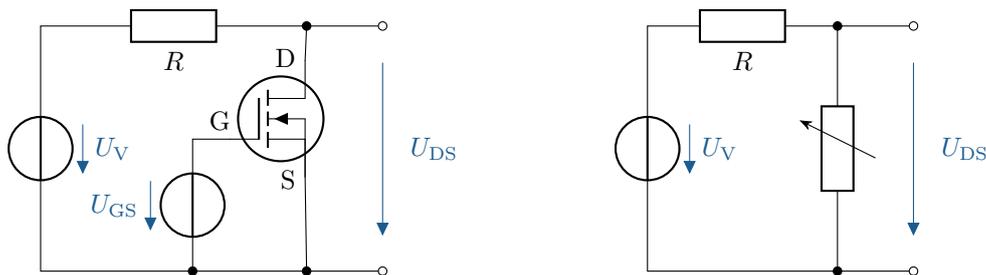


Abbildung 9.49: **MOSFET als steuerbarer Widerstand.** Links: Spannungsteiler mit MOSFET als steuerbares Element. Rechts: Spannungsteiler mit Repräsentation des MOSFETs als steuerbarer Widerstand.

Merke:

Der ohmsche Widerstand eines MOSFETs kann durch U_{GS} gesteuert werden, der Durchgangswiderstand ist allerdings gering und der Wertebereich sehr schmal.

Schalter

Ein MOSFET kann als Schalter betrieben werden, indem die Spannung U_{GS} gesteuert wird. Im eingeschalteten Zustand wird eine ausreichend positive Spannung (für n-Kanal MOSFETs) an das Gate angelegt, wodurch ein leitfähiger Kanal zwischen Source und Drain entsteht. Dadurch kann Strom durch den Transistor und die in Reihe geschaltete Last fließen. Im ausgeschalteten Zustand wird U_{GS} reduziert, was den leitfähigen Kanal entfernt und den Stromfluss stoppt.

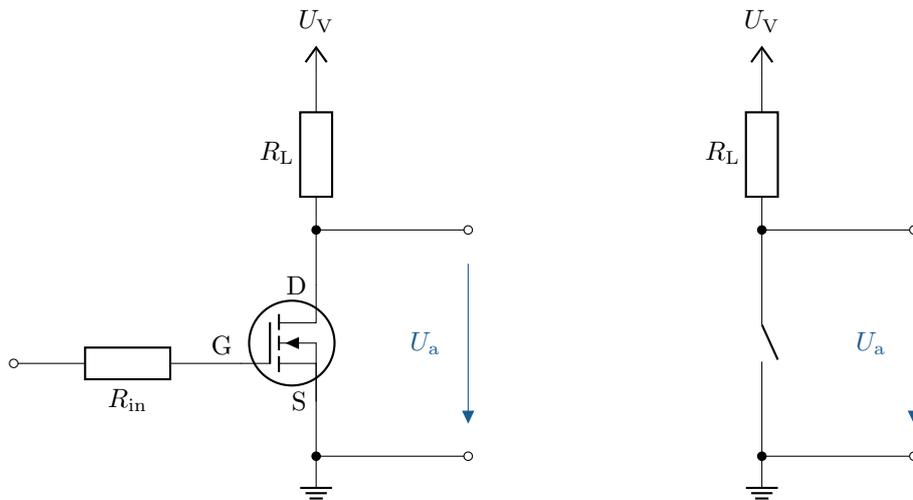


Abbildung 9.50: **MOSFET als Schalter.** Links: Schaltung mit MOSFET als steuerbaren Schalter. Rechts: Ersatzschaltbild mit der Repräsentation des MOSFETs als Schalter.

Merke:

Der große Vorteil von MOSFETs in diesem Szenario ist ihre hohe Schaltgeschwindigkeit, der niedrige Widerstand im leitenden Zustand sowie der hohe Eingangswiderstand am Gate.

Typische Anwendungen für MOSFETs als Schalter sind Schaltnetzteile, Motorsteuerungen, Logikschaltungen und allgemein als Ersatz für Relais. Der Arbeitsbereich liegt dabei jeweils im Sättigungsbereich.

Inverter

Wie bereits im Abschnitt Aufbau beschrieben, beinhalten CMOS-Strukturen sowohl p-Kanal als auch n-Kanal MOS-Transistoren. Ein typisches darauf basierendes Grundelement ist ein Inverter, auch bekannt als NOT-Gatter. Das Eingangssignal E wird auf die parallel geschalteten Gates geführt. Als Ausgangssignal dient das Potenzial zwischen den in Reihe geschalteten Drain-Source-Strecken. Die Schaltung ergibt sich gemäß Abbildung 9.51 links. Es ergeben sich die beiden folgenden Zustände:

1. Eingangssignal 0 V (low):

- *Transistor*₂ (T_2) ist leitend, da U_{GS2} negativ ist.

- *Transistor*₁ (T_1) ist sperrend, da U_{GS1} null ist.
- Der Strom kann von der Versorgungsspannung durch T_2 zum Ausgang fließen bzw. an Q liegt 5 V an (high Signal).

2. Eingangssignal 5 V (high):

- T_2 ist sperrend, da U_{GS2} null ist.
- T_1 ist leitend, da U_{GS1} positiv ist.
- Der Strom kann von dem Ausgang durch T_1 zum Ground fließen bzw. an Q liegt 0 V an (low Signal).

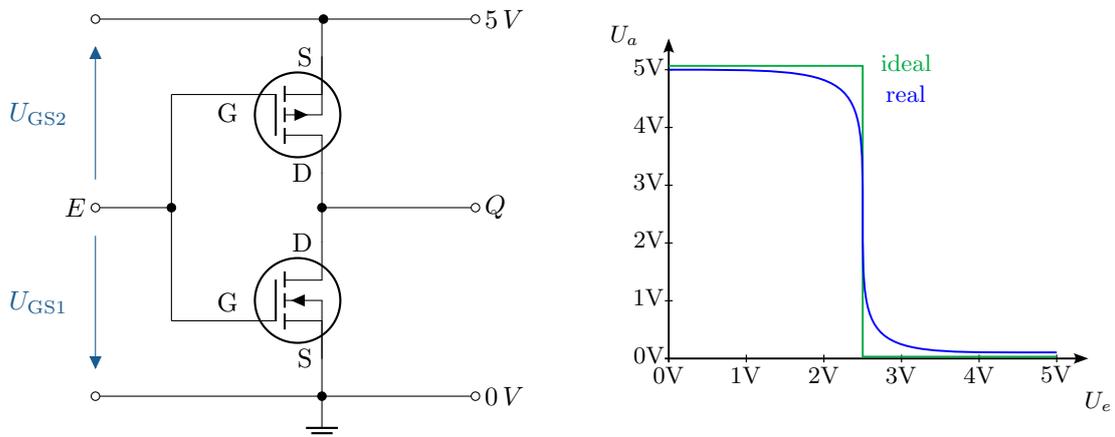


Abbildung 9.51: **MOSFET als Inverter.** Links: Schaltkreis eines CMOS Inverters. Rechts: Spannungscharakteristik mit realem Ausgangssignal (blau) und idealem Ausgangssignal (grün).

Gemäß dem beschriebenen Verhalten ergibt sich ein diskretisiertes Ausgangssignal, das invers zum Eingangssignal ist (siehe Abbildung 9.51 rechts). Es ist zu beachten, dass das gewünschte Verhalten nur bei Spannungen nahe 0 V bzw. der Versorgungsspannung zuverlässig eintritt. Bei beispielsweise der halben Versorgungsspannung ist der Wert des Ausgangssignals nicht genau definiert und die Transistoren können sowohl leitend als auch sperrend sein bzw. einen Zustand dazwischen annehmen. Zusätzlich ist dieser Zustand zu vermeiden, da die Versorgungsspannung kurzgeschlossen wird und ein großer Stromfluss möglich ist.

Modul 10

Operationsverstärker

10.1 Einführung, Aufbau und Funktionsweise von Operationsverstärkern

Im vorherigen Modul wurde erläutert, wie mit Hilfe von ein- und mehrstufigen Transistorverstärkern, Signale mit geringen Eingangsamplituden verstärkt werden können. Diese Verstärkerschaltungen wurden vor allem in der Mess-, Steuer- und Regelungstechnik eingesetzt und bis in die 1950er Jahre diskret aus Elektronenröhren oder Transistoren aufgebaut. Die Entwicklung der „integrated circuits“ ermöglichte ab Ende der 1960er Jahre die Miniaturisierung von Schaltungen und dadurch die Bereitstellung von modularen Bausteinen für die Hardwareentwicklung. Dies galt auch für die in den 1940er Jahren entwickelte Differenzverstärker, die aufgrund ihres zunächst sehr verbreiteten Einsatzes in Analogrechnern auch als „operational amplifier“ (zu deutsch „Operationsverstärker“ von „Operator“) bezeichnet werden. Die Grundlagen zum Thema „Operationsverstärker“ werden in diesem Modul vermittelt.

Es sollen im Rahmen dieses Kapitels folgende Kompetenzen erworben werden:

Lernziele: Operationsverstärker

Die Studierenden können

- den Aufbau eines einfachen Operationsverstärkers angeben.
- das Funktionsprinzip eines Operationsverstärkers erläutern.

10.1.1 Aufbau und Funktionsweise

Operationsverstärker (auch kurz als OPV oder OpAmp bezeichnet) zeichnen sich dadurch aus, dass sie als Universalverstärker aufgebaut sind und ihre Funktion maßgeblich durch äußere Beschaltung bestimmt wird. So lassen sich mit dem gleichen Baustein Spannungen verstärken, Rechenoperationen wie Additionen, Subtraktionen oder Integrationen durchführen und Signale schalten. Solche Operationalverstärker sind beispielsweise in der Mess- und Regelungstechnik, der Signalverarbeitung und der Signalformung unerlässlich. Im Folgenden ist ein aus diskreten Transistoren aufgebauter Operationsverstärker und ein integrierter Schaltkreis dargestellt. Durch die direkte Kopplung der Verstärkerstufen können Operationsverstärker Gleich- und Wechselspannungen verstärken und werden aus diesem Grund der Gruppe der Gleichspannungsverstärker zugeordnet.

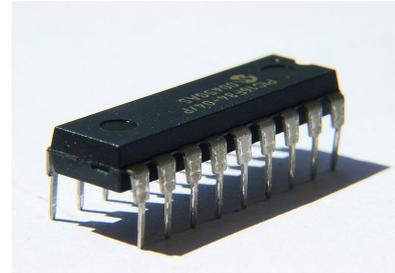
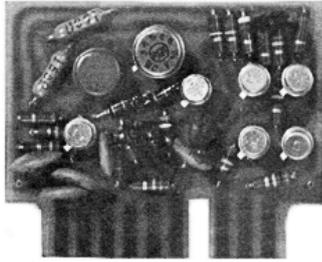


Abbildung 10.1: Diskret aufgebauter Operationsverstärker (Quelle: Analog Devices, Wikipedia, Lizenz CC-BY-SA) Abbildung 10.2: Operationsverstärker monolithisch in Dual in-line package (DIP) (Quelle: Wollschaf, Wikipedia, (GNU-Lizenz für freie Dokumentation – mit Namensnennung))

Die Funktionsweise lässt sich gut an einem vereinfachten Ersatzschaltbild erklären (siehe Abbildung 10.3). In dieser Abbildung ist ein vereinfachtes Ersatzschaltbild eines OPVs aus Bipolartransistoren dargestellt. Heute werden Operationsverstärker vermehrt aus Feldeffekttransistoren (FET) aufgebaut. Die Umsetzung der Verstärkerschaltungen mit FETs erfolgt aber sehr ähnlich zu Bipolartransistoren, weswegen die Funktionsweise hier mit einer Art von Transistoren gezeigt werden soll. Die NPN-Transistoren T_1 und T_2 sind identisch und bilden den Eingang des Operationsverstärkers. Zwischen dem mit „+“ gekennzeichneten Eingang und dem mit „-“ gekennzeichneten Eingang wird die zu verstärkende Differenzspannung U_{Diff} angelegt¹. Die Eingänge werden als nicht-invertierender Eingang „+“ und invertierender Eingang „-“ bezeichnet. Dieser Differenzverstärker am Eingang des OPVs ist in Abbildung 10.3 rot umrandet. Der Transistor T_3 funktioniert durch die Verschaltung mit den Dioden D_1 und D_2 wie eine Stromquelle. Die zwei Dioden sorgen für eine Regulierung der Basis-Spannung an T_3 (dieser Teil der Schaltung ist lila markiert).

Wenn die nicht-invertierte Eingangsspannung steigt (A), sinkt der Widerstand des Transistors T_2 . Dies führt zu einer Reduktion der Spannung an dessen Kollektor und zu einem Anstieg am Emitter (B). Da die Basis des Transistors T_4 mit dem Kollektor von T_2 verbunden ist, verursacht dies eine entsprechende Spannungsreduktion an der Basis von T_4 (C). Infolgedessen wird der Kollektor-Emitter-Pfad des PNP-Transistors T_4 hochohmiger, so dass mehr Strom durch den Lastwiderstand R_L fließt (D). Dadurch erhöht sich der Spannungsabfall über R_L und somit die Spannung am Ausgang U_A (die Ausgangsstufe des Verstärkers ist gelb markiert).

¹Alle in diesem Modul vorkommenden Ströme und Spannungen können zeitlich veränderlich sein und werden im Folgenden nur aufgrund der Übersichtlichkeit nicht mit $U_{E/A/...}(t)$ sondern mit $U_{E/A/...}$ bezeichnet

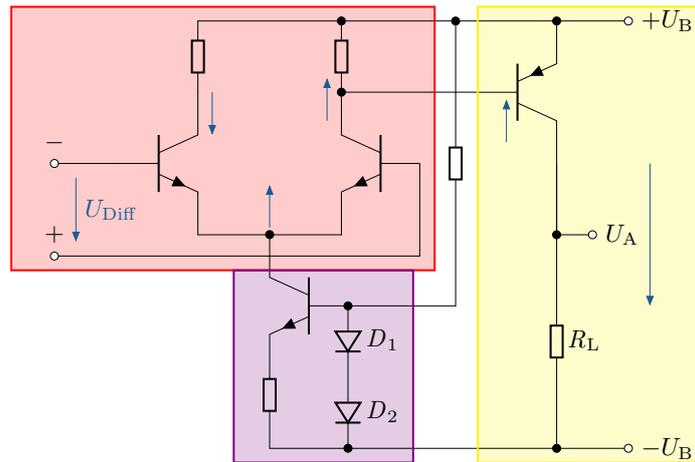


Abbildung 10.3: Verhalten eines vereinfachten Operationsverstärkers bei Anlegen einer positiven Differenzspannung am Eingang. Die blauen Pfeile geben an, wie sich das Potential am Schaltungsknoten ggü. eines ausgeglichenen Eingangs $U_{Diff} = 0$ verschiebt.

Erhöht sich dagegen die invertierte Eingangsspannung, verringert sich der Widerstand im Kollektor-Emitter-Pfad des Transistors T_1 (siehe Abbildungen 10.4). Dies führt zu einer Verringerung der Spannung am Kollektor von T_1 und einer gleichzeitigen Erhöhung am Emmitter. Da die Emmitter von T_1 und T_2 miteinander verbunden sind, steigt auch die Spannung am Emmitter von T_2 an. Dadurch verringert sich die Spannungsdifferenz zwischen Basis und Emmitter von T_2 , wodurch sein Kollektor-Emitter-Pfad hochohmiger wird. Infolgedessen steigt die Spannung am Kollektor von T_2 an, wodurch sich die Basisspannung von T_4 erhöht. Dadurch wird der Transistor T_4 resistiver, was den Stromfluss durch den Widerstand R_L verringert und in der Folge die Spannung an R_L absenkt. Die Ausgangsspannung dieses Operationsverstärkers kann so zwischen $+U_B$ und $-U_B$ gesteuert werden.

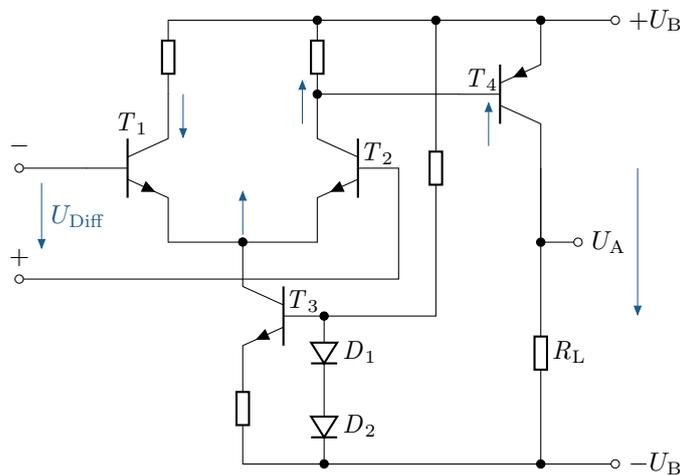


Abbildung 10.4: Verhalten eines vereinfachten Operationsverstärkers bei Anlegen einer negativen Differenzspannung am Eingang. Die blauen Pfeile geben an, wie sich das Potential am Schaltungsknoten ggü. eines ausgeglichenen Eingangs $U_{Diff} = 0$ verschiebt.

In dieser Schaltung sind bereits einige wichtige Eigenschaften des reellen Operationsverstärkers ablesbar:

Merke:

1. Die eingangsseitige Stromaufnahme des Verstärkers ist abhängig von den Transistoren T_1 und T_2 . Diese Stromaufnahme ist in der Regel sehr gering und beträgt einige nA bis einige hundert pA. Die geringe Stromaufnahme ergibt sich durch die hochohmige Kollektorschaltung der beiden Eingangstransistoren.
2. Die Verstärkung ist durch die Versorgungsspannung nach oben und unten begrenzt.
3. Der verfügbare Ausgangsstrom ist durch die Betriebsspannungsquelle und den Transistor T_4 vorgegeben.

10.2 Modellierung und charakteristische Größen

Der vereinfachte Schaltplan des vorherigen Kapitels eignet sich zwar gut um die interne Funktionsweise zu illustrieren, ist für die Darstellung in größeren Schaltkreisen allerdings ungeeignet. Um Schaltpläne übersichtlicher zu gestalten werden Operationsverstärker in der Regel durch ein Normsymbol dargestellt. Der interne Aufbau des Verstärkers wird vernachlässigt und diesem allgemeinen Verstärker charakteristische Eigenschaften zugeordnet. Ähnlich wie bei dem Transistorsymbol kann so der Operationsverstärker in einer Schaltung vereinfacht dargestellt werden kann.

Es sollen im Rahmen dieses Kapitels folgende Kompetenzen erworben werden:

Lernziele: Operationsverstärker

Die Studierenden können

- Unterschiede zwischen dem vereinfachten Operationsverstärkermodell und realen Operationsverstärkern beschreiben.
- Wichtige Bereiche der Operationsverstärkerkennlinie angeben.

Im Schaltungselement in Abbildung 10.5 (links) ist der invertierende Eingang, der nicht-invertierende Eingang, der Ausgang sowie der Massebezug und die Anschlüsse für die Versorgungsspannungen dargestellt. Dieses Schaltzeichen ist häufig im angloamerikanischen Raum und älteren Dokumenten zu finden und soll hier nur aufgrund der Vollständigkeit eingeführt werden. In diesem Dokument soll das neue Schaltzeichen (rechts) verwendet werden. Ist die Bezugsmasse nicht explizit dargestellt, wird bei dieser Darstellung davon ausgegangen, dass der Ausgang einen Bezug zur Masse aufweist. Aus didaktischen Gründen werden die Versorgungsspannungen in diesem Dokument allerdings mit angegeben. Der ideale Verstärker besitzt in der rechten, oberen Ecke darüber hinaus das Unendlichzeichen. Dies bedeutet, dass die Verstärkung nicht begrenzt ist. Der Vorteil bei diesem Schaltungselement ist, dass auch Verstärker mit Verstärkerbegrenzungen modelliert werden können. In diesem Fall wird das Symbol für „unendlich“ $\hat{=}$ ∞ durch einen endlichen Wert ersetzt.

Zwei der vier Anschlüsse² des Verstärkers, auch Pole, können unter idealisierten Bedingungen jeweils zu einem sogenannten sogenannten „Tor“ zusammengefasst werden. Der Operationsverstärker lässt sich so durch ein sogenanntes Zweitor modellieren. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass vereinfacht davon ausgegangen werden darf, dass das Übertragungsverhalten vollständig durch die Größen Strom und Spannung beschrieben werden kann. Durch die Vereinfachung über das Zweitor kann also der

²Die Anschlüsse für die Versorgungsspannung werden hier nicht mitgezählt. Die ausgangsseitige hingegen wird als Anschluss verstanden.

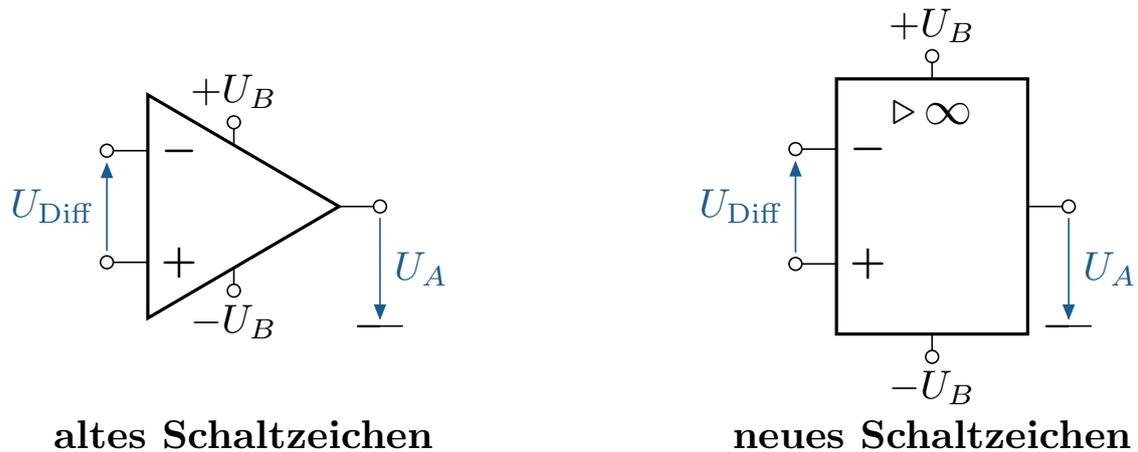


Abbildung 10.5: Schaltungselement OPV im alt (links) und neu nach DIN EN 60617 Teil 13 (rechts)

interne Aufbau des Operationsverstärkers vernachlässigt und als „Blackbox“ betrachtet werden. Die zuvor recht komplizierte, innere Verschaltung der Transistoren kann durch das in Abbildung 10.5 dargestellte Bauteil modelliert werden. Zudem wird bei der Modellierung durch das Zweitor davon ausgegangen, dass kein Strom in die Eingänge des Operationsverstärkers hineinfließt ³.

In der folgenden Tabelle sind weitere Eigenschaften aufgeführt, die das Rechnen mit Operationsverstärkern erleichtert. Zudem sind in der Tabelle klassische Werte eines realen Operationsverstärkers angegeben, die je nach Verstärkertyp leicht variieren können und lediglich die Grenzen des Zweitor-Modells aufzeigen sollen.

Tabelle 10.1: Ideale und typische Operationsverstärkereigenschaften

³Dies ist notwendig, damit die sogenannte Torbedingung erfüllt ist. Die fordert das der Strom in die Eingänge gegengleich sein muss, also $I_+ = I_-$.

Bezeichnung	Ideale OPV-Eigenschaften	Typische Werte (z.B. OPA 121)	Erläuterung
Leerlaufverstärkung	$V_{\text{Leer}} = \infty$	$V_{\text{Leer}} = 10^6$	Verstärkung der zwischen dem Eingängen anliegenden Spannung bei unbeschalteten OPV.
Eingangsimpedanz	$Z_i = \infty \Omega$	$Z_i = 10^{13} \Omega$	Der von der Quelle aus betrachtet Lastwiderstand des OPVs.
Ausgangsimpedanz	$Z_a = 0 \Omega$	$Z_a = 50$ bis 100Ω	Der von einer Last aus betrachtete Widerstand am Ausgang des OPVs.
Bandbreite	$B = \infty \text{ MHz}$	$B > 2 \text{ MHz}$	Frequenzbereich in dem das Verstärkerverhalten den im Datenblatt angegebenen Verhalten entspricht.
Phasenverschiebung	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi > 0^\circ$	Verzögerung des Ausgangs gegenüber des Eingangssignals.
Slew Rate	$\infty \text{ V}$	2 mV bis 1000 V/ μs	Maximaler Spannungsanstieg pro Zeiteinheit.
Ausgangs-Aussteuerbarkeit	∞	auf max. U_B begrenzt	Maximaler Ausgangsspannungswert.
Eingangsruhestrom	$I_{\text{Ruhe}} = 0 \text{ pA}$	$I_{\text{Ruhe}} < 5 \text{ pA}$	Eingangsseitige Stromaufnahme bei Differenzspannung $\Delta U_{\text{Diff}} = 0$.
Eingangsoffsetstrom	$I_{\text{Off}} = 0 \text{ pA}$	$I_{\text{Off}} < I_+ - I_-$	Differenz der beiden Eingangsruhestrome
Eingangs-Offsetspannung	$U_{\text{Off}} = 0 \text{ mV}$	$U_{\text{Off}} < 2 \text{ mV}$	Ausgegebene Gleichspannung bei $\Delta U_{\text{Diff}} = 0$
Gleichtaktunterdrückung (engl.: Common Mode Rejection)	$CMR = \infty \text{ dB}$	$CMR = 86 \text{ dB}$	Gibt an, wie gut der Verstärker Signale unterdrückt, die an beiden Eingängen gleichermaßen anliegen

Mit den oben gemachten Angaben kann die Kennlinie eines Operationsverstärkers konstruiert werden. Diese ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

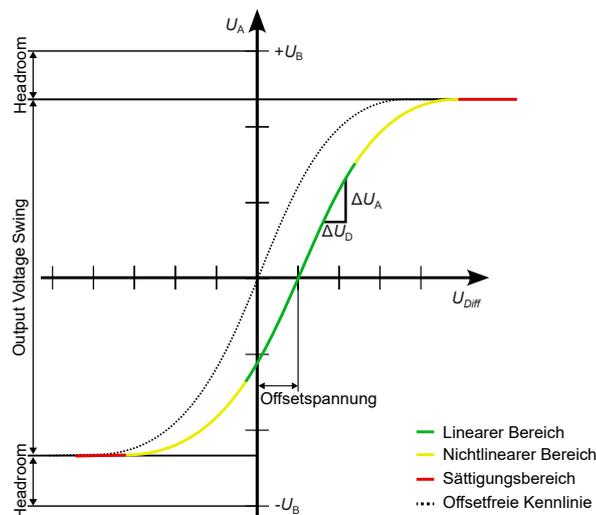


Abbildung 10.6: Kennlinie eines Operationsverstärkers

In Abbildung 10.6 ist die horizontale Verschiebung der Verstärkerkennlinie zu sehen, die sich durch die Offsetspannung U_{Off} ergibt. Darüber hinaus ist zu erkennen, dass der Verstärker in seinem spezifizierten Arbeitsbereich (in grün eingezeichnet) ein lineares Verstärkungsverhalten ggü. der angelegten Eingangsspannung aufweist. Die Steigung im linearen Bereich ist von der maximalen Verstärkung des genutzten Operationsverstärkers abhängig. Wird dieser spezifizierte Arbeitsbereich verlassen, weist die Ausgangsspannung zunächst einen nichtlinearen Bezug zur Eingangsspannung auf (in gelb eingezeichnet). Die Ausgangsspannung steigt allerdings weiterhin, bis die Sättigung erreicht wird. Im rot markierten Bereich bleibt selbst bei weiterer Erhöhung der Eingangs- differenzspannung die Ausgangsspannung konstant. Solange also die Ausgangsspannung im Arbeitsbereich des Operationsverstärkers liegt, wird eine konstant verstärkte und mit einem Offset belegte Ausgangsspannung ausgegeben. Die tatsächlich erreichbare Ausgangsspannung wird über die Größe „Output Voltage Swing“ angegeben. Die Differenz zur positiven bzw. negativen Versorgungsspannung ($+U_B$ und $-U_B$) wird als „Headroom“ bezeichnet. Der Headroom ist das Resultat eines PN-Übergangs der im Operationsverstärker verbauten Halbleiterbauteile und beträgt aus diesem Grund in der Regel 0,6 - 0,7 V. Der Headroom ist eine wichtige Größe für die Auslegung von Operationsverstärker. Operationsverstärker, bei denen dieser Headroom sehr gering ist, werden von den Herstellern zumeist als „Rail-to-Rail“ Verstärker klassifiziert.

Merke:

Um das Rechnen mit Operationsverstärkern zu erleichtern, wird häufig ein vereinfachtes Modell verwendet. Es ist wichtig die Grenzen dieses Modells zu kennen und diese bei der Bauteil- auswahl und Schaltungsplanung zu berücksichtigen.

10.3 Prinzip der Gegenkopplung

Nachdem die vorherigen Kapitel zunächst den inneren Aufbau des Verstärkers und das sich daraus ergebenden Modell sowie die im idealen Modell nicht beschriebenen, realen Effekte thematisierten, soll es in diesem Unterkapitel um die Beschaltung des Operationsverstärkers gehen.

Es sollen im Rahmen dieses Kapitels folgende Kompetenzen erworben werden:

Lernziele: Operationsverstärker

Die Studierenden können

- verschiedene Operationsverstärkerschaltungen und mögliche Einsatzgebiete nennen.
- die Funktion von vorliegenden Operationsverstärkerschaltungen bestimmen und mithilfe der Kirchhoff'schen Gesetze die Verstärkung berechnen.
- wichtige Eigenschaften von Operationsverstärkerschaltungen benennen.

Dazu soll ein Problem dargestellt werden, für dessen Lösung ein Operationsverstärker verwendet werden soll. Anhand dieses Problems soll die Verwendung von Operationsverstärkern Schritt für Schritt motiviert werden.

Beispiel 10.1: Teil 1: Entwicklung einer Verstärkerschaltung für Musiksignale

Bei der Entwicklung von Hi-Fi-Geräten müssen Verstärker an die Last (also den Lautsprecher) angepasst werden. Dazu wird ein Leistungsverstärker (d.h. eine Endstufe) benötigt. Eine solche Endstufe, die geeignet ist, das Signal eines Handys so zu verstärken, dass ein Lautsprecher damit betrieben werden kann soll hier aufgebaut werden. Ein vereinfachtes Ersatzschaltbild des Lautsprechers ist durch eine Induktivität mit einem in Reihe geschalteten Widerstand gegeben (siehe Abbildung 10.7). Das Eingangsspannungsniveau ist 1 V und es soll ein 4Ω Lautsprecher betrieben werden (4Ω bedeutet, dass der Lautsprecher bei 1 kHz eine Impedanz von 4Ω aufweist). Wie groß muss die Spannung am Ausgang des Verstärkers sein, damit der Lautsprecher bei 1 kHz 25 W aufnimmt. Wie kann hier vorgegangen werden, wenn eine Operationsverstärkerschaltung für die Lösung genutzt werden soll?

Lösung

Zunächst muss dazu die Spannung berechnet werden, die der Verstärker ausgeben soll.

$$U_A = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{25 \text{ W} \cdot 4 \Omega} = 10 \text{ V} \quad (10.1)$$

Wie kann nun mithilfe eines Operationsverstärkers der mit einem „?“ gekennzeichneten Teil der Schaltung ersetzt werden, um eine notwendige Verstärkung von 10 zu erreichen (siehe Abbildung 10.7).

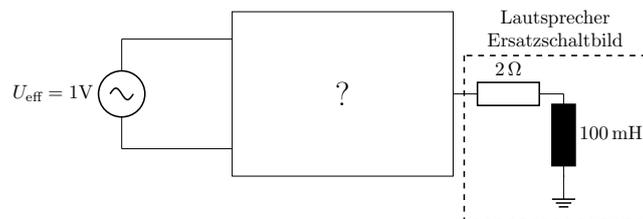


Abbildung 10.7: Schaltung des Beispielproblems mit einer Signalquelle auf der Eingangsseite und einer komplexen Last auf der Ausgangsseite. Es wird für den mit einem Fragezeichen gekennzeichneten Teil der Schaltung zunächst der Verstärkungsfaktor $V = \frac{U_A}{U_E}$ gesucht.

Wie aus vorherigen Kapiteln bekannt ist, besitzen Operationsverstärker einen invertierenden und einen nicht-invertierenden Eingang. Existiert zwischen diesen beiden Eingängen eine Spannungsdifferenz, so verstärkt der Operationsverstärker diese Differenz um ein Vielfaches, bis die Spannung die maximale Ausgangsspannung des Operationsverstärkers erreicht (siehe A in Abbildung 10.8). Die Slew-Rate (zu deutsch: Anstiegsrate) gibt an, wie schnell dieser Anstieg geschehen kann. Wird die Ausgangsspannung nicht auf den Eingang zurückgeführt, steigt die Ausgangsspannung, bis das Niveau der Versorgungsspannung erreicht wird. Eine solche Beschaltung des Verstärkers wird als Komperatorschaltung bezeichnet.

Dieses Verhalten ist für die meisten Anwendungen bei denen der Eingangsspannungssignal mit geringer Amplitude verstärkt werden soll, nicht erwünscht. Stattdessen werden Operationsverstärker meistens in der sogenannten Gegenkopplung (B) betrieben, bei der der Ausgang auf den invertierenden Eingang zurückgeführt wird. Der in (B) eingezeichnete Schalter sei zunächst geöffnet und der Operationsverstärker werde nicht mit Spannung versorgt. Zum Zeitpunkt 0 s wird der Schalter geschlossen und die Versorgungsspannung des Verstärkers eingeschaltet, wodurch die Rückführung des Ausgangssignals U_A aktiv wird (C). Durch die Rückkopplung des Ausgangssignal wird so erreicht, dass die Spannung am invertierenden Eingang auf das Spannungsniveau der Ausgangsspannung angeglichen wird. Die in (C) dargestellte Verstärkerschaltung hat die Verstärkung 1 und wird als Impedanzwandler bezeichnet, da der Verstärker in dieser Schaltungsart aufgrund seiner hohen Eingangsimpedanz verwendet werden kann, um eine Schaltung mit hochohmigem Eingang zu realisieren (dies ist beispielsweise bei Messschaltungen für Spannungsmessungen notwendig). Für die Lösung des Anwendungsproblems ist diese Schaltung allerdings noch nicht geeignet, da eine Verstärkung von 5 gefordert ist. Um diese zu erreichen werden in die Verstärkerschaltung nun zusätzlich Widerstände eingebaut (wie in (D) dargestellt ist)⁴.

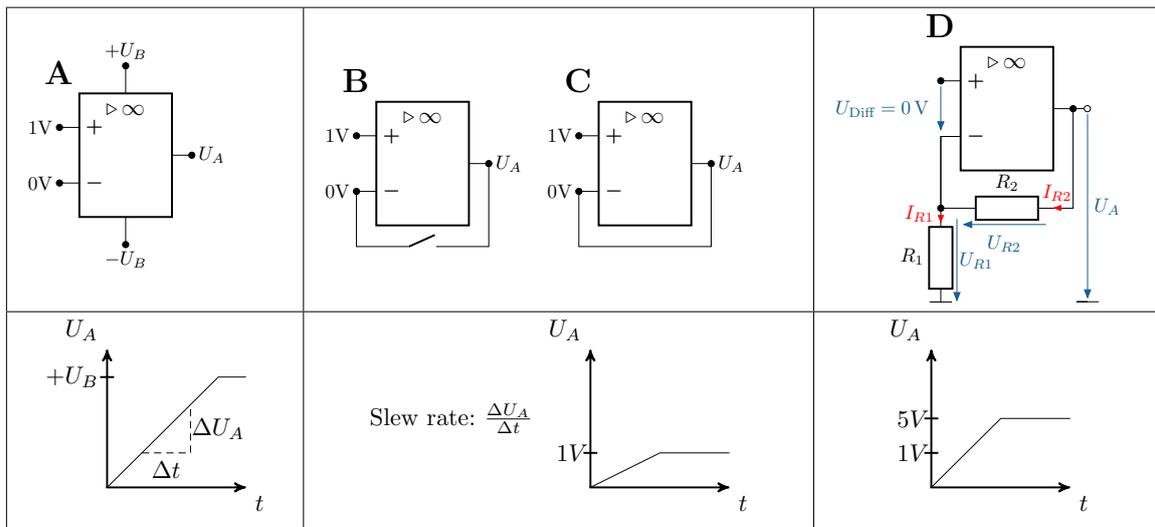


Abbildung 10.8: Verschalung eines Verstärkers als Komperator (A), Impedanzwandler (C) und nicht-invertierender Verstärker (D)

Beispiel 10.2: Teil 2: Entwicklung einer Verstärkerschaltung für Musiksignale

Im letzten Schritt muss ermittelt werden, wie die Widerstände in (D) gewählt werden müssen, damit sich eine Verstärkung von 5 ergibt. Dazu müssen zunächst die Maschengleichungen aufgestellt werden. Eine wichtige Annahme zur Aufstellung dieser Maschengleichung ist, dass

⁴Es lässt sich feststellen, dass sich für $R_2 = 0$ und $R_1 = \infty$ wieder die Schaltung des Impedanzwandlers ergibt. Der Impedanzwandler ist also ein Spezialfall des nicht-invertierenden Verstärkers.

davon ausgegangen wird, dass der Verstärker durch die Rückkopplung des Ausgangssignal die beiden Eingangssignale angleicht. Hier darf also geschrieben werden „Annahme: $U_{\text{dif}} = 0 \text{ V}$ “. Somit ergibt sich für den invertierenden Eingang $U_{E-} = 1 \text{ V}$. Da weiterhin davon ausgegangen wird, dass kein Strom in die Eingänge hineinfließt gilt $I_{R1} = I_{R2}$. Die Maschengleichung lautet auf Grundlage dieser Annahmen

$$U_A = U_{R1} + U_{R2} = U_E + I_{R2} \cdot R_2 = U_E + \frac{U_E}{R_1} \cdot R_2 \quad (10.2)$$

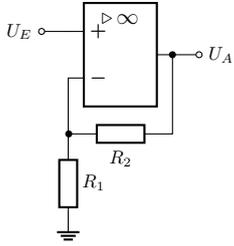
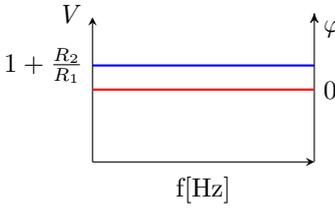
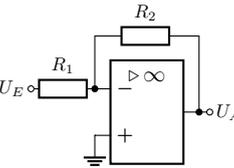
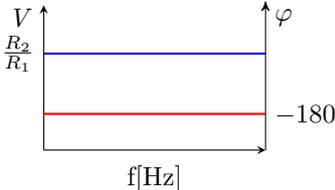
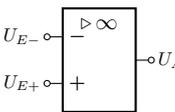
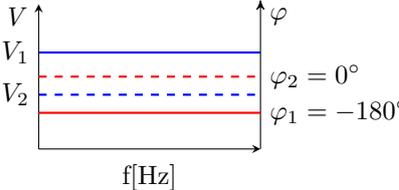
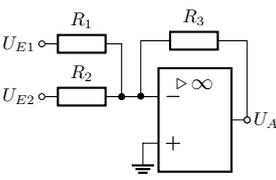
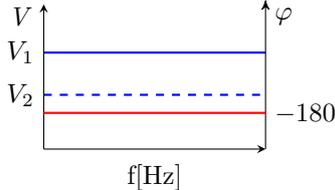
Dadurch ergibt sich das Ein-Ausgangsverhalten im zeitbereich zu folgendem Ausdruck.

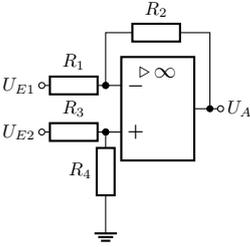
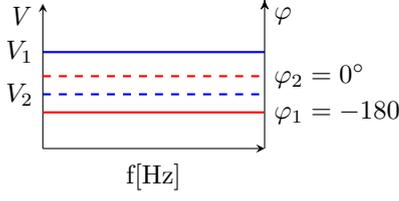
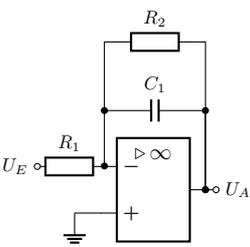
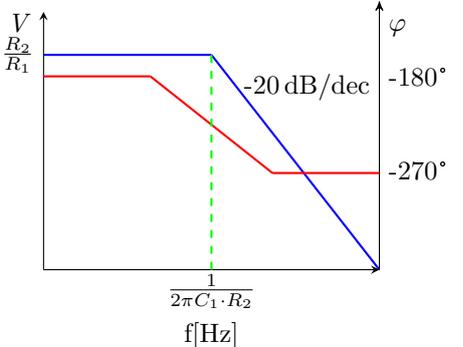
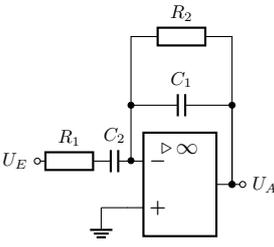
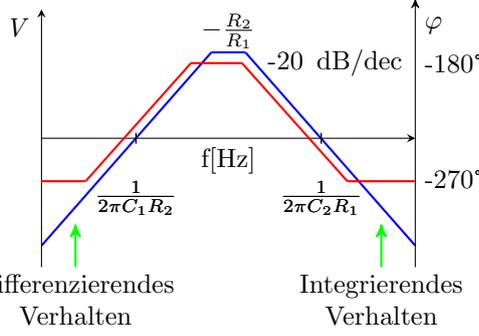
$$\frac{U_A}{U_E} = \underbrace{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)}_V \quad (10.3)$$

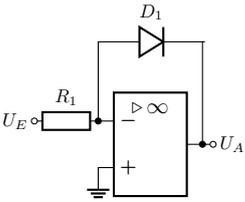
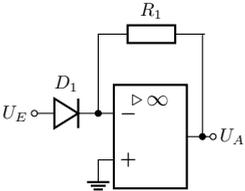
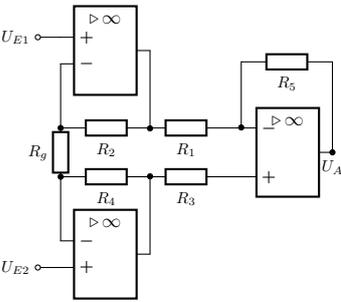
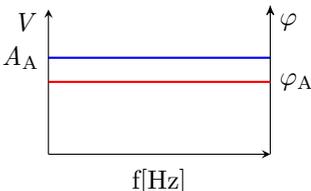
Wird diese Gleichung nach R_2/R_1 gelöst, ergibt sich das Verhältnis der Widerstände für das oben beschriebene Problem zu $R_2/R_1 = 9$. Die Widerstände sollten hier nicht zu groß gewählt werden, da dann der Ausgleichsstrom zwischen Ausgang und Eingang zu klein werden könnte. Das kann zu einem starken Rauschen am Verstärkerausgang führen. Übliche Widerstandswerte sind in der Regel den Beispielschaltungen des Datenblattes eines Operationsverstärkers zu entnehmen. In diesem Fall könnte z.B. $R_2 = 9 \text{ k}\Omega$ und $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ gewählt werden.

Ähnlich wie für die oben dargestellte Schaltung lassen sich auch für alle weiteren Operationsverstärkerschaltungen Übertragungsfunktionen herleiten. Das soll hier allerdings nicht gezeigt werden. Weitere Übertragungsfunktionen für einige ausgewählte Operationsverstärkergrundschaltungen können Tabelle 10.2 entnommen werden. In dieser Tabelle sind die die Schaltungen, die Bodediagramme mit Phasengang (rot) und Amplitudengang (blau) und die Übertragungsfunktionen angegeben. Nachdem nun die Beschaltung von Verstärkern vorgestellt wurde, soll im Folgenden Kapitel nun noch eine wichtige Eigenschaft von Verstärkerschaltungen thematisiert werden, die sich aus den genutzten Verstärkerbausteinen und der äußeren Verschaltung ergibt: Die Stabilität der Verstärkerschaltung.

Tabelle 10.2: Ausgewählte Operationsverstärker-Grundsaltungen

Schaltung	Frequenzgang und Gleichung	Erläuterung und Eigenschaften
	 $U_A = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_E$	<p>Nicht-invertierender Verstärker</p> <ul style="list-style-type: none"> • Phasengleiches Ausgangssignal • Sehr hochohmiger Eingangswiderstand • Niederohmiger Ausgangswiderstand • Anwendungen: z.B. Impedanzwandler
	 $U_A = \frac{R_2}{R_1} U_E$	<p>Invertierender Verstärker</p> <ul style="list-style-type: none"> • -180° Phasenverschiebung zwischen Ein- zu Ausgang • R₁ bestimmt den Eingangswiderstand • Niederohmiger Ausgangswiderstand • Anwendungen: z.B. Aktiver Spannungsteiler zum Messen hoher Spannungen, wenn R₁ > R₂
	 $V_1 : U_{E+} > U_{E-} \Rightarrow U_A \approx +U_B$ $V_2 : U_{E+} < U_{E-} \Rightarrow U_A \approx -U_B$	<p>Komparator Einsatz in Zweipunktreglern und Analog-Digital-Wandlern</p>
	 $U_A = \underbrace{\frac{R_3}{R_1}}_{V_1} \cdot U_{E1} + \underbrace{\frac{R_3}{R_2}}_{V_2} \cdot U_{E2}$	<p>Summierer Der Summierer basiert auf dem invertierenden Verstärker und findet Verwendung in Analogrechnern und beim Mischen von Spannungssignalen</p>

Schaltung	Frequenzgang und Gleichung	Erläuterung und Eigenschaften
	 $U_A = U_{E2} \cdot \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_1}}_{V_2} \cdot \underbrace{\frac{R_4}{R_3 + R_4}}_{V_1} - U_{E1} \cdot \underbrace{\frac{R_2}{R_1}}_{V_1}$	<p>Subtrahierer Wenn alle Widerstände gleich groß sind, wird die Differenz der Signale U_{E1} und U_{E2} gebildet, weswegen diese Schaltung als Differenzverstärker bezeichnet wird</p>
	 $U_A(t) = -\frac{R_2}{R_1} U_E(t) - \int_0^t \frac{U_E(t)}{R_1 C_1} dt$	<p>Integrierer/Integrator</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nimmt eine Integration des Eingangssignals vor • Wird als aktives Tiefpassfilter verwendet
	 <p>Differenzierendes Verhalten Integrierendes Verhalten</p> $U_A = -\frac{R_2}{R_1} U_E(t) - \int_0^t \frac{1}{R_1 C_1} U_E(t) dt - R_2 C_2 \frac{dU_E(t)}{dt}$	<p>Differenzierer</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nimmt eine Integration des Eingangssignals vor • Wird als aktives Hochpassfilter verwendet (zeigt in der Realität meist Bandpassverhalten, wie hier dargestellt)

Schaltung	Frequenzgang und Gleichung	Erläuterung und Eigenschaften
	$U_A = -U_T \cdot \ln\left(\frac{U_E}{R_1 \cdot I_S}\right)$ $U_T = \frac{k_B \cdot T}{e}$ <p> e = Elementarladung k_B = Boltzmannkonstante I_S = Sperrstrom der Diode </p>	<p>Logarithmierer Bildet den natürlichen Logarithmus des Eingangssignals</p>
	$U_A = -R_1 \cdot I_S \cdot e^{\frac{U_E}{U_T}}$	<p>Potenzierer Besitzt einen e-funktionalen Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsspannung</p>
	 <p> a_i : Amplitude Eingangsspannung i φ_i : Phase Eingangsspannung i </p> $A_A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ $\tan(\varphi_A) = \frac{a_1 \sin(\varphi_1) + a_2 \sin(\varphi_2)}{a_1 \cos(\varphi_1) + a_2 \cos(\varphi_2)}$ <p>Wenn : $R_2 = R_4 = R$</p> $U_A = \left(1 + \frac{2R}{R_g}\right) \cdot \frac{R_3}{R_2} (U_{E2} - U_{E1})$	<p>Instrumentenverstärker Differenzverstärker mit hoher Eingangsimpedanz und hoher Gleichtaktunterdrückung</p>

10.4 Stabilität von Verstärkerschaltungen

Durch die Rückführung des Ausgangssignals auf das Eingangssignal ergibt sich ein Regelkreis. Dieser Regelkreis ist allerdings nicht immer stabil, d.h. die Rückführung führt nicht dazu, dass die Ausgangsgröße sich nur so lange ändert, wie am Eingang auch eine Differenzspannung vorliegt⁵. Dies wird deutlich, wenn das Ausgangssignal auf den nicht-invertierenden anstatt den invertierenden Eingang zurückgeführt wird. Wird nun eine Spannungsdifferenz an den Eingang angelegt und am Ausgang verstärkt ausgegeben, so führt diese Ausgangsspannung zu einer erneuten Erhöhung der Spannungsdifferenz am Eingang. Das System ist also nicht stabil. Ein ähnliches Phänomen kann beobachtet werden, wenn in der Verstärkerschaltung Energiespeicher (Kondensatoren oder Spulen) verwendet werden. Eine solche Schaltung weist immer eine Stabilitätsgrenze auf, die dann erreicht wird, wenn das auf den invertierenden Eingang rückgekoppelte Signal, eine Phasenverschiebung von 180° aufweist. In diesem Fall wird die Gegenkopplung zur Mitkopplung und die Schaltung wird instabil. Das ist aber nicht die einzige Möglichkeit, wie eine Schaltung instabil werden kann. Auch kann die Schaltung ins Schwingen geraten, wenn die Energiespeicher nicht richtig dimensioniert werden. Aus diesem Grund sind Stabilitätsanalysen der entworfenen Schaltungen unerlässlich.

Es sollen im Rahmen dieses Kapitels folgende Kompetenzen erworben werden:

Lernziele: Operationsverstärker

Die Studierenden können

- Stabilitätsanalysen durchführen und Ergebnisse der Analyse beurteilen.
- Bauteile in OPV-Schaltungen dem Stabilitätskriterien entsprechend dimensionieren.

Einige der Stabilitätskriterien, die zur Stabilitätsbewertung herangezogen werden sind im Folgenden beschrieben. Die Bewertung der Stabilität von Operationsverstärkerschaltungen ist eine wichtige Fähigkeit für Studierende der Elektrotechnik, egal ob die Schaltungen von Grund auf entworfen oder Fehler in bestehenden Schaltungen behoben werden sollen. Diese Bewertung stellt sicher, dass Operationsverstärkerschaltungen zuverlässig und effektiv arbeiten, was für ihre Integration in verschiedene elektronische Systeme unerlässlich ist. Im Folgenden wird erläutert, welche Methoden zur Bewertung der Stabilität verwendet werden.

Frequenzgangsanalyse (experimentell/simulativ)

Eine grundlegende Technik ist die Frequenzganganalyse. Bei diesem Verfahren wird untersucht, wie sich die Verstärkung und die Phase einer Operationsverstärkerschaltung ändern, wenn die Frequenz des Eingangssignals variiert. Werkzeuge wie Bodediagramme werden häufig zur Visualisierung dieser Reaktion eingesetzt und helfen bei der Identifizierung potenzieller Stabilitätsprobleme wie Verstärkungsspitzen oder Phasenverschiebungen, die zu Instabilität führen könnten. Ein wichtiges Kriterium bildet hier die Phasenreserve. Die Bestimmung dieser Größe ist ein quantitativer Ansatz zur Stabilitätsbewertung. Sie hilft bei der Messung der Stabilitätsspanne innerhalb eines Rückkopplungssystems, indem sie die Phasendifferenz zwischen der tatsächlichen Phasenverschiebung bei der Durchtrittsfrequenz (also 0 dB) und 180° betrachtet. Dieser Punkt wird als „kritischer Punkt“ bezeichnet, da bei einer Phasenverschiebung über 180° und einer Verstärkung über 0 dB, die Rückkopplung zur Mitkopplung wird. Wenn die Phasendifferenz einen bestimmten Schwellenwert überschreitet, in der Regel etwa 45° , wird davon ausgegangen, dass das System weit genug von

⁵Dies ist eine Vereinfachung. In der Regelungstechnik wird zwischen Lyapunov-Stabilität und BIBO-Stabilität unterschieden (siehe hierzu z.B. „Regelungstechnik“ von Otto Föllinger)

der Stabilitätsgrenze entfernt ist. Diese Analyse findet normalerweise graphisch auf Grundlage des Bodediagramms statt.

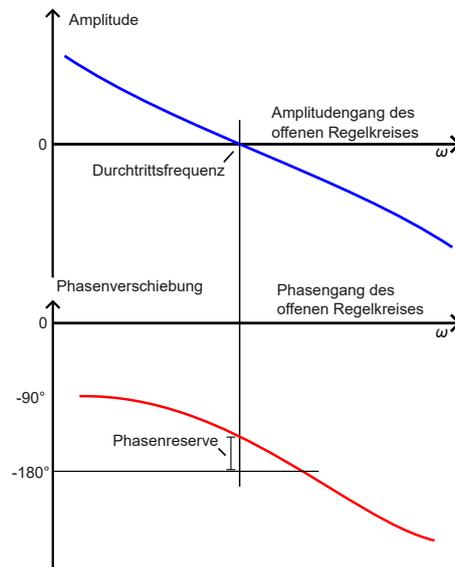


Abbildung 10.9: Bestimmung der Phasenreserve auf Grundlage des Bodediagramms

Analyse der Übertragungsfunktion (analytisch)

Liegt die Übertragungsfunktion der Operationsverstärkerschaltung vor, kann auch direkt eine Stabilitätsanalyse durchgeführt werden. Dazu werden die Pole der Übertragungsfunktion (z.B. im Laplacebereich) analysiert. Liegen diese in der linken s-Halbebene (also sind alle Pole negativ), weißt die Schaltung ein stabiles Übertragungsverhalten auf. Bei diesem Ansatz sowie bei der Frequenzanalyse (sofern das Bodediagramm nicht experimentell ermittelt wurde) muss beachtet werden, dass die Übertragungsfunktion meist nur für einen bestimmten Frequenzbereich gültig ist, da z.B. die Dynamik des Operationsverstärkers bei diesen Methoden in der Regel nicht berücksichtigt wird.

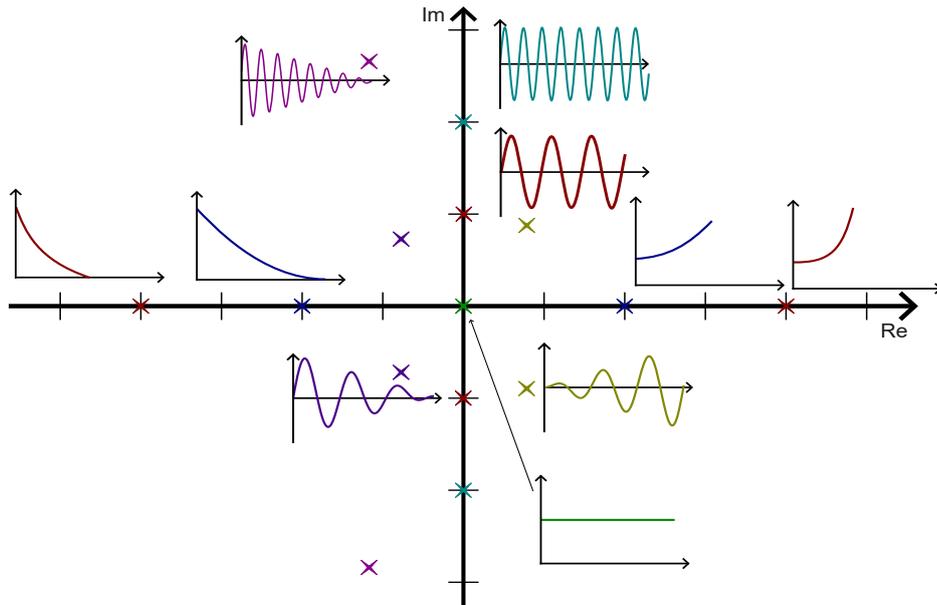


Abbildung 10.10: Systemantworten bei verschiedenen Polagen

Analyse des Einschwingverhaltens (experimentell/simulativ)

Eine weitere wichtige Methode ist die Analyse des Einschwingverhaltens. Bei dieser Methode wird ein Spannungssprung auf die Verstärkerschaltung gegeben um zu untersuchen, wie eine Operationsverstärkerschaltung auf plötzliche Änderungen der Eingangssignale reagiert. Durch Beobachtung der Reaktion des Schaltkreises kann so eine Aussage getroffen werden, ob das System zur Instabilität neigt. In der Realität ist dieser Test sehr vorsichtig durchzuführen, da bei einer instabilen Schaltung schnell Bauteile zerstört werden können. Aus diesem Grund wird ein solcher Test heutzutage häufig rein simulativ durchgeführt. Als Faustregel lässt sich hier sagen: Wenn die Schaltung nach einer Anregung durch einen Einheitssprung gegen einen festen Wert strebt und keine Dauerschwingung ausführt, kann das Einschwingverhalten als stabil angenommen werden.

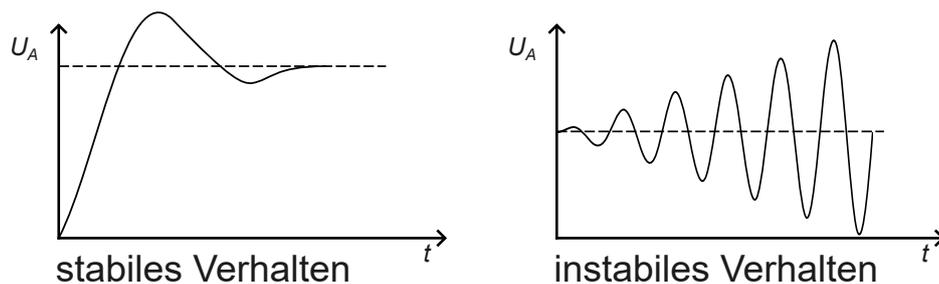


Abbildung 10.11: Stabiles und instabiles Einschwingverhalten

Wie dargestellt wurde, ist die Stabilitätsanalyse ein komplexes Thema und soll hier nur angeschnitten werden. An dieser Stelle wird kein Wert auf Vollständigkeit gelegt. Die genannten Analysemethoden sind Teil der Regelungstechnik und in der einschlägigen Literatur nachzulesen.

Merke:

Durch die Rückführung des Ausgangssignal auf den Eingang ergibt sich ein Regelkreis. Die Stabilität dieses Regelkreises muss simulativ, experimentell oder analytisch überprüft werden.

10.5 Operationsverstärker als Analogrechner

Neben dem Einsatz von Operationsverstärkern in Messverstärkern, werden OPVs auch in Analogrechnern eingesetzt. Das mag in der Zeit hochperformanter Prozessoren nicht mehr relevant wirken, hat aber durchaus Vorteile. So kann die Berechnungszeit mithilfe von Operationsverstärkern deutlich reduziert werden. Das macht vor allem in Anwendungen Sinn, in denen nur eine Rechenoperation (Multiplikation, Addition o.ä.) durchgeführt werden soll, aber so gut wie keine Latenzen auftreten dürfen. Dies ist heutzutage noch häufig in der Regelungstechnik der Fall.

Es sollen im Rahmen dieses Kapitels folgende Kompetenzen erworben werden:

Lernziele: Operationsverstärker

Die Studierenden können

- geeignete Operationsverstärkerschaltungen für eine Problemlösung angeben.
- Widerstandsverhältnisse berechnen.

Im Folgenden sollen ein Beispiel vorgestellt werden, das zeigen soll, wie mithilfe der in der Tabelle gegebenen Operationsverstärkergrundschaltungen ein Analogrechner aufgebaut werden kann.

Beispiel 10.3: Beispiel Analogrechner

Es soll eine Schaltung entworfen werden, die folgende Funktion umsetzt:

$$U_A = \int U_{E1} dt + x \cdot U_{E1} - 2 \cdot U_{E2} \quad (10.4)$$

Lösung

Zunächst muss die Gleichung in zwei Teilprobleme zerlegt werden, die mithilfe von Operationsverstärkerschaltungen gelöst werden können. Das erste Teilproblem bildet die Integration des Eingangssignals U_{E1} . Dazu soll zunächst eine Integratorschaltung verwendet werden. Das zweite Teilproblem bildet die Addition der Signale. Dafür kann ein Summierer verwendet werden. Durch eine Kombination von einer Integratorschaltung und einem Summierer ist also das gewünschte Verhalten zu erreichen. Ist es mit dieser Schaltung möglich $x=0$ zu wählen?

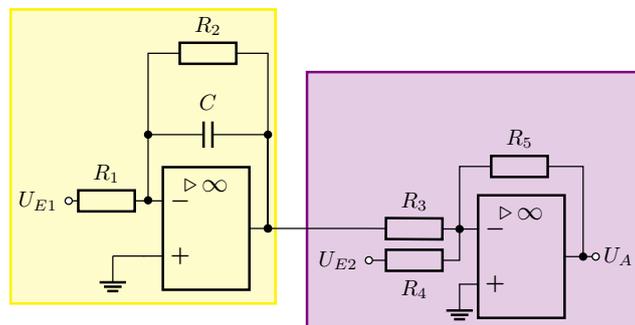


Abbildung 10.12: Schaltung zur Lösung der Analogrechneraufgabe

$$U_A = \underbrace{\left[-\frac{1}{R_1 \cdot C} \int_0^t U_{E1} dt - \frac{R_2}{R_1} \cdot U_{E1} \right]}_{\text{Formel des Integrators}} \cdot \underbrace{\left(-\frac{R_5}{R_3} \right)}_{\text{Formel des Summierers}} - \frac{R_5}{R_4} \cdot U_{E2} \quad (10.5)$$

Dies kann nun wie folgt umgeformt werden

$$U_A = \underbrace{\frac{R_5}{R_1 \cdot R_3 \cdot C}}_{\stackrel{!}{=1}} \int_0^t U_{E1} dt + \underbrace{\frac{R_2 R_5}{R_1 R_3}}_{\stackrel{!}{=x}} U_{E1} - \underbrace{\frac{R_5}{R_4}}_{\stackrel{!}{=2}} \cdot U_{E2} \quad (10.6)$$

Wie der Formel zu entnehmen ist, müssen nun die Bauteilwerte nur noch so gewählt werden, dass sich die richtigen Vorfaktoren ergeben. Eine Wahl von $x=0$ ist nur möglich, wenn der

Widerstand R_2 weggelassen wird. In diesem Fall ergibt sich ein „idealer“, der in der Realität so allerdings in der Regel nicht aufgebaut wird.

Modul 11

Elektrische Maschinen

11.1 Klassifizierung elektrischer Maschinen

Elektrische Maschinen ist eine andere Bezeichnung für elektromagnetische Energiewandler und beschreibt zum einen den Transformator als ruhende elektrische Maschine und zum anderen Elektromotoren und Generatoren. Elektromotoren treiben viele alltägliche Geräte wie Haushaltsgeräte und Elektrofahrzeuge an, während Generatoren und Transformatoren die Erzeugung und Verteilung von elektrischer Energie sicherstellen.

Dieses Kapitel bietet eine Einführung in die grundlegenden Konzepte und Funktionsweisen elektrischer Maschinen. Zunächst werden die verschiedenen Typen elektrischer Maschinen vorgestellt, einschließlich ihrer Prinzipien der Energieumwandlung und ihrer Hauptkomponenten. Es folgt eine detaillierte Betrachtung der Funktionsweise von Elektromotoren und Generatoren, der Relevanz von Transformatoren für die Energieübertragung sowie der Einfluss neuer Technologien auf die Effizienz und Leistung elektrischer Maschinen.

Lernziele: Elektrische Maschinen

Die Studierenden

- kennen die verschiedenen elektrischen Maschinen.
- können grundlegende Aufgabenstellung im Themenbereich der elektrischen Maschinen lösen.

Elektrische Maschinen sind Energieumwandler. Es wird vornehmlich zwischen Transformatoren und Motoren bzw. Generatoren unterschieden. Transformatoren wandeln elektrische Energie in eine andere Form von elektrischer Energie um, indem sie ein Spannungsniveau auf ein anderes übertragen. Motoren und Generatoren hingegen wandeln elektrische Energie in mechanische Energie um und umgekehrt. Motoren konvertieren elektrische Energie in mechanische Energie, während Generatoren mechanische Energie in elektrische Energie umwandeln. Da der Umwandlungsprozess umkehrbar ist, können Motoren auch als Generatoren und umgekehrt eingesetzt werden. Eine weitere Klassifizierung bei Motoren bzw. Generatoren findet je nach betrieben Strom in Gleichstrommaschinen und Wechselstrommaschine statt. Die Wechselstrommaschinen werden des Weiteren in Synchron- und Asynchronmaschine gegliedert.

Die Funktionsweisen aller elektrischen Maschinen basieren auf den in Modul 6 besprochenen elektro-

magnetischen Prinzipien der Induktion und der Lorentzkraft. Während der Transformator rein auf dem Prinzip der Induktion beruht, nutzt der Motor bzw. Generator je nach Wandlungsprozess unterschiedliche elektromagnetische Prinzipien. In der Funktion als Generator basiert er auf Induktion, um elektrische Energie durch sich ändernde Magnetfelder zu erzeugen. Das Prinzip der Lorentzkraft macht er sich als Motor zu nutze.

11.2 Der Transformator

Der Transformator ist eine ruhende elektrische Maschine und dient der Energiewandlung von elektrischer Energie über den magnetischen Kreis zurück in elektrische Energie, wobei insbesondere die Spannungshöhe gewandelt wird. Transformatoren gibt es in verschiedenen Ausführungen und Leistungsklassen von wenigen Watt (Abbildung 11.2) bis in den hohen Megawattbereich (Abbildung 11.1).

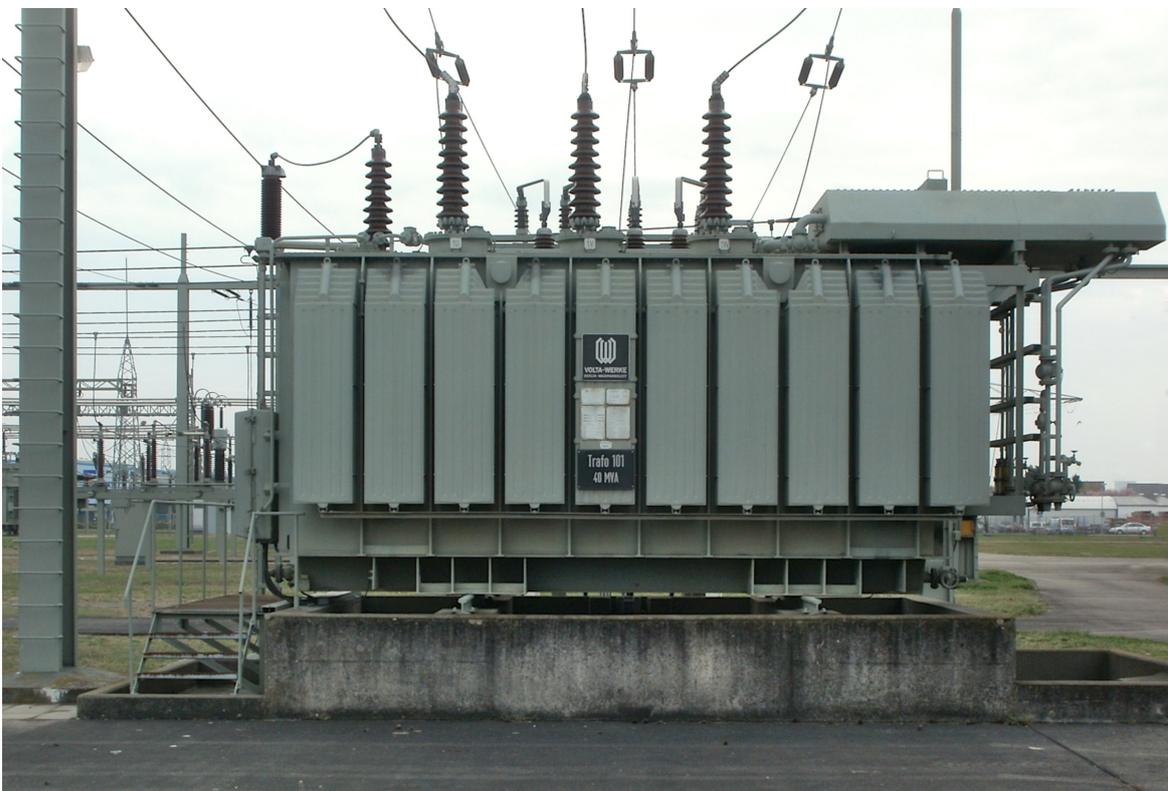


Abbildung 11.1: **Ein 40 MVA Leistungstransformator.** Aufgenommen im Umspannwerk Altlußheim. (Quelle: Wikimedia, Lizenz CC0)

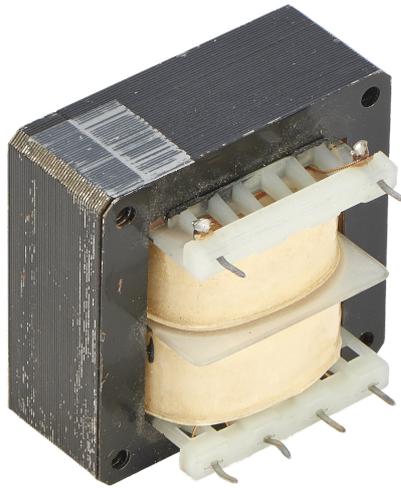


Abbildung 11.2: Fotografie eines Kleintransformators.

In der öffentlichen Energieversorgung wird die von Kraftwerken erzeugte Energie auf eine höhere Spannung transformiert, um sie über weite Strecken transportieren zu können. Die Übertragungsverluste sinken mit höherer Spannung und damit bei gleicher Leistung sinkendem Strom quadratisch (Gleichung 11.1 im Dreiphasenwechselstrom).

$$P_v = 3 \cdot R_L \cdot I_L^2 \quad (11.1)$$

Die übertragene Leistung im Dreiphasenwechselstrom beträgt:

$$\underline{S}_N = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_N \cdot \underline{I}_L^* \quad (11.2)$$

Die Verluste sind damit proportional zu $\frac{1}{\underline{U}_N^2}$

Ein Transformator macht dadurch erst eine flächendeckende Energieversorgung möglich, da Kraftwerke auch verbraucherfern positioniert werden können.

In Energieversorgungsnetzen (siehe Abbildung 11.3) gibt es mehrere Spannungsebenen. Die Höchstspannungsebene, die in Europa überwiegend 380 kV beträgt, dient als Übertragungsnetz zum Transport elektrischer Leistung über weitere Strecken, also mehrere hundert Kilometer auch über Ländergrenzen hinweg. Große Kraftwerke sind dort direkt angekoppelt. Die Hochspannungsebene (110 kV oder 220 kV) nennt sich Verteilnetz und dient der Ankopplung von Städten und großen Industrien. Die Mittelspannungsebene (5 – 35 kV) sorgt für die Ankopplung der Ortsnetztransformatoren zur Versorgung von einzelnen Straßenzügen. Während die höheren Spannungsebenen normalerweise mit Freileitungen ausgeführt sind, ist das Mittelspannungsnetz überwiegend mit Erdkabeln realisiert. Im ländlichen Bereich werden aber auch hier Freileitungen eingesetzt.

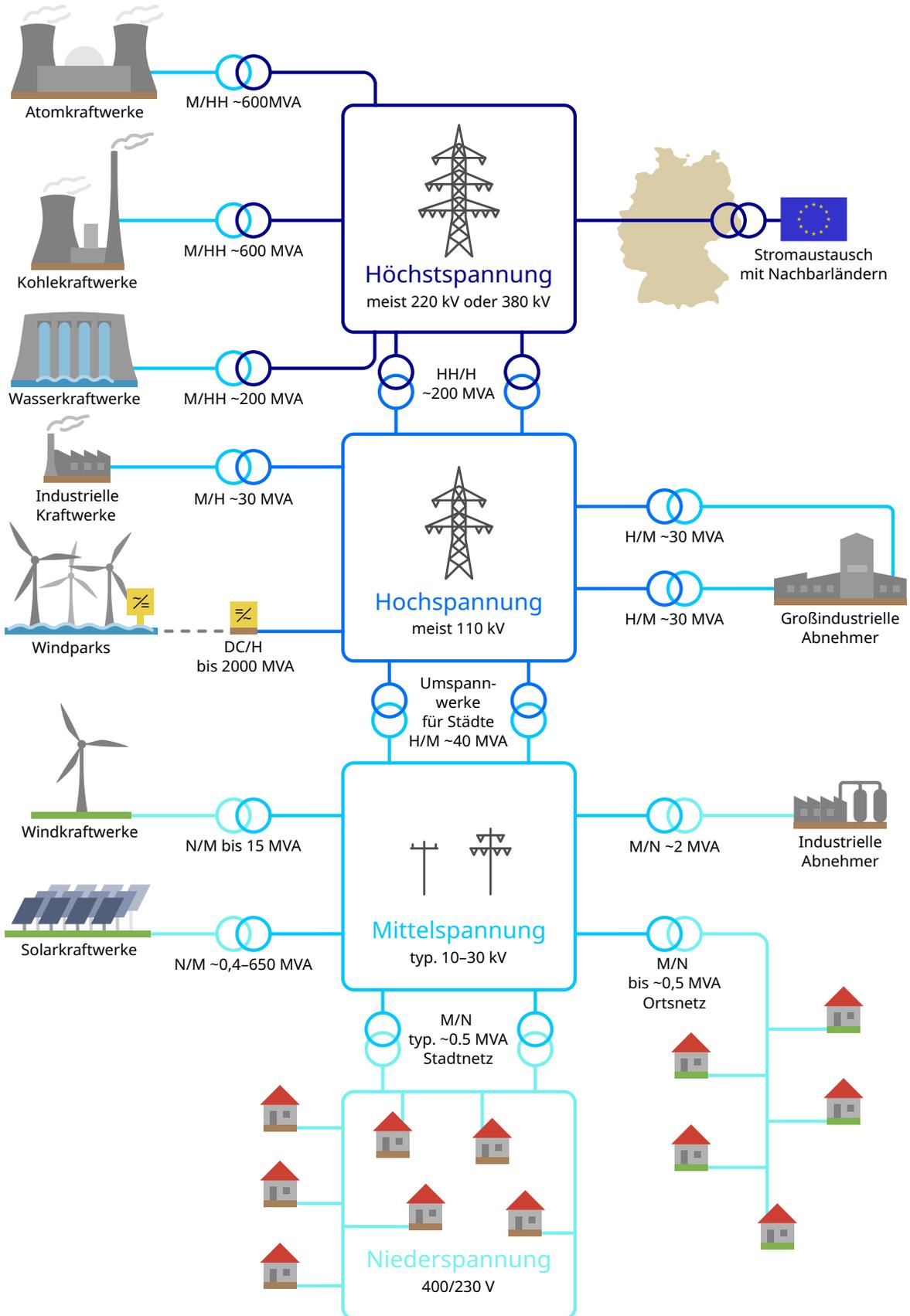


Abbildung 11.3: Struktur der öffentlichen Stromversorgung.

Das Stromnetz ist in mehrere Spannungsebenen unterteilt, die den Transport und die Verteilung der Energie ermöglichen.

11.2.1 Prinzip des Transformators

Um das Prinzip des Transformators zu erörtern, starten wir mit einem vollständig verlustfreien, idealen Transformator. An der Primärspule wird eine sinusförmige (eigentlich Kosinusförmig, was aber die gleiche Form ist und nur einer Phasenverschiebung von 90° entspricht) Spannung \underline{U}_1 angelegt. Der zeitliche Verlauf von \underline{U}_1 entspricht u in Gleichung 11.3.

$$u = \hat{U} \cdot \cos(\omega t) \quad (11.3)$$

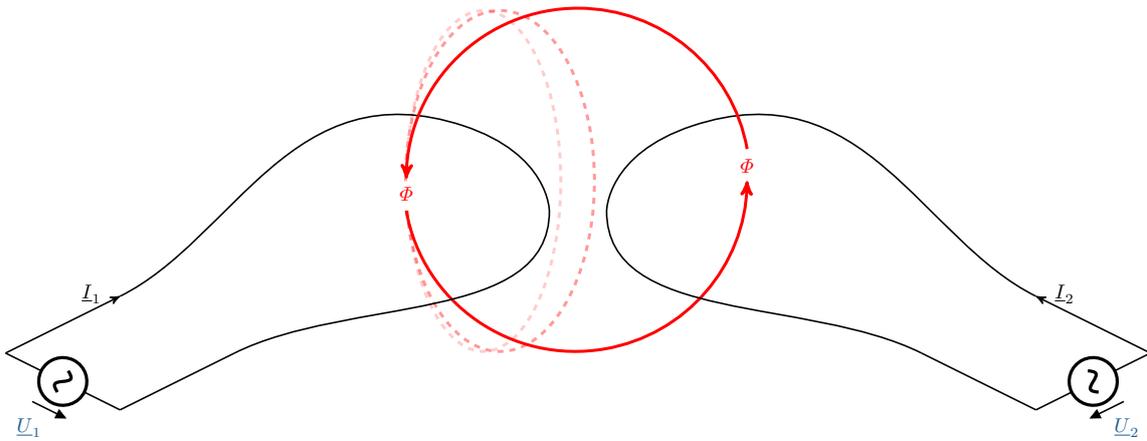


Abbildung 11.4: **Prinzip der magnetische Kopplung eines Transformators.** Die Spannung \underline{U}_1 der linken Leiterschleife erzeugt einen magnetischen Fluss Φ , welcher in der rechten Leiterschleife die Spannung \underline{U}_2 induziert.

Diese Spannung bewirkt entsprechend der Umkehrung des Induktionsgesetzes (Gleichung 11.4) einen wechselnden magnetischen Fluss.

$$u = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (11.4)$$

Die Form des magnetischen Flusses ist bei sinusförmiger Spannungsform ebenfalls sinusförmig, da das Integral eines Kosinus der Sinus ist. Der Effektivwert des magnetischen Flusses kann daher durch Gleichung 11.5 dargestellt werden, indem das Induktionsgesetz nach Φ aufgelöst wird und der Effektivwert gebildet wird. Der Sinus und damit die zeitliche Abhängigkeit fällt dadurch weg.

$$\Phi = \frac{\sqrt{2} \cdot \underline{U}_1}{2\pi \cdot N_1 \cdot f} \quad (11.5)$$

Die Flussrichtung des Magnetfelds bewegt sich stets gemäß der „rechten Handregel“ (siehe Modul 4), in diesem Beispiel gegen den Uhrzeigersinn. Der so erzeugte magnetische Fluss induziert wiederum an der Sekundärspule des Transformators, die optimalerweise mit dem gleichen Fluss Φ durchdrungen wird, eine Spannung \underline{U}_2 , die sich auch nach dem Induktionsgesetz (Gleichung 11.4) berechnen lässt.

$$u_2 = -N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (11.4)$$

Die angelegte Primärspannung \underline{U}_1 und die Sekundärspannung \underline{U}_2 können in ein Verhältnis gesetzt werden (Gleichung 11.6). Die Änderungsrate des magnetischen Flusses Φ kürzt sich dadurch heraus, es bleiben nur noch die Windungszahlen der Primärseite N_1 und der Sekundärseite N_2 übrig. Dieses Verhältnis wird Übersetzungsverhältnis \ddot{u} (Gleichung 11.6) genannt. Ist das Übersetzungsverhältnis \ddot{u} größer als Eins wird die Spannung herabgesetzt (Spannungsabwärtstransformator). Ist das Übersetzungsverhältnis \ddot{u} kleiner als Eins, wird die Spannung erhöht (Spannungsaufwärtstransformator). Da der Transformator in beide Richtungen eingesetzt werden kann, wird in den technischen Daten immer ein Übersetzungsverhältnis größer oder gleich Eins angegeben.

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{-N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt}}{-N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u} \quad (11.6)$$

$\ddot{u} < 1 \rightarrow$ Spannung hoch

$\ddot{u} > 1 \rightarrow$ Spannung runter

Angegeben wird immer $\ddot{u} > 1$

Bei einem realen Transformator durchdringt nicht der komplette magnetische Fluss, der durch die Primärwicklung erzeugt wird, auch die Sekundärseite (in Abbildung 11.4 rot gestrichelt dargestellt). Diese Verluste werden Streufluss genannt und werden im Ersatzschaltbild durch die Streuinduktivität dargestellt. Daher ist die reale Sekundärspannung kleiner als die hier berechnete ideale Sekundärspannung.

11.2.2 Aufbau des Transformators

Vereinfacht dargestellt besteht der Transformator aus zwei Spulen, die mittels eines magnetisch leitenden Kerns miteinander gekoppelt werden (siehe Abbildung 11.5). Der Kern besteht aus einem ferromagnetischen Material. Durch seine hohe Permeabilität hat das ferromagnetische Material die Fähigkeit, den magnetischen Fluss möglichst effizient zwischen zwei Spulen zu leiten (siehe Modul 6). Effekte wie die Hysterese und Wirbelstromverluste stören jedoch den widerstandslosen Fluss. Diese Effekte werden als Eisenverluste bezeichnet.

Die Spulen sind um den magnetischen Leiter gewickelt. Wie oben erwähnt, bestimmen die Windungszahlen das Übersetzungsverhältnis der Spannung (Gleichung 11.6). Sie bestehen aus elektrisch gut leitenden Drähten wie Kupfer. Auch diese weisen in der Realität Widerstandsverluste auf, die auch Kupferverluste genannt werden.

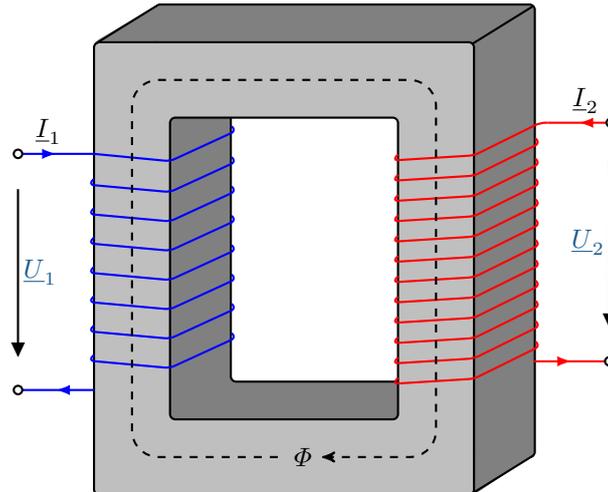


Abbildung 11.5: **Schematischer Aufbau des Transformators.** Zwei Spulen sind mittels eines ferromagnetischen Kerns miteinander gekoppelt. Die Windungszahlen bestimmen dabei das Übersetzungsverhältnis der Spannung.

In dem Schaltbild des idealen Transformators werden die magnetisch gekoppelten Spulen als nebeneinanderstehende, schwarz ausgefüllte Rechtecke dargestellt (siehe Abbildung 11.6). Die zwei Striche zwischen den Spulen weisen darauf hin, dass diese mittels eines durchgehenden magnetisch leitenden Kerns verbunden sind. Die Punkte an den jeweiligen Spulen geben Aufschluss über die Führung der Wicklung. Sie können sich unten oder oben befinden. Liegen sie dabei auf der gleichen Höhe, ist die Phasenlage der beiden Spulen gleich. Liegen diese auf unterschiedlichen Höhen, bedeutet dies einen umgekehrten Wicklungssinn und dadurch eine Phasenverschiebung von 180° .

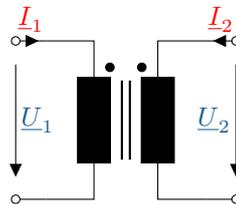


Abbildung 11.6: **Ideales Schaltbild eines Transformators.**

Beispiel 11.1: Idealer dreiphasiger Netztransformator

Ein idealer dreiphasiger Netztrafo hat eine Leistung von $\underline{S}_N = 100 \text{ kVA}$, eine Oberspannung von $\underline{U}_1 = 20 \text{ kV}$ (Dreieck) und eine Unterspannung von $\underline{U}_2 = 400 \text{ V}$ (Dreieck).

- a) Wie groß ist das Übersetzungsverhältnis?

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} \\ &= \frac{20 \text{ kV}}{400 \text{ V}} = 50 \end{aligned}$$

- b) Wie groß sind der Primär- und Sekundärstrom im Nennbetrieb bei einem Leistungsfaktor

$$\cos(\varphi) = 1?$$

$$\cos(\varphi) = 1 \rightarrow |\underline{S}| = P$$

$$P = U \cdot I$$

$$I_1 = \frac{P}{U} = \frac{100 \text{ kW}}{20 \text{ kV}} = 5 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{P}{U} = \frac{100 \text{ kW}}{400 \text{ V}} = 250 \text{ A}$$

11.2.3 Ersatzschaltbild

Zum besseren Verständnis wird das Ersatzschaltbild des realen Transformators (Abbildung 11.7) zunächst funktionsgetreu als galvanisch getrenntes System mit einem Primär- und einem Sekundärstromkreis dargestellt. Im Vergleich zum idealen Transformator ist dieses Ersatzschaltbild um die zuvor beschriebenen Verluste erweitert. Der magnetische Kreis wird mit der Hauptinduktivität L_h und den Streuinduktivitäten $L_{\sigma 1}$ und $L_{\sigma 2}$ in einen elektrischen Kreis transformiert. Die zuvor beschriebenen Kupferverluste in der Primär- und Sekundärspule werden durch die Widerstände R_1 und R_2 repräsentiert. Die Größe \underline{I}_μ steht für den Magnetisierungsstrom und beschreibt jene Komponente des Leerlaufstroms, die erforderlich ist, um den magnetischen Kern des Transformators zu erregen. Die Eisenverluste werden aus Gründen der Vereinfachung in diesem Beispiel außer acht gelassen. Wenn sie berücksichtigt werden sollen, werden die Eisenverluste durch eine Parallelschaltung eines Widerstandes zur Hauptinduktivität dargestellt.

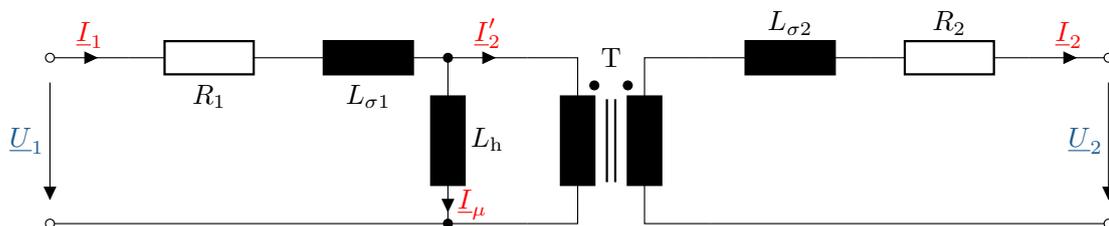


Abbildung 11.7: Ersatzschaltbild eines galvanisch getrennten Transformators.

Anschließend wird in dem T-Ersatzschaltbild des Transformators (Abbildung 11.8) unterstellt, dass keine galvanische Trennung zwischen Primär- und Sekundärseite besteht, obwohl dies in der Realität natürlich der Fall ist. Dieser Schritt ermöglicht die Umrechnung der Größen der Sekundärseite auf die Primärseite und die Anwendung der aus Modul 4 bekannten Rechenregeln. Die Umrechnungsgrößen werden als gestrichelte Größen, in diesem Beispiel als \underline{U}'_2 , \underline{I}'_2 , R'_2 und $L'_{\sigma 2}$, gekennzeichnet.

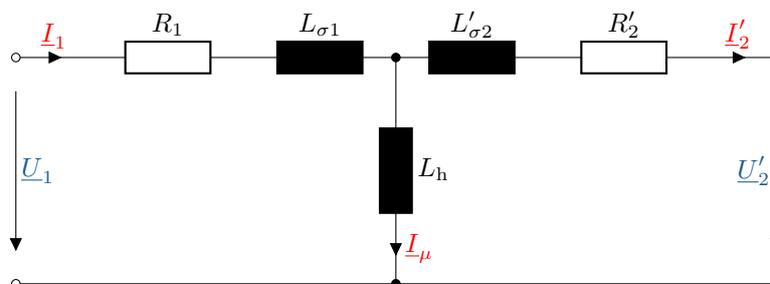


Abbildung 11.8: T-Ersatzschaltbild eines Transformators.

Für die Umrechnung der Spannung auf die Primärseite wird die Spannung \underline{U}'_2 mit dem Übersetzungsverhältnis multipliziert (Gleichung 11.7). Zur Berechnung des eingehenden Stroms \underline{I}_1 wird der Strom \underline{I}_2 mit dem umgekehrten Übersetzungsverhältnis multipliziert und anschließend mit dem Magnetisierungsstrom \underline{I}_μ addiert (Gleichung 11.8).

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_2 = \frac{N_1}{N_2} \cdot \underline{U}_2 \quad (11.7)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_2 + \underline{I}_\mu = \frac{N_2}{N_1} \cdot \underline{I}_2 + \underline{I}_\mu \quad (11.8)$$

Die auftretenden Verluste auf der Sekundärseite $L'_{\sigma 2}$ und R'_2 werden mit dem quadrierten Übersetzungsverhältnis auf die Primärseite umgerechnet (Gleichungen 11.9 und 11.10).

$$L'_{\sigma 2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot L_{\sigma 2} \quad (11.9)$$

$$R'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot R_2 \quad (11.10)$$

Beispiel 11.2: Realer dreiphasiger Netztransformator

Ein realer dreiphasiger Netztrafo ($f = 50 \text{ Hz}$) hat folgende Daten:

- Leistung: $\underline{S}_N = 100 \text{ kVA}$
- Oberspannung $\underline{U}_1 = 20 \text{ kV}$
- Übersetzungsverhältnis: 50
- $L_h = 500 \text{ H} \Rightarrow \underline{Z}_{Lh} = j157,08 \text{ k}\Omega$
- $L_{\sigma 1} = L'_{\sigma 2} = 190 \text{ mH} \Rightarrow \underline{Z}_{L\sigma} = j59,69 \Omega$
- $R_1 = R'_2 = 30 \Omega$

a) Wie groß ist die Leerlaufspannung \underline{U}_2 bei diesem Übersetzungsverhältnis?

$$\begin{aligned} \underline{U}'_2 &= \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{Z}_h}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_{\sigma 1} + R_1} \\ &= 19,992 \text{ kV} \cdot e^{j0,011^\circ} \\ \underline{U}_2 &= 399,85 \text{ V} \cdot e^{j0,011^\circ} \end{aligned}$$

b) Wie groß ist der Leerlaufstrom (auf der Primärseite)?

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_{\sigma 1} + R_1} \\ &= \frac{20 \text{ kV}}{157,139 \text{ k}\Omega \cdot e^{j89,989^\circ}} \\ &= 127,28 \text{ mA} \cdot e^{-j89,989^\circ} \end{aligned}$$

c) Wie groß sind die Leerlaufverluste?

$$\begin{aligned} \underline{S}_v &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ &= 20 \text{ kV} \cdot (127,28 \text{ mA} \cdot e^{-j89,989^\circ})^* \\ &= 2,546 \text{ kVA} \cdot e^{j89,989^\circ} \end{aligned}$$

11.3 Gleichstrommaschine

Gleichstrommaschinen sind Elektromaschinen, die mit Gleichstrom betrieben werden und sowohl als Motoren als auch als Generatoren verwendet werden können. Sie zeichnen sich durch eine präzise Steuerbarkeit der Drehzahl und des Drehmoments aus, was sie ideal für Anwendungen mit variabler Geschwindigkeit und Last macht. Gleichstrommaschinen haben einen hohen Anlaufdrehmoment und ermöglichen eine einfache Umkehrung der Drehrichtung. Sie werden häufig in Elektrofahrzeugen, industriellen Steuerungsanlagen und batteriebetriebenen Geräten eingesetzt.

Vorteile:

- Einfacher und kostengünstiger Aufbau der Stromrichter
- Hohe Regeldynamik
- Direkter Betrieb der Maschine mit Akkumulatoren möglich
- Große Überlastfähigkeit

Nachteile:

- Hoher Konstruktionsaufwand
- Wartungsintensiv (Bürsten)
- Geringe Leistungsdichte
- Kosten

11.3.1 Exkurs Prinzip des Elektromotors

Zu Beginn werden die im Modul 6 vorgestellten Prinzipien aufgefrischt. Die Abbildung 11.9 zeigt in drei Schaubildern kurzgefasst die Wirkweise eines Elektromotors. Zum grundlegenden Aufbau eines Elektromotors gehören ein feststehender Teil, Ständer oder Stator genannt, und ein sich drehender Teil, auch Läufer oder Rotor genannt. In den drei Abbildungen ist eine Leiterspule in einem Hufeisenmagnet zu sehen. Der Hufeisenmagnet bildet hier den Stator und eine um die eigene Achse bewegliche Leiterspule stellt den Rotor dar. Das erste Schaubild illustriert den isolierten Verlauf der magnetischen Feldlinien des Hufeisenmagnets. Sie verlaufen innerhalb des Hufeisenmagneten vertikal von Nord- zum Südpol. Das zweite Schaubild zeigt den isolierten Verlauf der magnetischen Feldlinien der stromdurchflossenen Leiterschleife. Durch den Stromfluss entstehen an der Leiterschleife zwei entgegengesetzte Wirbelfelder. Im dritten Schaubild wird die Wechselwirkung des Hufeisenmagneten (Statorfeld) und der stromdurchflossenen Leiterschleife (Rotorfeld) aufgezeigt. Die beiden Felder überlagern sich. Die aus der Überlagerung resultierende Lorentzkraft bringt gemäß der Rechten-Hand-Regel die Leiterschleife zum Rotieren. Aus der elektromagnetischen Energie entsteht mechanische Energie.

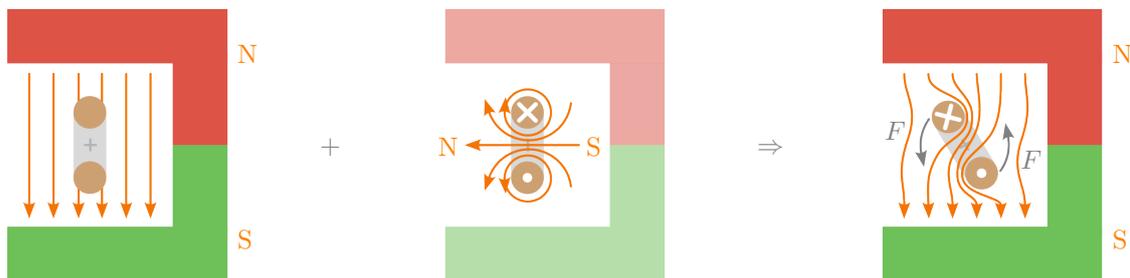


Abbildung 11.9: **Prinzip des Elektromotors.** Die Lorentzkraft bringt die sich im Magnetfeld befindende stromdurchflossene Leiterschleife in eine Drehbewegung.

Die Lorentzkraft kann mit der aus Modul 6 bekannten Formel berechnet werden:

$$F = B \cdot I \cdot \ell \cdot N \quad (11.11)$$

Beispiel 11.3: Kraft einer Gleichstrommaschine

Ein Gleichstrommotor hat im Luftspalt eine magnetische Flussdichte von $B = 0,8 \text{ T}$. Unter den Polen befinden sich insgesamt $N = 400$ Ankerdrähte, die mit einem Strom von $I = 10 \text{ A}$ durchflossen werden. Die wirksame Leiterlänge ist $\ell = 150 \text{ mm}$. Berechnen Sie die Kraft F am Umfang des Ankers.

$$\begin{aligned} F &= B \cdot I \cdot \ell \cdot N \\ &= 0,8 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 10 \text{ A} \cdot 0,15 \text{ m} \cdot 400 \\ &= 480 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{A} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \cdot \text{A} \cdot \text{m}^2} = 480 \text{ N} \end{aligned}$$

11.3.2 Aufbau und Gehäusekonstruktion

Der Aufbau der Gleichstrommaschine wird anhand dreier Abbildungen dargestellt. Abbildung 11.10 zeigt ein diagonales Schnittmodell der Gleichstrommaschine, das eine allgemeine Übersicht über die Komponenten von Stator und Rotor gibt. Zur detaillierteren Veranschaulichung des Aufbaus werden die Abbildung 11.11 mit Fokus auf dem Stator und Abbildung 11.12 zur Veranschaulichung des Rotors einer Gleichstrommaschine herangezogen.

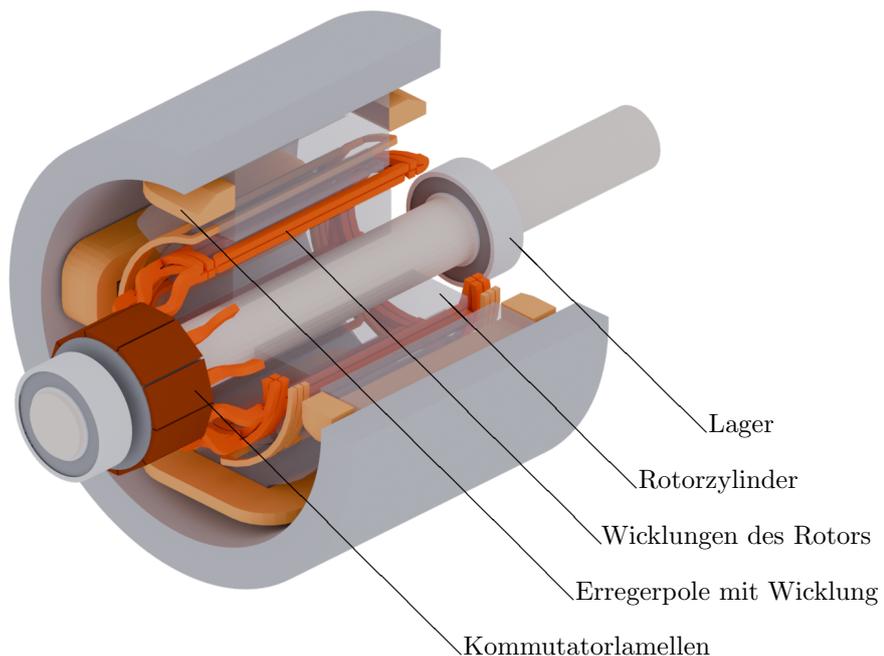


Abbildung 11.10: Grafik einer aufgeschnittenen Gleichstrommaschine.

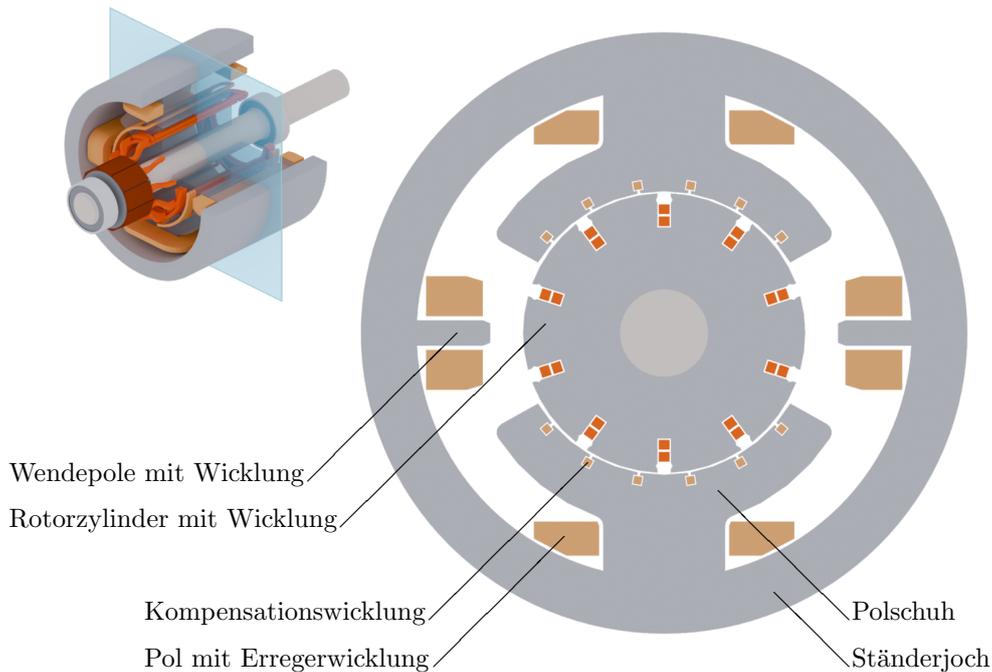


Abbildung 11.11: **Grundlegender Aufbau einer Gleichstrommaschine.** Hier mit nur einem Polpaar (Polpaarzahl $p = 1$).

Die Komponenten des Stators, auch Ständer genannt, werden im frontalen Querschnitt einer Gleichstrommaschine (Abbildung 11.11) gut veranschaulicht. Eine der grundlegenden Komponenten ist die Erregerwicklungen, die um ein Polschuh gewunden, einen Pol darstellen. Die Pole haben die Aufgabe, ein Magnetfeld, Erregerfeld genannt, zu erzeugen.

Da ein magnetisches Feld immer einen Nord- und einen Südpol beinhaltet, werden die Pole paarweise gegenüber eingebaut. Die daraus resultierende Kenngröße, die Polpaarzahl, gibt Aufschluss über die Betriebseigenschaften der Gleichstrommaschine. Eine höhere Polpaarzahl verringert die Drehzahl, erhöht jedoch das Drehmoment. Bei Kleinstmaschinen können die Erregerwicklungen durch Permanentmagnete ersetzt werden. Bei größeren Maschinen (ca. über 1 kW) sind zusätzlich Wendepolwicklungen vorhanden, die hier jedoch vernachlässigt werden.

In der Abbildung 11.12 sind die Komponenten des Rotors gut ersichtlich. Im Allgemeinen wird der Rotor auch Anker oder als Läufer bezeichnet. Die Funktion des Rotors besteht darin die elektromagnetische Energie durch Rotationen um die eigene Achse in mechanische Energie (und umgekehrt) zu wandeln. Hierzu ist der Rotor an einer Motorwelle befestigt, die die mechanische Energie überträgt. Das Kugellager am Ende der Motorwelle verringert dabei die Reibungsverluste bei der Energieübertragung. Um den Rotor in Bewegung zu bringen, ist das Zusammenwirken von Kommutator und Rotorwicklung wichtig. Die Rotorwicklung, auch Ankerwicklung bezeichnet, hat die Aufgabe ein magnetisches Feld, das Ankerfeld, zu erzeugen. Erst durch die Interaktion des Ankerfelds mit dem Erregerfeld wird ein Drehmoment auf den Rotor ausgeübt und setzt diesen in Bewegung. Die Blechwände, um die die Spulen gewickelt sind, bestehen aus isolierenden Blechen, um Wirbelströme in den Wicklungen zu reduzieren. Der Kommutator oder Stromwender hat die Funktion die Rotorwicklung getaktet mit Strom zu versorgen. Er besteht aus mehreren voneinander getrennten Lamellen, die jeweils mit einem Strang der Rotorwicklung verbunden. Der Strom wird nun über am Stator angebrachten Kohlebürsten an die Kommutatorlamellen geleitet. Durch die Drehung der Lamellen unter den Bürsten wirkt der Kommutator als mechanischer Schalter und sorgt dafür, dass die Stromrichtung in den Rotorwicklungen die sich jeweils unter den Hauptpolen befinden gleich bleibt.

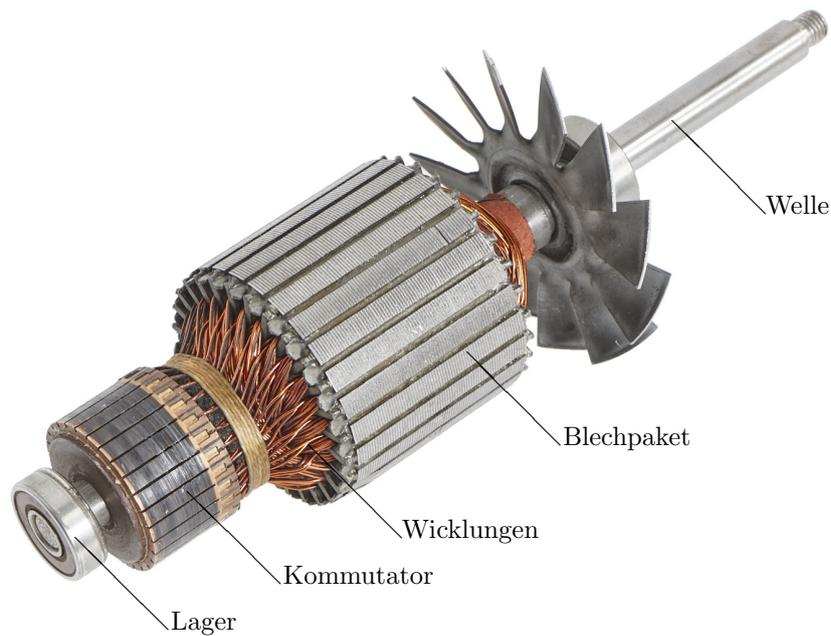


Abbildung 11.12: **Foto eines Rotors.** Zu erkennen sind hier die charakteristischen Bauelemente.

11.3.3 Magnetische Felder

Für die Lorentzkraft ist das magnetische Feld entscheidend, in dem sich der Leiter bewegt. Dieses Feld wird durch den Stator mit den Erregerwicklungen erzeugt und ist im Bereich des Rotors näherungsweise parallel und homogen.

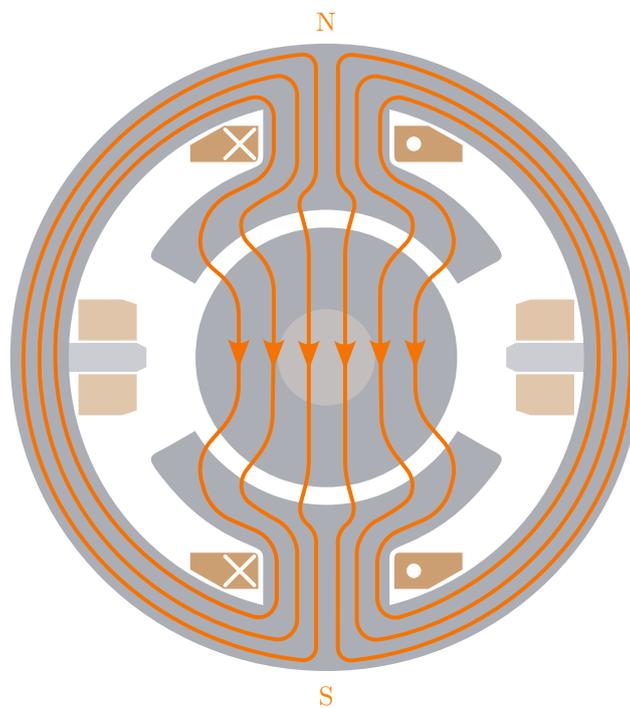


Abbildung 11.13: **Erregerfeld einer Gleichstrommaschine.** Schematische Darstellung in der Vorderansicht.

11.3.4 Berechnung des Drehmoments

In Modul 6 und Kapitel 11.3.1 ist bereits die Kraftwirkung auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld erklärt worden. Um das Drehmoment der Gleichstrommaschine zu berechnen, wird zuerst die induzierte Spannung ermittelt (siehe Modul 6). Dreht sich der Rotor einer erregten Gleichstrommaschine, wird in jeder Leiterschleife des Ankers eine Spannung induziert. Nach dem Induktionsgesetz (Gleichung 11.4) ist die Höhe der induzierten Spannung (Quellenspannung) U_q vom magnetischen Fluss Φ und der zeitlichen Änderung, in diesem Fall der Drehzahl n bzw. der damit verküpften Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot n$ abhängig. Werden hierzu noch die spezifischen geometrischen Gegebenheiten des Rotors in Form der Ankerkonstanten K multipliziert, so ergibt das Produkt aus diesen Kenngrößen die induzierte Spannung U_q der Gleichstrommaschine (siehe Gleichung 11.12)

$$U_q = K \cdot \Phi \cdot \omega \quad (11.12)$$

Wenn sowohl die elektrischen als auch mechanischen Verluste vernachlässigt wird, kann die induzierte Spannung kann auch direkt über die sogenannte innere Leistung P_i angegeben werden. Diese entspricht dann sowohl der elektrischen Leistung $U_q \cdot I_A$, als auch der mechanischen Leistung P_{mech} , welche sich aus dem Produkt des inneren Drehmoments M_i und der Winkelgeschwindigkeit ω errechnet.

$$P_i = U_q \cdot I_A = P_{\text{mech}} = M_i \cdot \omega \quad (11.13)$$

Wird diese Erkenntnis nun in Gleichung 11.12 eingesetzt, errechnet sich das inner Drehmoment M_i aus dem Produkt der Ankerkonstante K , den magnetischen Fluss Φ und dem Ankerstrom I_A

$$M_i = K \cdot \Phi \cdot I_A \quad (11.14)$$

Im Motorbetrieb ist das Drehmoment an der Welle der Maschine das innere Drehmoment M_i abzüglich der Verluste M_V . Das Maschinenmoment kann auch durch den Wirkungsgrad η_1 ausgedrückt werden. Dieser Wirkungsgrad vernachlässigt allerdings die elektrischen Verluste durch den Ankerwiderstand und der Erregung.

$$M = M_i - M_V \quad M = \eta_1 \cdot M_i \quad (11.15)$$

- Verlustmoment: M_V [Nm]
- Wirkungsgrad: η [1]

11.3.5 Fremderregte Gleichstrommaschine

Der Erregerkreis im Stator der Gleichstrommaschine und der Rotorkreis, der über den Kommutator mit Strom versorgt wird, sind prinzipiell unabhängig voneinander. Wenn beide Stromkreise von unterschiedlichen Spannungsquellen versorgt werden, wird die Maschine fremderregt genannt. Das Ersatzschaltbild ist in Abbildung 11.14 dargestellt.

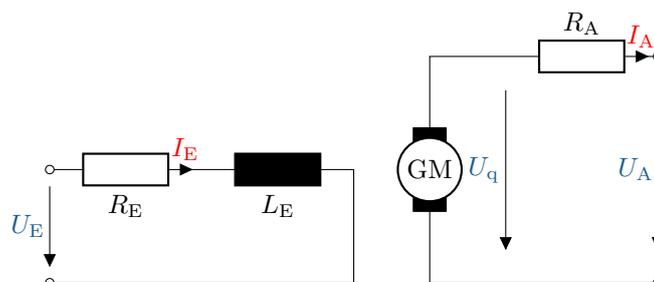


Abbildung 11.14: Ersatzschaltbild einer fremderregten Gleichstrommaschine.

Der Erregerkreis besteht aus der Induktivität der Erregerwicklung L_E und dem Kupferwiderstand R_E der Spule. Im Ankerkreis wird die Wicklung als Kreis mit angedeuteten Schleifringen dargestellt, da sie einerseits eine Induktivität, als auch eine Spannungsquelle darstellt. Auch der Anker hat einen ohmschen Widerstand R_A .

Der Maschenumlauf im Rotorkreis ergibt:

$$U_A = U_q + I_A \cdot R_A \quad (11.16)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 11.12 und 11.14 ergibt sich die Drehzahl/Drehmoment- und Ankerstromkennlinie für die fremderregte Gleichstrommaschine:

$$n = \frac{U_A}{2\pi K \cdot \Phi} - \frac{R_A \cdot M_i}{2\pi(K \cdot \Phi)^2} \quad (11.17)$$

Beispiel 11.4: Fremderregte Gleichstrommaschine

Eine fremderregte Gleichstrommaschine mit der Ankerkonstante $K = \frac{1}{2\pi}$ hat bei der Spannung $U_A = 400 \text{ V}$ eine Leerlaufdrehzahl von $n = 1200 \frac{1}{\text{min}}$. Der Ankerwiderstand beträgt $R_A = 2,3 \Omega$.

a) Wie groß ist der Erregerfluss Φ ?

Im Leerlauf ist das innere Moment M_i gleich Null. Gleichung 11.17 vereinfacht sich daher zu:

$$\begin{aligned} n &= \frac{U_A}{2\pi K \cdot \Phi} \\ \Phi &= \frac{U_A}{2\pi K \cdot n} = \frac{400 \text{ V}}{\frac{2\pi}{2\pi} \cdot 1200 \frac{1}{\text{min}} \cdot \frac{1}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}}} = 20 \text{ Vs} \end{aligned}$$

b) Wie schnell dreht die Maschine bei einem inneren Drehmoment von $M_i = 10 \text{ Nm}$?

$$\begin{aligned} n &= \frac{U_A}{2\pi K \cdot \Phi} - \frac{R_A \cdot M_i}{2\pi(K \cdot \Phi)^2} \\ &= \frac{400 \text{ V}}{\frac{2\pi}{2\pi} \cdot 20 \text{ Vs}} - \frac{2,3 \Omega \cdot 10 \text{ Nm}}{2\pi(\frac{1}{2\pi} \cdot 20 \text{ Vs})^2} \\ &= 20 \frac{1}{\text{s}} - 0,362 \frac{1}{\text{s}} = 19,638 \frac{1}{\text{s}} = 1178,3 \frac{1}{\text{min}} \end{aligned}$$

c) Wie groß ist der Ankerstrom?

$$I_A = \frac{M_i}{K \cdot \Phi} = \frac{10 \text{ Nm}}{\frac{1}{2\pi} \cdot 20 \text{ Vs}} = 3,61 \text{ A}$$

11.3.6 Reihenschlussmaschine

Bei der Reihenschlussmaschine sind Erreger- und Rotorkreis in Reihe miteinander verbunden. Der Erregerstrom ist daher gleich dem Ankerstrom. Diese Art von Motor wird häufig in einfachen Elektrogeräten an Wechselspannung eingesetzt und wird daher auch Universalmotor genannt. Als Gleichstrommaschine wurde sie früher vor allem in Traktionsantrieben zum Beispiel von Straßenbahnen eingesetzt. Heutzutage sind diese allerdings wegen des besseren Wirkungsgrades durch Drehstromantriebe mit Umrichter ersetzt.

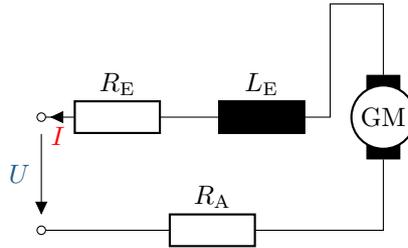


Abbildung 11.15: **Ersatzschaltbild einer Reihenschlussmaschine.**

- Auch für Wechselspannung einsetzbar
- hohes Anzugsmoment

Im Gegensatz zur fremderregten Gleichstrommaschine, deren Drehzahl-Drehmomentenkennlinie nach Gleichung 11.17 eine Gerade ist, verhält sich die Reihenschlussmaschine nichtlinear. Ohne Belastung ist die Drehzahl theoretisch unendlich, die Maschine wird also so stark beschleunigen, bis sie sich selbst durch die Fliehkraft zerstört. Die Maschine „geht durch“. Bei den Anwendungen als Traktionsantrieb kommt ein Leerlauf aber nie vor, das große Anlaufmoment ist hingegen gewünscht.

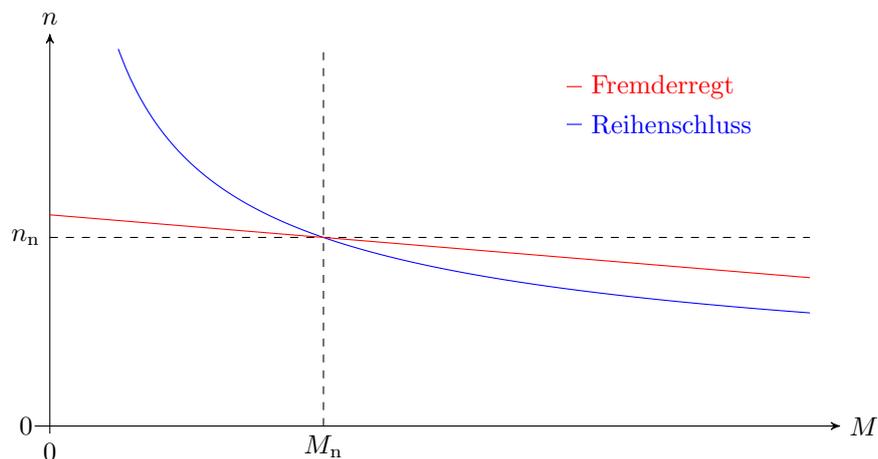


Abbildung 11.16: **Drehzahl-Drehmomentenkennlinien.** Kennlinie einer fremderregten Gleichstrommaschine sowie einer Reihenschlussmaschine.

11.4 Synchronmaschine

Die Synchronmaschine ist eine Drehfeldmaschine, die folglich mit einem dreiphasigen Drehstrom (siehe Modul 7) im Statorkreis betrieben wird. Der Rotor kann entweder permanent (mit Dauermagneten) oder durch einen Gleichstromkreis erregt werden. Dieser Maschinentyp wird in Kraftwerken zur Stromgewinnung eingesetzt, da er aber über einen sehr hohen Wirkungsgrad verfügt, wird er auch in der modernen Antriebstechnik in kleineren Leistungsklassen immer häufiger eingesetzt. Ein wesentlicher Nachteil besteht jedoch darin, dass die Synchronmaschine immer durch eine Leistungselektronik geregelt werden muss, da sie an einem einfachen Drehstromnetz nicht anläuft.

Vorteile:

- Robust und wartungsfrei.

- Hohe Regeldynamik.
- Hohe Leistungsdichte bei geringem Bauvolumen.
- Überlastfähigkeit.

Nachteile:

- Aufwendige Umrichtertechnik.
- Aufwendige Regelung.
- Gesteuerter Betrieb nur mit großem Aufwand oder gar nicht möglich.

11.4.1 Aufbau

- Drei Statorwicklungen, die 120° zueinander versetzt sind.
- Geblechte Ausführung des Stators, da dieser ein magnetisches Wechselfeld erfährt.
- Im Läufer befindet sich die Erregerwicklung.
- Der Läufer wird teilweise nicht geblecht.

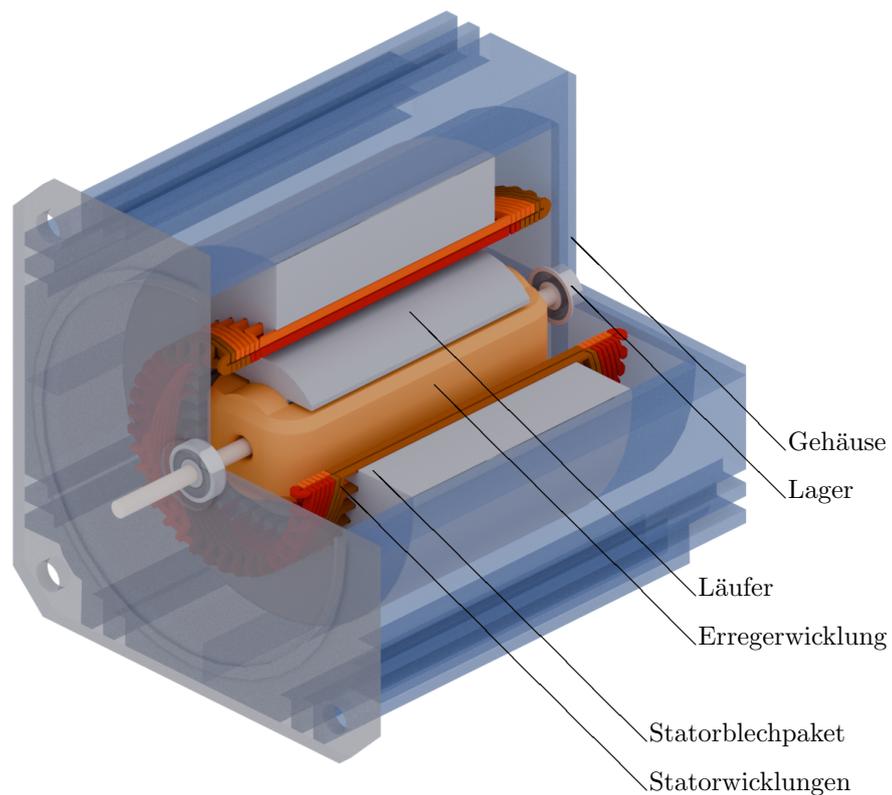


Abbildung 11.17: **Grafik einer aufgeschnittenen fremderregten Synchronmaschine.**

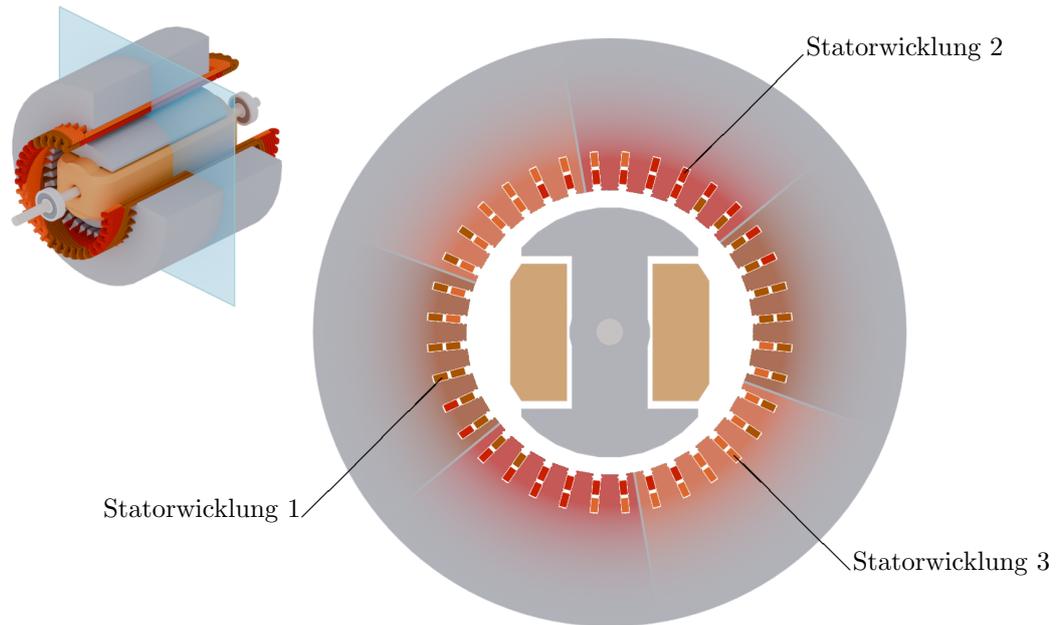


Abbildung 11.18: **Aufbau einer fremderregten Synchronmaschine.** Die um 120° zueinander versetzten Statorwicklungen sind hier farblich veranschaulicht.

11.4.2 Feldverläufe

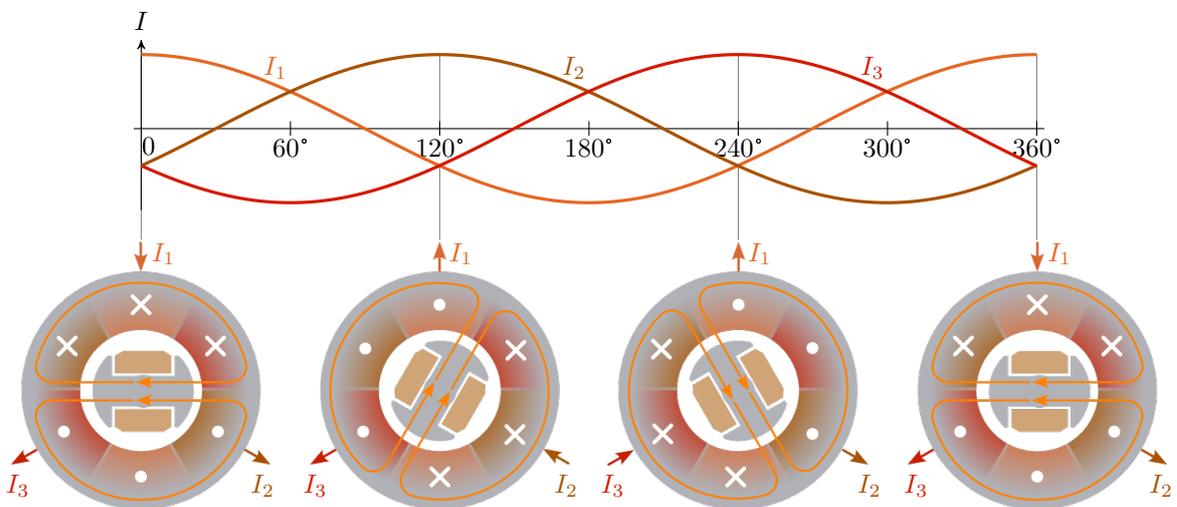


Abbildung 11.19: **Richtung des Drehfeldvektors.** Der Rotor dreht sich synchron zu den sinusförmigen, um 120° zueinander versetzten Drehfeldern des Stators.

Bei der Synchronmaschine bewirkt die magnetische Kopplung zwischen Stator und Rotor das Drehmoment. Im Motorbetrieb folgt das Rotorfeld dem Statorfeld. Die mechanische Drehzahl muss daher immer gleich der elektrischen Drehfrequenz sein. Zwischen dem Stator und dem Rotor befindet sich der lastabhängige sogenannte Polradwinkel ϑ . Bei $\vartheta = 90^\circ$ ist das Drehmoment am größten. Wird im Motorbetrieb der Polradwinkel durch eine zu hohe Belastung größer als 90° , sinkt das erzeugte Drehmoment und die Maschine „kippt“ – das heißt, sie bleibt schlagartig stehen.

- Der Statorfluss entsteht durch die Überlagerung der Flüsse der drei Wicklungen.
- Der Läuferfluss entsteht durch die Erregerwicklung.

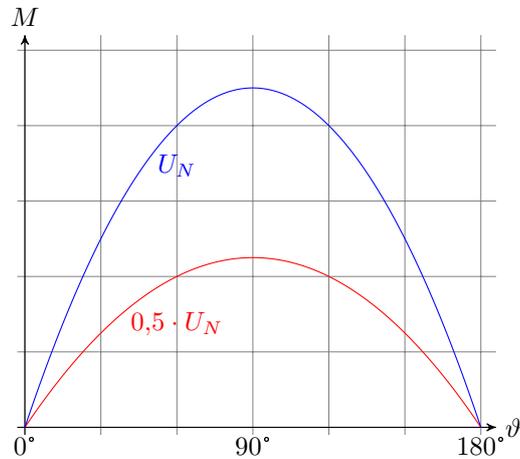


Abbildung 11.20: Drehmomentkennlinie in Abhängigkeit vom Polradwinkel.

11.4.3 Ersatzschaltbild

Im Netzbetrieb ist die Klemmenspannung U_1 und die Frequenz ω fest vorgegeben. Das ist ein häufiger Betriebsfall für die Synchronmaschine.

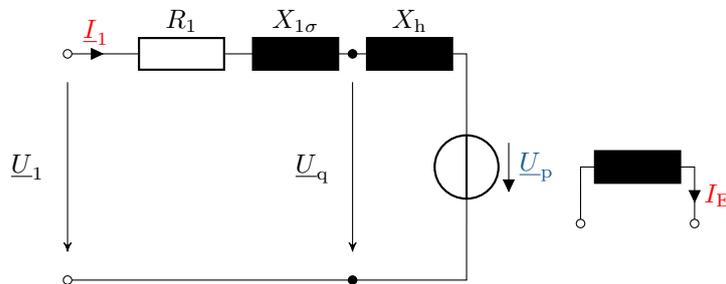


Abbildung 11.21: Komplexes einphasiges ESB eines Vollpolgenerators. Beispielsweise im Netzbetrieb.

11.5 Asynchronmaschine

Die Asynchronmaschine ist ebenfalls eine Drehfeldmaschine. Der Stator ist identisch zum Stator der Synchronmaschine, der Rotor ist hingegen in der häufigsten Version dieses Maschinentyps, beim sogenannten Käfigläufer, passiv.

11.5.1 Aufbau

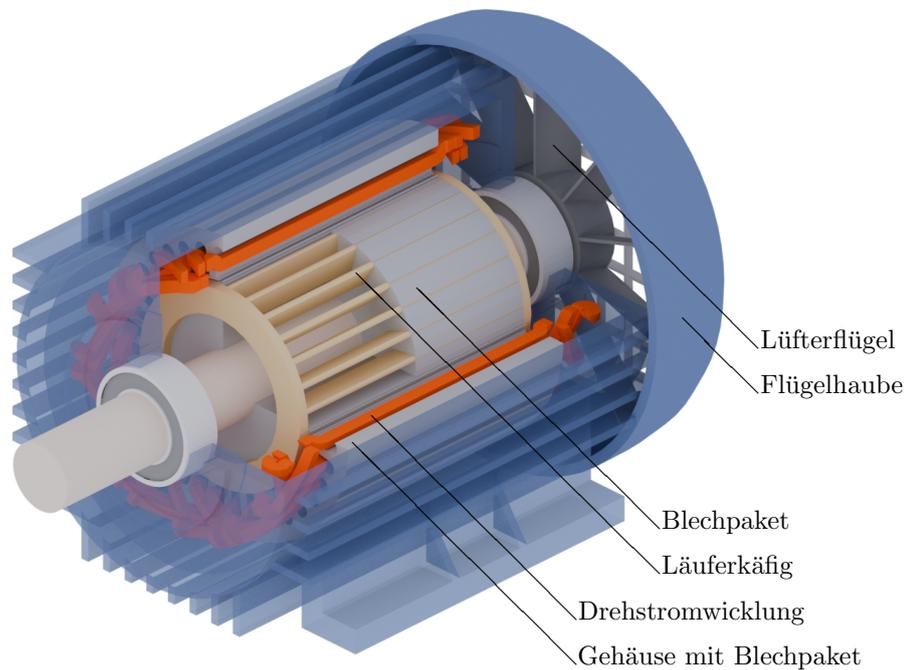


Abbildung 11.22: **Aufbau einer Käfigläufer-Asynchronmaschine.** Die Bleche des Rotorzylinders wurden der Anschaulichkeit halber zur Hälfte beschnitten, um den Käfig freizulegen.

11.5.2 Käfigläufer

- In den Nuten des Läuferblechpaketes liegen leitfähige Stäbe.
- Stirnseitig sind die Stäbe durch Kurzschlussringe miteinander verbunden.
- Zusammen bilden diese Komponenten einen Käfig (ähnlich Hamsterkäfig).
- Stäbe werden geschrägt ausgeführt zur Reduktion von Oberwellen im umlaufenden magnetischen Feld.

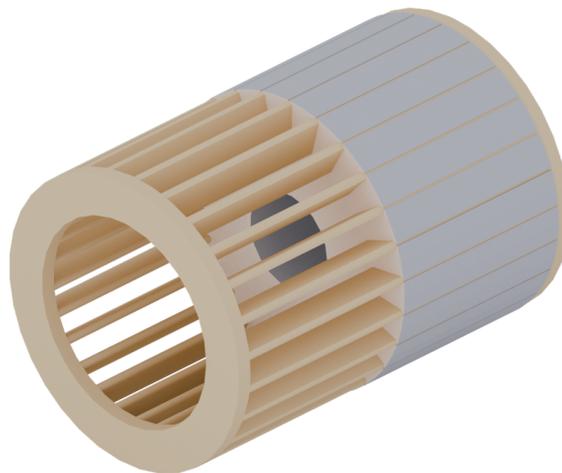


Abbildung 11.23: **Käfig eines Asynchronrotors.** Zur Hälfte mit Blechpaket gezeigt.

11.5.3 Anlauf der ASM

- Der Stator erzeugt im Ständer eine umlaufende magnetische Wanderwelle mit der Winkelgeschwindigkeit: $\omega_s = \frac{\omega_0}{p}$.
- Der ruhende Läufer sieht ein veränderliches Feld mit der Frequenz ω_s .
- Das magnetische Drehfeld durchsetzt den Läufer und induziert eine Spannung mit der Frequenz ω_s .
- Aus der Spannungsinduktion resultiert ein Stromfluss, da die Läuferwicklungen kurzgeschlossen sind.
- Der induzierte Rotorstrom wirkt der von ihm gesehenen Änderung des Statorfeldes entgegen (Lenzsche Regel).
- Statorfeld und Rotorstrom wechselwirken durch die Lorentzkraft- es kommt zur Ausbildung eines Drehmoments.
- Das Drehmoment wirkt in Richtung des Ständerdrehfelds.
- Der Läufer beginnt sich zu drehen.

11.5.4 Betrieb der ASM

- Mit steigender Drehzahl des Läufers sieht dieser eine immer langsamere Änderung des Statorfeldes: $\omega_r = \omega_s - \omega_{\text{mech}}$.
- Mit steigender Drehzahl sinkt sowohl der Betrag als auch die Frequenz der induzierten Spannung im Rotor.
- Der Betrag des Drehmoments sinkt.
- Drehen sich der Läufer und Ständerfeld mit der gleichen Frequenz, ist die synchrone Drehzahl erreicht.
- Die Läuferwicklungen sehen keine Änderung des Feldes.
- Induzierter Strom und Moment der Maschine werden zu Null.
- Durch Reibungseffekte wird der Rotor wieder abgebremst - es kommt zur erneuten Ausbildung eines Moments.
- Im Gleichgewichtszustand stellt sich eine Drehzahl knapp unter der synchronen ein.

11.5.5 Drehzahl/Drehmomenten-Kennlinie

Die Drehzahl/Drehmomenten-Kennlinie ist bei der Asynchronmaschine nichtlinear und kann in mehrere Abschnitte unterteilt werden. Häufig wird die Kennlinie wie in Abbildung 11.24 gezeigt über den Schlupf s aufgetragen. Der Schlupf bezeichnet die prozentuale Abweichung der mechanischen Drehgeschwindigkeit des Rotors n_r von der elektrischen Drehgeschwindigkeit n_s des speisenden Netzes im Stator.

$$s = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \quad (11.18)$$

Ein Schlupf von $s = 1$ (100%) entspricht daher dem Stillstand der Maschine oder Drehzahl $n = 0$, ein Schlupf von $s = 0$ entspricht dem netzsynchronen Betrieb, der jedoch bei der Asynchronmaschine niemals auftreten kann, da das Drehmoment in dem Fall Null wird.

Die Drehzahl/Drehmomenten-Kennlinie wird auch als Klosssche Kennlinie bezeichnet und kann durch die Gleichung 11.19 ausgedrückt werden:

$$M = \frac{2 \cdot M_K}{\frac{s_K}{s} + \frac{s}{s_K}} \quad (11.19)$$

Der Schlupf entspricht bei großen Maschinen in sehr guter Näherung den prozentualen Verlusten der Maschine:

$$\eta \approx 1 - s \quad (11.20)$$

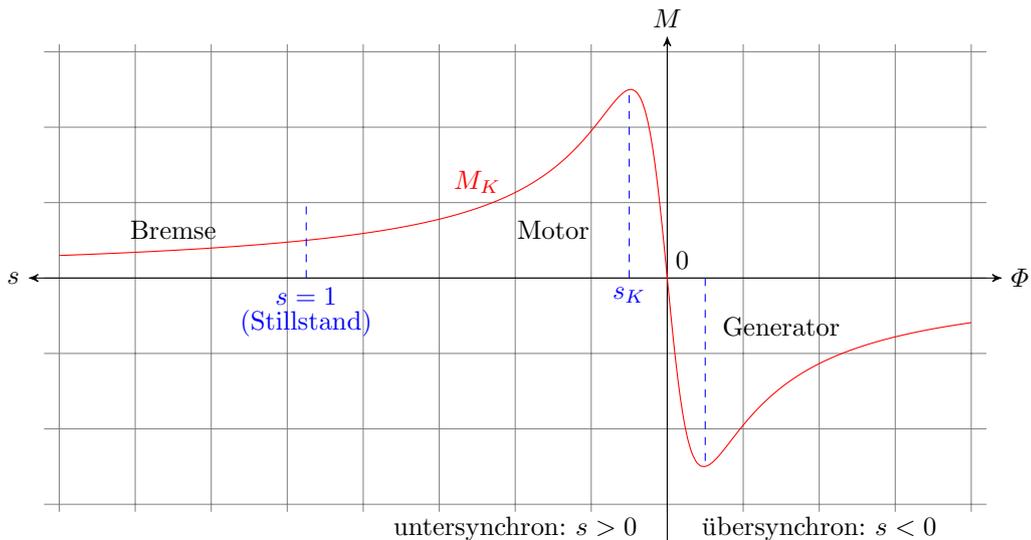


Abbildung 11.24: **Klosssche Kennlinie.** Drehzahl/Drehmomenten-Kennlinie einer Asynchronmaschine.

Beispiel 11.5: Asynchronmaschine

Ein Drehstrom-Asynchronmotor hat die folgenden Typenschildangaben:

- Nennleistung: 10 kW
- Nenndrehzahl: $1440 \frac{\text{U}}{\text{min}}$
- Frequenz: 50 Hz
- Kippschlupf: 25%

Berechnen Sie das Nennmoment, das Kippmoment und das Anlaufmoment.

$$\begin{aligned} P_N &= M_N \cdot \omega_N = M_N \cdot 2\pi n_N \\ M_N &= \frac{P_N}{2\pi n_N} = \frac{10 \cdot 10^3 \text{ W}}{2\pi \cdot 1440 \frac{1}{60 \text{ s}}} = 66,31 \text{ Nm} \\ s_N &= \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \\ &= \frac{2\pi \cdot 1500 \frac{1}{60 \text{ s}} - 2\pi \cdot 1440 \frac{1}{60 \text{ s}}}{2\pi \cdot 1500 \frac{1}{60 \text{ s}}} \\ &= 0,04 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der weiteren Momente wird Gleichung 11.19 für die Fälle Nennbetrieb und Stillstand ausgerechnet.

$$M = \frac{2 \cdot M_K}{\frac{s_K}{s} + \frac{s}{s_K}}$$
$$M_K = \frac{M_N}{2} \cdot \left(\frac{s_K}{s_N} + \frac{s_N}{s_K} \right)$$
$$= \frac{66,31 \text{ Nm}}{2} \cdot \left(\frac{0,25}{0,04} + \frac{0,04}{0,25} \right) = 212,54 \text{ Nm}$$
$$M_A = \frac{2 \cdot 212,54 \text{ Nm}}{\frac{0,25}{1} + \frac{1}{0,25}} = 100,02 \text{ Nm}$$

Modul 12

Schaltvorgänge

12.1 Einführung in Schaltvorgänge

Schaltvorgänge sind Ausgleichsvorgänge, welche unmittelbar nach dem Schalten in elektrischen Netzwerken auftreten. Wie der Begriff „elektrische Schaltung“ im Deutschen vermuten lässt, spielt das Schalten eine große Rolle in der Elektrotechnik. Selbst elektrische Netzwerke, in denen nicht geschaltet wird, werden gemeinhin als Schaltungen bezeichnet.

Schalter finden vielfältig Anwendung unter anderem in der Leistungselektronik, der Informations-, der Kommunikations- und der Regelungstechnik. Dabei kommt es nach jedem effektiven Schalten zu Ausgleichsvorgängen, die mitunter erwünschte oder unerwünschte Effekte hervorrufen können.

In diesem Modul liegt der Fokus auf der Untersuchung dieser Ausgleichsvorgänge.

Lernziele: Einführung

Studierende lernen:

- Schaltvorgänge als nicht-stationäre Zustände nach Schaltaktionen kennen
- Schaltvorgänge im Kontext anderer Ausgleichsvorgänge zu verstehen
- Herausforderungen und Möglichkeiten bei Schaltvorgängen kennen
- das Schaltverhalten von idealen und realen Schaltern zu unterscheiden

12.1.1 Ausgleichsvorgänge

Ausgleichsvorgänge sind allgemein Vorgänge, in denen ein System nach einer Störung einem Gleichgewichtszustand zustrebt.

Ein Blick in die Physik zeigt, dass Ausgleichsvorgänge auf mannigfaltige Art und Weise in vielen Bereichen vorkommen. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik strebt ein System stets einem Gleichgewichtszustand zu. Demnach kann jeder Vorgang bei entsprechenden Systemgrenzen als Ausgleichsvorgang betrachtet werden. Ein Stückweit lassen sich Schaltvorgänge mittels Analogien zu anderen Ausgleichsvorgängen beschreiben.

Beispiele für Ausgleichsvorgänge sind das Erhitzen einer Flüssigkeit, das Ausschwingen eines Pendels oder der Regelvorgang eines Regelkreises.

Abbildung 12.1: Erhitzen einer Flüssigkeit¹

12.1.2 Schaltvorgänge

Als Schaltvorgänge werden Ausgleichsvorgänge unmittelbar nach dem Schalten bezeichnet. Diese sind Hauptgegenstand des Moduls, wobei hierfür stets von idealen Schaltern ausgegangen wird.

Abbildung 12.2 zeigt exemplarisch den Zeitverlauf einer Systemgröße $s(t)$ (z.B. Strom oder Spannung) während eines Schaltvorgangs. Zum Vergleich sind für das Zuschalten einer Anregung zwei Fälle dargestellt: einmal für eine Gleichgröße (DC) und einmal für eine Wechselgröße (AC).

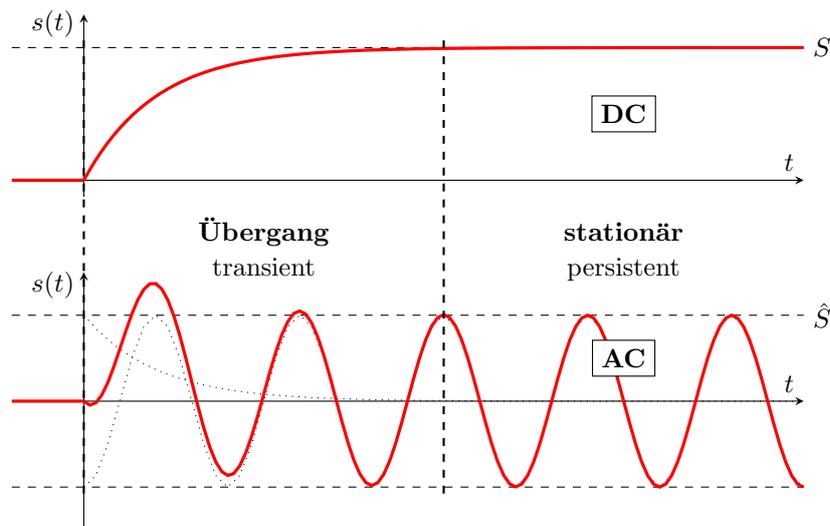


Abbildung 12.2: Vergleich: Ausgleichsvorgang AC, DC

Der dargestellte Schaltvorgang beginnt mit dem Schalten bei $t = 0$ (gestrichelte Grenze, links) und endet mit Erreichen eines stationären Zustands (persistent) (gestrichelte Grenze, mittig). Der stationäre Zustand von $s(t)$ entspricht bei Anregung mit Gleichgröße (DC) ebenfalls einer Gleichgröße (konstant) und bei Anregung mit Wechselgröße (AC) ebenfalls einer Wechselgröße (periodisch).

Der in Abb. 12.2 dargestellte Vorgang beim Übergang (transient) von Schalten bis Erreichen eines stationären Zustands kann hier auch als Ausgleichsvorgang (allgemein), Schaltvorgang (speziell) oder Einschwingvorgang (speziell) bezeichnet werden.

¹Bartolomeo Pinelli, Ausschnitt aus *A Peasant Family Cooking over a Campfire*, Lizenz CC0 1.0 <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81414513>

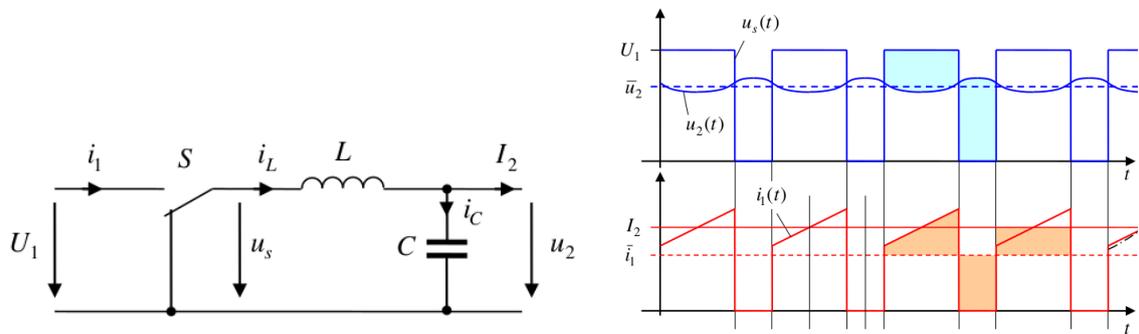
Ausgleichsvorgänge während dem Schalten, wie sie bei realen Schaltern auftreten, werden nicht als Schaltvorgänge bezeichnet und in diesem Modul nicht näher untersucht. Eine kurze Erläuterung findet sich jedoch vollständigshalber in Abschnitt 12.1.4 beim Vergleich idealer und realer Schalter.

12.1.3 Beispiele für Schaltvorgänge

Prinzipiell kommt es bei jedem Schalten in elektrischen Netzwerken zu Schaltvorgängen.

Typische Beispiele sind Umrichter (engl. *power converter*) in der Leistungselektronik, welche elektrische Energie in eine andere Form elektrischer Energie umwandeln. Durch gezieltes Schalten von Halbleiterbauelementen (z.B. Transistoren, Thyristoren) kann die Spannung, der Strom oder die Frequenz verändert werden. In jedem Taktzyklus werden Kapazitäten und Induktivitäten abwechselnd geladen und entladen.

Abbildung 12.3a zeigt beispielhaft eine Tiefsetzsteller (Buck-Converter) mit Glättungskondensator. Dieser wandelt eine Gleichspannung U_1 in eine niedrigere Gleichspannung U_2 um. Daneben sind in Abbildung 12.3b die zeitlichen Verläufe von Spannungen und Strömen jeweils am Eingang und am Ausgang des Tiefsetzstellers dargestellt.



(a) Schaltbild eines Tiefsetzstellers (Buck-Converter) (b) Zeitverlauf von $u(t)$ und $i(t)$ am Tiefsetzsteller

Abbildung 12.3: Beispiel: Schaltvorgänge am Tiefsetzsteller²

Ohne nähere Rechnung ist erkennbar, dass die Ausgangsspannung auch im stationären Betrieb nicht konstant ist. Die Ausgangsspannung über dem Glättungskondensator schwankt, da sich die Kapazität in jeder Schaltperiode etwas entlädt und wieder auflädt.

Mithilfe der Methoden aus diesem Modul lassen sich solche Schaltvorgänge berechnen und analysieren. Zum besseren Verständnis werden in Kapitel 12.3 jedoch einfachere Beispiele von Schaltvorgängen ohne periodisches Schalten betrachtet.

Andere Beispiele für Schaltvorgänge sind das Ein- und Ausschalten von Geräten, Analog-Digital- und Digital-Analog-Wandlung, das Aufladen eines Kondensators durch ein Fahrradlicht.

12.1.4 Vergleich idealer und realer Schalter

Zur Vereinfachung wird in diesem Modul stets von idealen Schaltern ausgegangen. Um die Grenzen dieser Annahme zu verstehen, wird im Folgenden der Unterschied zwischen idealen und realen Schaltern erläutert. Hierfür wird wie im Schaltbild in Abbildung 12.4 gezeigt ist, die Schalterspannung über einem Schalter betrachtet. Der Schalter ist hierfür an eine lineare Gleichspannungsquelle mit Spannung U_q angeschlossen.

²Quelle: Schaltbild und Zeitverlauf (modifiziert, gekürzt): Joachim Böcker, GET2, Universität Paderborn

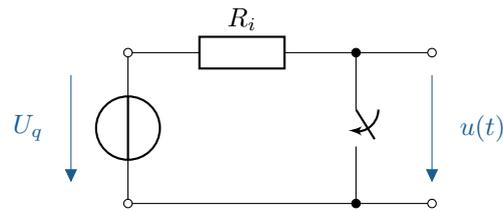


Abbildung 12.4: Schaltbild, Schalterspannung

Abbildung 12.5 zeigt die Schalterspannung im Durchlass- und im Sperrbetrieb und in den Übergangphasen beim Öffnen oder Schließen des Schalters. Links ist der Spannungsverlauf für einen idealen Schalter dargestellt, rechts für einen realen Schalter.

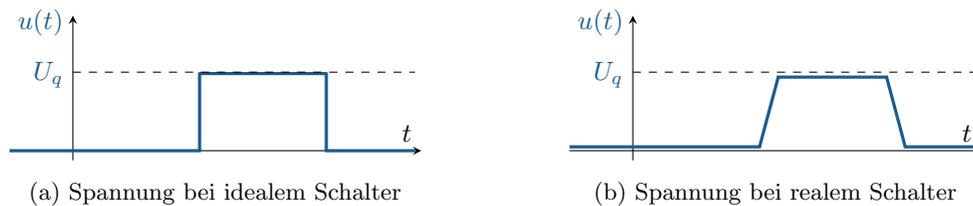


Abbildung 12.5: Vergleich: Schaltverläufe bei idealem und realem Schalter

Ein idealer Schalter wechselt beim Schalten instantan und verlustlos von einem leitenden Zustand ($R = 0$) zu einem sperrenden Zustand ($G = 0$) oder umgekehrt wie in Abbildung 12.5a dargestellt ist. Ein realer Schalter hingegen leitet oder sperrt nicht instantan wie in Abb. 12.5b vereinfacht dargestellt ist. Stattdessen treten Latenzen und Verluste auf. Im Durchlassbetrieb liegt immernoch eine kleine Spannung an (Durchlasswiderstand $R > 0$) und im Sperrbetrieb fließt immernoch ein kleiner Strom (Sperrleitwert $G > 0$). Dadurch kommt es zu Verlusten im Schalter, insbesondere während der Übergangphasen, wenn sowohl Spannung als auch Strom anliegen.

Die Latenzen und Verluste realer Schalter resultieren aus deren resistiven, induktiven und kapazitiven Eigenschaften. Aufgrund dieser Eigenschaften ist Schalten real betrachtet - schalterintern - immer mit Ausgleichsvorgängen verbunden. In der Praxis werden solche Effekte, wenn unerwünscht, als parasitär bezeichnet.

Abbildung 12.6 zeigt exemplarisch einen MOSFET als Schalter zur Veranschaulichung. Zum Vergleich ist der MOSFET einmal ideale (ohne) und einmal real (mit kapazitiven Effekten) dargestellt.

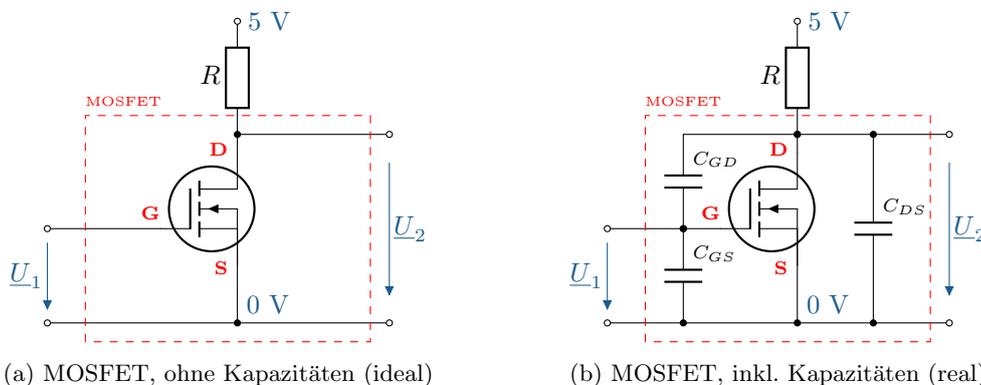


Abbildung 12.6: Vergleich: Schaltung mit MOSFET, ohne (ideal) und mit kapazitiver Effekte (real)

Die kapazitiven Effekte zwischen den Anschlüssen des MOSFETs führen zu einer Verzögerung beim Schalten, da die jeweiligen Kapazitäten während des Schaltens erst geladen beziehungsweise entladen werden müssen. Das MOSFET-Beispiel dient lediglich zur Veranschaulichung der Unterschiede zwischen idealen und realen Schaltern. Ausgleichsvorgänge während Schaltaktionen werden in diesem Modul nicht weiter betrachtet. Mit Schaltvorgängen sind immer die Ausgleichsvorgänge nach dem Schalten gemeint.

12.2 Grundlagen der Berechnung von Schaltvorgängen

Grundlage der Berechnung von Schaltvorgängen sind Differentialgleichungen (DGL).

Die Aufstellung der Kirchhoffschen Regeln bei Schaltungen mit Energiespeichern führt zu DGL von Spannungen an beziehungsweise Strömen in den jeweiligen Komponenten. Das bedeutet, dass die jeweiligen Momentanwerte von Spannungen und Strömen nicht ausreichen, um den Zustand des Systems zu beschreiben.

Die Zeitverläufe von Spannungen und Strömen während Schaltvorgängen lassen sich durch Lösung ihrer jeweiligen DGL bestimmen.

Lernziele: Grundlagen

Studierende lernen:

- grundlegende Begriffe kennen und verstehen (Definitionen)
- Berechnungsmethoden im Zeit- und Bildbereich (Laplace) kennen
- DGLen für Schaltungsgrößen von LZI-Schaltungen aufzustellen
- DGL-Eigenschaften aus Schaltungseigenschaften abzuleiten
- Zeitverläufe bei Schaltvorgängen zu bestimmen (DGLen zu lösen)

12.2.1 Definitionen

Tabelle 12.1 zeigt eine Übersicht wichtiger Begriffe mit Kurzform der hier verwendeten Definitionen. Bestimmte Begriffe werden in den folgenden Abschnitten genauer erläutert und diskutiert.

Speziell die hier verwendeten Definitionen für Transienten, Ausgleichs-, Einschwing- und Schaltvorgänge werden in Abschnitt 12.2.1.2 in Abgrenzung zur Definition in anderen Quellen erläutert und die Wahl der hier getroffenen Definition begründet.

Die Tabelle dient als Referenz für die Verwendung der Begriffe in diesem Modul und kann nach Art eines Glossars verwendet werden.

12.2.1.1 Erläuterungen

ZUSTÄNDE:

ausgeglichen: Beschreibt einen stationären Zustand nach einem Ausgleichsvorgang.

eingeschwungen: Beschreibt einen stationären Zustand direkt nach einem Einschwingvorgang. Der Begriff wird in der Regel auch für stationäre Zustände nach Ausgleichsvorgängen verwendet, bei denen keine Schwingung auftritt, und zudem unabhängig von der Energieflussrichtung.

Tabelle 12.1: Gruppierte Begriffe mit Definitionen in Kurzform

G.	Begriffe	Definitionen
allg.	Schalten Schalter	„durch Betätigen eines Schalters in einen (Betriebs)zustand versetzen“ [duden] Komponente, hier zum öffnen oder schließen einer elektr. Verbindung
Eigenschaften	harmonisch ¹ periodisch ¹ zeitinvariant ¹ gewöhnlich ² homogen ² linear ² Ordnung ²	sinusförmig, beschreibt Schwingung der Form: $y(t) = \hat{X} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ „in gleichen Abständen, regelmäßig [auftretend, wiederkehrend]“ [duden] invariant/unveränderlich über die Zeit Ableitung(en) nach einer unabhängigen Variable (z.B. Zeit t), Vgl. partiell Form gewöhnlich: $\sum a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} f_i(y(t)) \stackrel{!}{=} 0$ mit Störfunktion $b = 0$ Form gewöhnlich: $\sum a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} y(t) = b(t)$ d.h. mit $\frac{d^i}{dt^i} y(t)$ linear n [1] d.h. höchstens Ableitung der Ordnung n in DGL
Größen	Abklingkonst. Dämpfungskonst. Eigenfreq. Resonanzfreq. Zeitkonstante	δ [s^{-1}] Maß für die Dämpfung linear gedämpfter Schwingungssysteme δ [s^{-1}] synonym zu Abklingkonstante $f_{0/d}$ [Hz] Freq. mit der ein System (un/)gedämpft selbst schwingen kann f_0 [Hz] Freq. bei der ein System in Resonanz tritt, gleich unged. Eigenfreq. τ [s] Maß für Steilheit von Exponentialverläufen der Form $e^{-t/\tau}$
Vorgänge	Ausgleichsvorg. Ausschwingvorg. Einschwingvorg. Schaltvorg. Transiente	Vorgang in einem System, dass einen stationären Zustand anstrebt Ausgleichsvorgang, schwingend, exergon (spontan) Ausgleichsvorgang, schwingend, endergon (nicht spontan) nicht stationärer Zustand nach Schalten Ausgleichsvorgang (synonym), Vgl. transient (adj.)
Zustände	eingeschwungen persistent stationär transient	stationär nach Einschwingvorgang stationär von Lat. <i>persistere</i> , Dt. verharren, Ggt. von transient zeitlich konstante/periodische Größen (z.B. bei DC/AC) [hagmann] übergangsweise von Lat. <i>transire</i> , Dt. (hin)übergehen, Ggt. von persistent

¹allgemein²bezogen auf DGL

stationär: Zustandsbeschreibung für zeitlich konstante Größen (z.B. bei Gleichspannungsversorgung) oder zeitlich periodische Größen (z.B. bei Wechselspannungsspannungs) [**hagmann**]

GRÖSSEN:

Die Größen **Abklingkonstante**, **Dämpfungskonstante**, **Eigenfrequenz**, **Resonanzfrequenz** und **Zeitkonstante** sind wichtige Kenngrößen für die Beschreibung des Schwingverhaltens von Systemen. Sie sind in Kapitel 12.3.3 am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises genauer erläutert.

FÄLLE:

Die Fallunterscheidung von **aperiodischem Fall**, **aperiodischem Grenzfall**, **periodischem Fall** bei linearen, zeitinvarianten, schwingungsfähigen Systemen ist in Kapitel 12.3.3.1 am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises erläutert.

12.2.1.2 Diskussion und Abgrenzung

Dieser Abschnitt ist für das Verständnis der Modulhalte nicht zwingend erforderlich und als Ergänzung zu verstehen. Da einige der in Tabelle 12.1 aufgeführten Begriffe in der Literatur unterschiedlich verwendet werden, ist die Wahl der Definitionen hier begründet und abgegrenzt.

Verlinkung deutsch- und englischsprachiger Wikipediaartikel [Stand 15.11.2024]:

- dt. Ausgleichsvorgang \leftrightarrow engl. transient state
- dt. Einschwingvorgang \rightarrow engl. transient response \rightarrow dt. Transiente
- dt. Transiente \leftrightarrow engl. transient response

VORGÄNGE:

Ausgleichsvorgang, m.

- Weißgerber: Vorgang von stationärer Zustand nach Eingriff bis stationärer Zustand
- Hagmann: Vorgang ab Veränderung bis stationär
- hier, angelehnt an Hagemann: Vorgang wenn bestimmter stationärer Zustand angestrebt wird

Wie Hagmann, nur dass quasi „unterbrochene“ Ausgleichsvorgänge ebenfalls als Ausgleichsvorgänge bezeichnet werden. Diese Definition schließt Anwendungsfälle in der Leistungselektronik wie bei Hoch- und Tiefsetzstellern unter der Annahme von realen Bauteilen ($R > 0$) mit ein.

Schaltvorgang, m.

- Weißgerber: Ausgleichsvorgang nach Schalten[**weissgerber3**]
- Hagmann: Synonym Ausgleichsvorgang, Unmittelbar nach Schaltungsänderung[sic!], geht über in stationären Zustand[**hagmann**]
- hier: Ausgleichsvorgang ausgelöst durch Schalten (angelehnt an Hagmann)

In diesem Modul bezieht sich der Begriff Schaltvorgang nur den Vorgang nach(!) dem Schalten, welche durch dieses ausgelöst werden. Mit der hier verwendeten Definition lassen sich vom Schalten unabhängige Ausgleichsvorgänge ausschließen.

Ausschwingvorgang, m.

Bezeichnet hier exergone Ausgleichsvorgänge, das heißt Ausgleichsvorgänge, die sich bei positiver Netto-Energieabfuhr vollziehen. Entsprechend Wortbedeutung im wörtlichen Sinn, ist ein Ausschwingvorgang das Gegenstück zum Einschwingvorgang.

Einschwingvorgang, m.

Bezeichnet hier im engeren Sinn endergone Ausgleichsvorgänge, das heißt Ausgleichsvorgänge, die sich bei positiver Netto-Energiezufuhr vollziehen. Wird üblicherweise wie hier im weiteren Sinn synonym für alle Ausgleichsvorgänge verwendet. Bezieht sich hier wie üblich sowohl auf Abläufe, die schwingend als auch nicht schwingend verlaufen. [Vgl. der Worte schwingen, Schwung] Die Definition ist gewählt, um eine feinere Klassifizierung möglicher Ausgleichsvorgänge zu erleichtern.

Transiente, w.

Hier synonym zu Ausgleichsvorgang betrachtet, frei übersetzbar mit „Übergang“ aus dem Lateinischen. Vergleich transient (adj.) von Lat. *transire* Dt. (hin-)über(/durch)-gehen, Gegenteil von persistent (adj.) von Lat. *persistere* Dt. verharren.

12.2.2 Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge

Zur Berechnung von Schaltvorgängen stehen prinzipiell zwei Methoden zur Verfügung. Beide Methoden basieren auf der Lösung der Differentialgleichung (DGL) einer Schaltung.

Die Lösung der DGL erfolgt:

- im Zeitbereich (durch Zerlegung in flüchtigen und eingeschwungenen Zustand) **oder**
- im Bildbereich (mit Laplace-Transformation).

Abbildung 12.7 stellt den Ablauf zur Berechnung im Zeit- und im Bildbereich zum Vergleich als Flussdiagramm gegenüber.

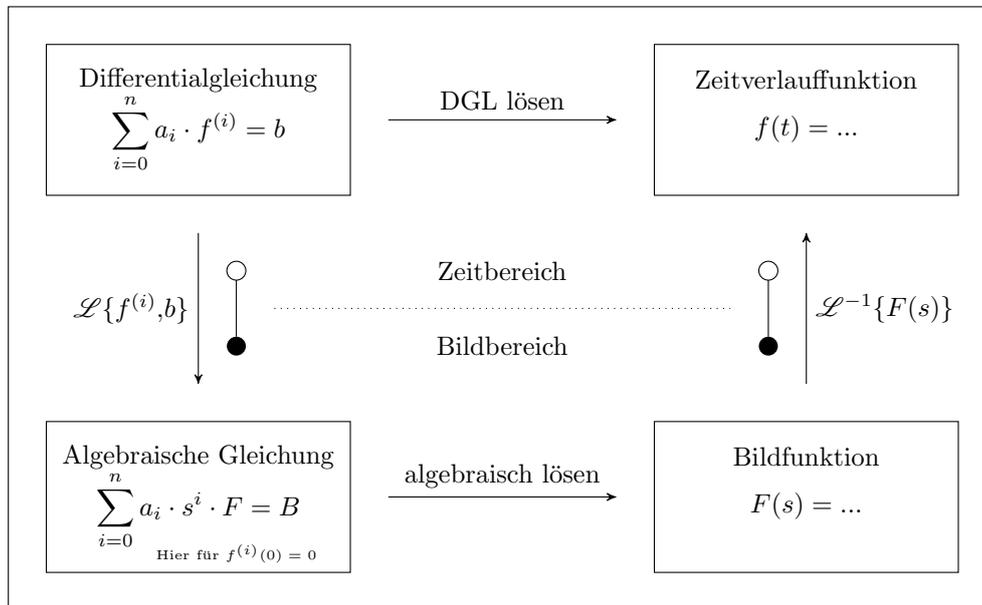


Abbildung 12.7: Flussdiagramm, Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge

Die Benennung und Darstellung beider Methoden sind angelehnt an [weissgerber3], finden sich jedoch in ähnlicher Form auch in anderen Lehrbüchern zur Elektrotechnik, Regelungstechnik und Systemtheorie.

Die Lösung der DGL im Zeitbereich ist die allgemein anwendbare Methode und wird in diesem Modul ausführlich behandelt. Der Rechenaufwand kann je nach Komplexität der DGL stark variieren. Die Methode basiert auf der Zerlegung in einen flüchtigen und einen eingeschwungenen Zustand.

Die Lösung der DGL im Bildbereich mithilfe der Laplace-Transformation ist eine spezielle Methode, die bei linearen, zeitinvarianten Systemen mit Energiespeichern angewendet werden kann. Sie bietet sich bei verschwindenden Anfangsbedingungen (Vgl. Kapitel 12.2.4) an. In einigen Fällen kann die Methode den Rechenaufwand reduzieren, da die transformierte DGL algebraisch gelöst werden kann. Die Methode wird in diesem Modul nicht weiter behandelt.

Die Idee in den Bildbereich zu wechseln findet sich wieder in Abschnitt 12.2.3 bei der Aufstellung einer DGL und in Abschnitt 12.2.4.3 bei der Anwendung komplexer Wechselstromrechnung (Vgl. Modul 7) zur Bestimmung eingeschwungener Zustände.

12.2.3 Differentialgleichungen

Zu Beginn der Berechnung von Schaltvorgängen steht die Aufstellung der Differentialgleichungen (DGL). Die DGL für Spannungen und Ströme basieren basieren prinzipiell auf den Kirchhoffschen

Regeln:

$$\text{Knotenregel: } \sum_{j=1}^n i_j = 0 \quad \text{mit } n \text{ Stromzweigen im Knoten} \quad (12.1)$$

$$\text{Maschenregel: } \sum_{k=1}^m u_k = 0 \quad \text{mit } m \text{ Teilspannungen in Masche} \quad (12.2)$$

und den folgenden Strom-Spannungs-Beziehungen (Komponenten-Gl.) für R , L und C .:

$$\text{Widerstand: } u_R(t) = R \cdot i_R(t) \quad (12.3)$$

$$\text{Induktivität: } u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t) \quad (12.4)$$

$$\text{Kapazität: } i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) \quad (12.5)$$

In welcher Reihenfolge die Gleichungen am geschicktesten aufgestellt, umgeformt und ineinander eingesetzt werden ist abhängig von der jeweiligen Schaltungstopologie und der Zielgröße.

Ähnlich wie beim Lösen von DGLen (Vgl. Kap. 12.2.2 und Abb. 12.7 zu Berechnungsmethoden) kann auch beim Aufstellen der DGLen sowohl im Zeitbereich als auch im Bildbereich vorgegangen werden. Die Methode im Zeitbereich ist die in diesem Modul ausführlicher behandelte Methode. Abbildung 12.8 zeigt schematisch beide Vorgehensweisen im Vergleich.

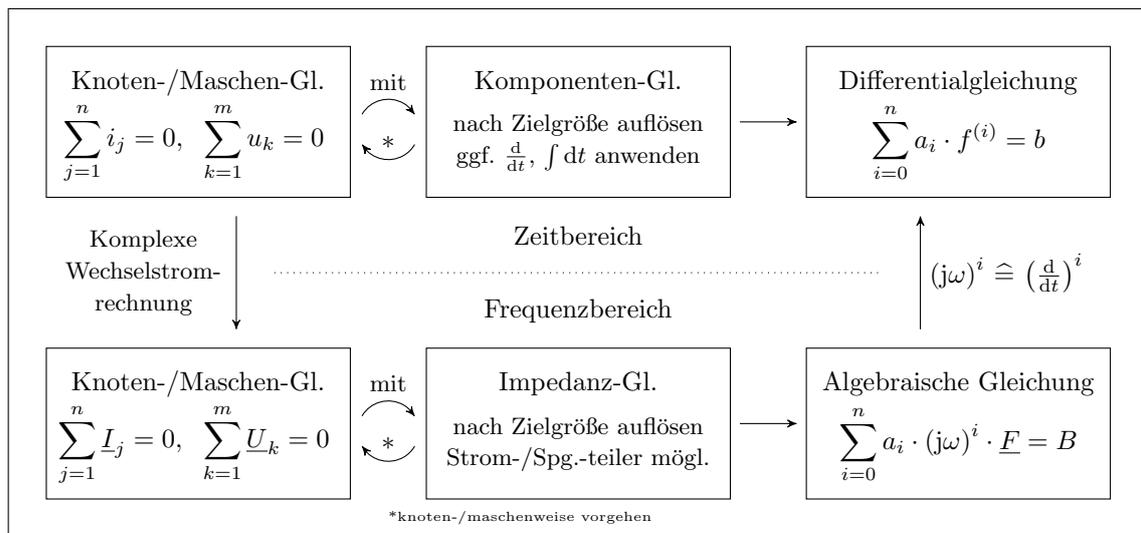


Abbildung 12.8: Flussdiagramm, Aufstellungsmethoden für Differentialgleichungen

Bei einfachen Schaltungen mit einer einzelnen Masche (reine Reihenschaltung) oder zwei einzelnen Knoten (reine Parallelschaltung) lassen sich die Differentialgleichungen direkt aus den Kirchhoffschen Regeln und den Bauteilgleichungen aufstellen (Zeitbereich). Gegebenenfalls muss die aufgestellte Gleichung noch differenziert werden, um die benötigten Ableitungen zu erhalten (beziehungsweise um Integrale zu entfernen). Bei komplexeren Netzwerken ist der Rechenaufwand deutlich größer.

Eine Möglichkeit den Rechenaufwand zu minimieren, ist mit Methoden der komplexen Wechselstromrechnung zu arbeiten (Bildbereich). Der Ansatz funktioniert ebenso für DC-Schaltungen, da nicht wirklich mit Frequenzen gerechnet wird. Sinn und Zweck ist die Aufstellung der DGL durch algebraische Umformung der komplexen Kirchhoffschen Regeln. Hierbei werden die Schaltungselemente

durch Impedanzen respektive Admittanzen ersetzt und die zu untersuchende Größe beispielsweise durch einen komplexen Spannungsteiler bestimmt. Die Umformung zur DGL geschieht durch Rücktransformation der komplexen Größen in den Zeitbereich. $j\omega$ wird dabei durch $\frac{d}{dt}$ ersetzt.

Der Vorteil des Ansatzes im Bildbereich ist, dass komplexe Spannungs- und Stromteiler anwendbar sind. Dadurch bietet sich der Ansatz vor allem bei gemischten Reihen- und Parallelschaltungen an.

Ein ähnlicher Ansatz wäre das Maschenstromverfahren in Matrixform mit komplexen Größen. [Vgl. Modul 7] Dieses wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter betrachtet.

12.2.3.1 Eigenschaften und allgemeine Form

In allen hier untersuchten Schaltungen kommen ausschließlich folgende Komponenten zum Einsatz: Kapazitäten, Induktivitäten, ohmsche Widerstände, ideale Spannungsquellen, ideale Stromquellen, ideale elektrische Leiter und ideale Schalter. In den Schaltungen kommen keine weiteren Bauteile wie z.B. Transistoren, Dioden oder Operationsverstärker vor.

Zur Berechnung von Schaltvorgängen wird in diesem Modul stets von idealen Bauteilen in isothermen, homogenen, isotropen Medien ausgegangen. Weitere Einflüsse wie Temperaturabhängigkeiten, nichtlineare Effekte oder Ähnliches werden nicht betrachtet.

Die aufgezählten Komponenten sind alle **linear** und **zeitinvariant**. Die gleichen Eigenschaften gelten auch für Schaltungen, die sich nur diesen Komponenten zusammensetzen. Das heißt, es handelt sich um lineare, zeitinvariante Systeme (LZI-Systeme). Die Zeitinvarianz für Schalter gilt dabei eingeschränkt (abschnittsweise) für alle Zeiträume außerhalb von Schaltzeitpunkten und uneingeschränkt für alle anderen Komponenten.

Aus den Eigenschaften der Schaltungen lassen sich folgende für Eigenschaften der DGLs ableiten:

- **gewöhnlich** (nur abhängig von einer Variable, hier der Zeit)
- **linear** (Linearität der Schaltungselemente)
- **konst. Koeffizienten** $a_i = konst.$ (Zeitinvarianz der Schaltungselemente)
- **inhomogen** $b(t) \neq 0$ (bei Anregung durch Spannungs- oder Stromquellen)
- **homogen** $b(t) = 0$ (ohne Anregung durch Spannungs- oder Stromquellen)

Für eine betrachtete Schaltungsgröße y in Abhängigkeit der Zeit t ergibt sich daraus die folgende Form für gewöhnliche, inhomogene, lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b(t) \quad (12.6)$$

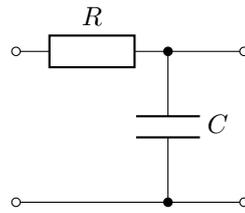
mit $a_i, b(t) \in \mathbb{R}; \quad i, n \in \mathbb{N}$

Mit der **Ordnung** n , der **Störfunktion** $b(t)$ und den **konstanten Koeffizienten** a_i .

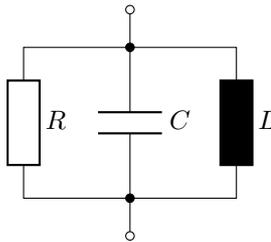
12.2.3.2 Ordnung von Differentialgleichungen

Der Aufbau einer Schaltung bestimmt die Form der Differentialgleichungen (DGLs) zur Beschreibung ihrer Systemgrößen (Ströme, Spannungen). Die Ordnung der DGL entspricht direkt der Anzahl an Energiespeichern, welche nicht zu einem Energiespeicher zusammengefasst werden können. [**weissgerber3**]

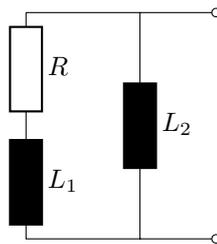
Abbildung 12.9 zeigt exemplarisch mehrere Schaltungen und die Ordnung der zugehörigen DGL.



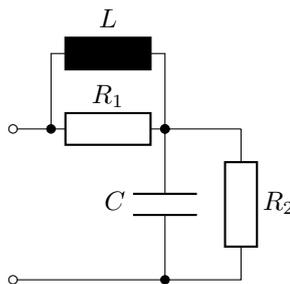
1 Energiespeicher \rightarrow DGL 1. Ord.



2 Energiespeicher \rightarrow DGL 2. Ord.



2 Energiespeicher \rightarrow DGL 2. Ord.



2 Energiespeicher \rightarrow DGL 2. Ord.

Abbildung 12.9: Beispiel Schaltungen und Ordnung der Differentialgleichung

Die Ordnung der DGL bestimmt die Anzahl der Konstanten in der allgemeinen Lösung der DGL.

12.2.4 Berechnungsverfahren im Zeitbereich

Die Berechnung von Schaltvorgängen im Zeitbereich basiert auf der Lösung der Differentialgleichungen (DGLs) für die Schaltungsgrößen. Allgemein existieren für DGLs unendlich viele Lösungen.

Wichtig für die Eingrenzung der allgemeinen Lösung ist die Kenntnis der **Anfangsbedingungen** (AB). Die AB sind Werte von Schaltungsgrößen zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 während des Beobachtungszeitraums (Schaltvorgang). Dabei handelt es sich beispielsweise um Spannungen oder Ströme einzelner Bauteile oder um deren Ableitungen.

Für DGL n -ter Ordnung sind n AB notwendig, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Sind die AB nicht explizit gegeben, können diese gegebenenfalls durch die Schaltungstopologie und den Zustand unmittelbar vor dem Schalten hergeleitet werden. Dabei ist zu unterscheiden, welche Schaltungsgrößen springen können und welche stetig sind.

Da es sich bei Induktivitäten und Kapazitäten um Energiespeicher handelt, ist deren Verhalten zu einem Zeitpunkt t abhängig von der bis dahin zu-/abgeführten Energie.

In kurzer Gegenüberstellung gilt mit $E = \int p(t) dt = \int u(t) \cdot i(t) dt$ und den Gl. 12.4 und 12.5:

$$\textbf{Kapazität:} \quad E_{el} = \frac{1}{2} C \cdot u^2 \quad \Rightarrow \quad u = \textit{stetig} \quad (\text{Speicher el. Energie}) \quad (12.7)$$

$$\textbf{Induktivität:} \quad E_{mag} = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \quad \Rightarrow \quad i = \textit{stetig} \quad (\text{Speicher mag. Energie}) \quad (12.8)$$

Da Energie sich nur mit endlicher Geschwindigkeit bewegen kann, gilt **Stetigkeit** für u_C und i_L :

$$u_{C,t-} = u_{C,t+} \quad i_{L,t-} = i_{L,t+} \quad (12.9)$$

$$\text{mit} \quad \lim_{\pm\infty \rightarrow t} u_C(t) = u_{C,t\pm} \quad \lim_{\pm\infty \rightarrow t} i_L(t) = i_{L,t\pm} \quad (12.10)$$

Das bedeutet, dass die Spannung einer Kapazität ebenso wie der Strom einer Induktivität unmittelbar vor dem Schalten gleich groß ist wie zu Beginn des folgenden Schaltvorganges.

12.2.4.1 Zerlegung von Ausgleichsvorgängen und Lösung der inhomogenen DGL

Der sich ergebende Zeitverlauf einer Größe $y(t)$ kann während eines Ausgleichsvorganges zerlegt werden in einen **flüchtigen Zustand** y_f und in einen **eingeschwungenen Zustand** y_e .

$$y(t) := y_f(t) + y_e(t) \quad (12.11)$$

Der eingeschwungene Zustand y_e beschreibt den stationäre Zustand, den die Größe y anstrebt. Der flüchtige Zustand y_f , auch freier Zustand genannt, repräsentiert den abklingenden Teil von y :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \quad y_e = \textit{stationär} \quad (12.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_f(t) = 0 \quad y_f = y - y_e \quad (12.13)$$

Abbildung 12.10 zeigt exemplarisch einen Ausgleichsvorgang mit Zerlegung einer Größe $y(t)$ in einen flüchtigen und eingeschwungenen Zustand. Die Darstellung entspricht dem Spannungsverlauf einer Kapazität beim Laden mit Gleichspannung über einen ohmschen Widerstand wie in Beispiel 12.2.

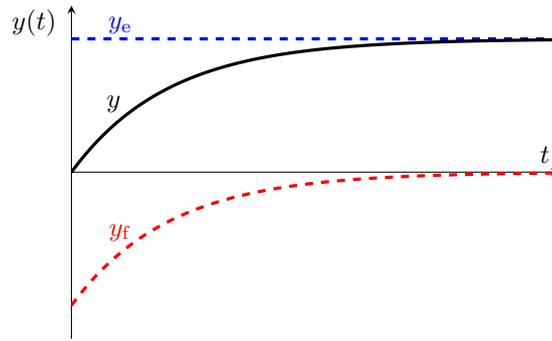


Abbildung 12.10: Ausgleichsvorgang zerlegt in eingeschwungenen und flüchtigen Zustand

Da die Größe $y(t)$ nach Gleichung 12.12 für $t \rightarrow \infty$ in $y_e(t)$ übergeht, muss $y_e(t)$ ebenfalls die DGL aus Gleichung 12.6 inklusive Störterm b erfüllen:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i(t)}{dt^i} y_e = b(t) \quad (12.14)$$

Ziehen wir die DGL für y_e aus Gl. 12.14 von der allgemeinen inhomogenen DGL aus Gl. 12.6 ab, erhalten wir mit der Zerlegung nach Gl. 12.11 die homogene DGL für den flüchtigen Zustand:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i(t)}{dt^i} y_f = 0 \quad (12.15)$$

Mathematisch entspricht die Zerlegung des Zeitverlaufs $y(t)$ in einen flüchtigen und eingeschwungenen Zustand der Zerlegung der **Lösung der inhomogenen DGL** y in die **Lösung der homogenen DGL** y_h (ohne Störterm) und in eine **partikuläre Lösung** y_p der inhomogenen DGL mit:

$$\text{homogene Lösung} \quad y_h = y_f \quad \text{flüchtiger Zustand} \quad (12.16)$$

$$\text{partikuläre Lösung} \quad y_p = y_e \quad \text{eingeschw. Zustand} \quad (12.17)$$

Die Zerlegung von Ausgleichsvorgängen in einen eingeschwungenen und einen flüchtigen Zustand findet sich in ähnlicher Form in den Lehrbüchern von Albach[albach], Hagmann[hagmann] und Weißgerber[weissgerber3].

12.2.4.2 Berechnung der homogenen Lösung

Für die Lösung von gewöhnlicher, linearer, homogener DGLen mit konstanten Koeffizienten der Form:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i}{dt^i} y_h = 0 \quad (12.18)$$

wird in der Regel der Ansatz einer Exponentialfunktion verwendet:

$$y_h(t) = K \cdot e^{\lambda t} \quad (12.19)$$

Dabei ist K eine Konstante und λ die Lösung des charakteristischen Polynoms und wird auch als **Eigenwert** bezeichnet. Durch Einsetzen des Exponential-Ansatzes in 12.18, Differenzieren und Aus-

klammern:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i}{dt^i} K \cdot e^{\lambda t} &= 0 \\ \left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot \lambda^i \right) K \cdot e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned} \quad (12.20)$$

kann das **charakteristische Polynom** aufgestellt werden:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \lambda^i = 0 \quad (12.21)$$

Die maximale Anzahl an Eigenwerten ist gegeben durch die Ordnung einer DGL. Da die Koeffizienten a_i reell sind, müssen die Eigenwerte λ_i ebenfalls reell sein, oder paarweise komplex konjugiert.

Bedingung: Um die homogene Differentialgleichung in Gleichung 12.18 zu erfüllen, muss der Realteil aller Eigenwerte negativ sein $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$. Nur dann konvergieren die Exponentialterme aus dem Ansatz in Gleichung 12.19 für $t \rightarrow \infty$.

Die **allgemeine homogene Lösung** y_h einer DGL n -ter Ordnung ist die Linearkombination von n linear unabhängigen Lösungen der homogenen DGL.

Die Form der Lösung hängt davon ab, ob es sich um unterschiedliche Eigenwerte, gleiche Eigenwerte (Mehrfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms) oder paarweise komplex konjugierte Eigenwerte handelt.

Sind alle Eigenwerte λ_i verschieden, ergibt sich die homogene Lösung zu:

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot e^{\lambda_i t} \quad \text{für } \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i, j \quad (12.22)$$

Bei paarweise komplex konjugierten Eigenwerten kann diese Lösung umformuliert werden. [Herleitung in Abschnitt 12.3.4.1.] Für $\lambda_1 = \lambda_2^* = a + jb \in \mathbb{C}$ ergibt sich für die homogene Lösung:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= K_1 \cdot e^{a \cdot t} \cdot \cos(b \cdot t) + K_2 \cdot e^{a \cdot t} \cdot \sin(b \cdot t) \\ &= C_0 \cdot e^{a \cdot t} \cdot \cos(b \cdot t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (12.23)$$

Sind alle Eigenwerte λ_i gleich ergibt sich die homogene Lösung zu:

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot t^{i-1} \cdot e^{\lambda t} \quad \text{für } \lambda = \lambda_i \quad \forall i \quad (12.24)$$

Bei gemischten Nullstellen ergibt sich die Lösung aus einer Kombination der obigen Lösungen wie in Beispiel 12.1 gezeigt ist.

Beispiel 12.1: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Dieses Beispiel ist nahezu unverändert übernommen aus [albach]. Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:

$$\frac{d^5}{dt^5} y(t) + 7 \frac{d^4}{dt^4} y(t) + 26 \frac{d^3}{dt^3} y(t) + 62 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 8 \frac{d}{dt} y(t) + 75 y(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^5 + 7 \cdot \lambda^4 + 26 \cdot \lambda^3 + 62 \cdot \lambda^2 + 85 \cdot \lambda + 75 = 0$$

besitzt eine einfache und zwei doppelte, konjugierte, komplexe Nullstellen:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1 + 2j, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -1 - 2j$$

Mit den Ansätzen aus Gl. 12.22, 12.23 und 12.24 ergibt sich die allgemeine Lösung zu:

$$y_h(t) = K_1 \cdot e^{-3t} + (K_2 + K_3 \cdot t) \cdot e^{-t} \sin(2t) + (K_4 + K_5 \cdot t) \cdot e^{-t} \cos(2t)$$

12.2.4.3 Berechnung der Partikulären Lösung

Für die Berechnung einer partikulären Lösung y_p einer inhomogenen DGL können verschiedene Methoden gewählt werden. Eine Möglichkeit ist einen Lösungsansatz ähnlich der Anregung zu wählen.

Speziell für Schaltvorgänge gilt, dass y_p dem eingeschwungenen Zustand entspricht wie in Abs. 12.2.4.1 hergeleitet wurde. Daraus folgt für lineare, zeitinvariante Schaltelemente:

- Bei DC-Anregung (Gleichgrößen) ist die partikuläre Lösung ebenfalls eine Gleichgröße
- Bei AC-Anregung (Wechselgrößen) ist die partikuläre Lösung ebenfalls eine Wechselgröße

Die Bestimmung kann durch Methoden der statischen Netzwerkberechnung erfolgen. Hierfür reichen die Kirchhoffschen Regeln, die Gleichungen für die Bauelemente R , L und C und den daraus resultierenden Strom- und Spannungsteilerregeln. Für Wechselgrößen werden die komplexen Wechselstrom-Äquivalente der aufgezählten Methoden verwendet.

Transformation von DGLen sinusförmiger Größen in den komplexen Zahlenraum:

Da bei AC-Anregung die DGL 12.14 für den eingeschwungenen Zustand für Wechselgrößen gilt, kann die DGL in den komplexen Zahlenraum transformiert werden. Das Vorgehen entspricht der Transformation der differentiellen Strom- und Spannungsbeziehungen für R , L und C zu deren komplexen Strom- und Spannungsbeziehungen anhand deren jeweiligen Impedanz \underline{Z} respektive Admittanz \underline{Y} .

Eine sinusförmige Größe $y(t)$ mit Amplitude \hat{Y} und einem Nullphasenwinkel φ lässt sich mit komplexem Amplitudenzeiger (Phasor) $\underline{\hat{Y}}$ wie folgt beschreiben [Vgl. Modul 7]:

$$y(t) = \hat{Y} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \left\{ \underline{\hat{Y}} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\hat{Y}} = \hat{Y} \cdot e^{j\varphi}$$

Ableitungen nach der Zeit $\frac{d}{dt}$ werden im komplexen Zahlenraum durch $j\omega$ ersetzt:

$$\frac{d}{dt} y(t) = \hat{Y} \cdot \omega \cdot \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad j\omega \cdot \underline{\hat{Y}} = \hat{Y} \cdot \omega \cdot e^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

Der Faktor $j\omega$ entspricht rücktransformiert dem Vorfaktor ω und einer Phasenverschiebung von $\pi/2$. Dadurch gilt allgemein bei DGLen sinusförmiger Größen (Index ac) der Form in Gleichung 12.6:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \left(\frac{d}{dt}\right)^i y_{ac} = b_{ac} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=0}^n a_i \cdot (j\omega)^i \cdot \underline{\hat{Y}} = \underline{\hat{B}} \quad (12.25)$$

Alternativ kann auch der Imaginärteil komplexer Amplitudenzeiger zur Darstellung von sinusförmiger Wechselgrößen verwendet werden. [Vergleich Modul 7 - Periodische Größen]

12.2.4.4 Zusammenfassung

Das Berechnen von Ausgleichsvorgängen im Zeitbereich besteht zum einen im Aufstellen einer passenden DGL und zum anderen auf dem Lösen der aufgestellten DGL. Merkbox 635 fasst die die Berechnung von Ausgleichsvorgängen im Zeitbereich zu fünf Schritten zusammen. Die Schritte sind stark angelehnt die Vorgehensweise von Weißgerber [weissgerber3].

Merke: Verfahren für DGL

1. Differentialgleich. aufstellen	(lin., gew.)	$\sum a_i \cdot \frac{d^i y}{dt^i} = b$
2. Flüchtiger Zustand	(homo. Lsg.)	$y_f \stackrel{*}{=} \sum K_i' \cdot e^{\lambda_i t}$
3. Eingeschwung. Zustand	(part. Lsg.)	$y_e = y(t \rightarrow \infty)$
4. Überlagern	(allg. Lsg.)	$y = y_f + y_e$
5. Konstante(n) bestimmen	(Anfangsbed.)	$i_L, u_C = \text{stetig}$

* mit $K_i' = \begin{cases} K_i & \text{für } \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i, j \\ K_i \cdot t^k & \text{für } \lambda_i = \lambda_{i-k} \quad \text{mit } k \in [0, 1, \dots, m-1] \end{cases}$ (einfache NS)
(m-fache NS, k-ter gleicher EW)

Die Reihenfolge der Schritte 2. und 3. ist prinzipiell beliebig. In der Mathematik ist die gezeigte Reihenfolge üblicher mit der Bestimmung der allgemeinen homogenen Lösung vor der Lösung der partikulären Lösung(en). Aus elektrotechnischer Sicht kann es sich anbieten zunächst die den eingeschwungenen Zustand (partikuläre Lösung) zu bestimmen.

12.3 Schaltvorgänge im Zeitbereich berechnen

In diesem Kapitel werden Schaltvorgänge in elektrischen Schaltungen im Zeitbereich betrachtet. Es wird zwischen Schaltvorgängen bei Gleichspannung und Wechselspannung unterschieden. Die Betrachtung erfolgt für RC- und RL-Glieder, sowie RLC-Glieder.

Lernziele: Schaltvorgänge

Studierende lernen:

- Schaltvorgänge im Zeitbereich zu berechnen
- das Schaltverhalten von RC-, RL- und RLC-Gliedern kennen und verstehen
- die Möglichkeit kennen Schaltvorgänge bei AC-Anregung zu minimieren
- das Schwingverhalten von Schwingkreisen zu verstehen und zu analysieren

12.3.1 bei Gleichspannung

In diesem Kapitel werden Lade- und Entladevorgänge von Kapazitäten und Induktivitäten jeweils in Reihe mit einem Widerstand bei Gleichspannung berechnet und dargestellt.

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung folgen in Kapitel 12.3.2.

12.3.1.1 bei Kapazitäten

Beispiel 12.2 zeigt den Rechenweg zur Bestimmung des Spannungsverlaufs $u_C(t)$ einer zu Beginn entladenen Kapazität C beim Laden mit Gleichspannung für $t \geq 0$ über einen Widerstand R und den Zeitverlauf des Ladestroms $i(t)$. Die angewandte Berechnungsmethode entspricht dem Verfahren für DGL im Zeitbereich nach Merksatz 635.

Aus den Ergebnissen ablesen lässt sich die exponentielle Annäherung von $u_C(t)$ an die Anregung U_q :

$$u_C(t) = U_q \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{12.26}$$

und der exponentielle Abfall von $i(t)$ respektive $u_R(t)$ ab deren Maximalwerten U_q/R und U_q :

$$i(t) = \frac{U_q}{R} \cdot e^{-t/\tau} \tag{12.27}$$

$$u_R(t) = U_q \cdot e^{-t/\tau} \tag{12.28}$$

bis die Kapazität geladen ist. Die **Zeitkonstante** τ bestimmt die Steilheit der exponentiellen Verläufe. Für das RC-Glied ergibt sich $\tau = RC$. Die Einheit für τ ist gleich jener der Zeit.

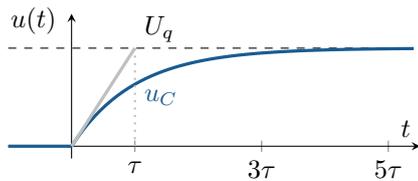


Tabelle 12.2: Typ. Werte Zeitkonstante τ

t	τ	3τ	5τ
$1 - e^{-t/\tau}$	63,2%	95,0%	99,3%
$e^{-t/\tau}$	36,8%	5,0%	0,7%

Abbildung 12.11: Exp. Annäherung und τ Faustregel: „Eingeschwungen“ nach 5τ

Wie in Abbildung 12.11 dargestellt, schneidet die Tangente von u_C im Punkt $u_C(t=0)$ den Endwert U_q zum Zeitpunkt $t = \tau$. Allgemein gilt in jedem Punkt exponentieller Annäherungen/Abfälle, dass die Tangente den Endwert nach τ erreicht.

Tabelle 12.2 zeigt typische Werte für exponentielle Annäherungen/Abfälle nach Vielfachen von τ . Die Werte sind relativ zum Maximalwert (Start- oder angestrebter Grenzwert). Als „eingeschwungen“ gilt ein solcher Verlauf nach 5τ .

Beispiel 12.3 zeigt den Rechenweg zur Bestimmung des Spannungsverlaufs $u_C(t)$ einer Kapazität C beim Entladen über einen Widerstand R und zugehörige Zeitverläufe. Hierbei ergeben sich analog zum Ladevorgang exponentielle Verläufe mit gleicher Zeitkonstante, jedoch mit unterschiedlichen Start- und Endwerten.

Der Rechenweg in den Beispielen 12.2 und 12.3 ist prinzipiell identisch. Beim Lade- und Entladevorgang unterscheiden sich lediglich die Anfangsbedingung $u_C(0)$ (bei Schaltzeitpunkt $t = 0$) und die Randbedingung $u_{C,e}$ (für $t \rightarrow \infty$). Dadurch ergeben sich unterschiedliche partikuläre Lösungen und andere Konstanten K in der allgemeinen Lösung.

Verallgemeinert lässt sich der Spannungsverlauf u_C einer Kapazität C beim Laden/Entladen mit Gleichspannung über einen Widerstand R ab einem Schaltzeitpunkt t_0 beschreiben durch:

$$u_C(t - t_0) = \underbrace{u_{C,e}}_{u_{C,p}} + \underbrace{\left(u_C(t_0) - u_{C,e}\right)}_{u_{C,h}} \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \tag{12.29}$$

Etwas umgeschrieben lässt sich der Spannungsverlauf auch recht anschaulich wie folgt formulieren:

$$u_C(t - t_0) = \underbrace{u_C(t_0)}_{\text{Startwert}} + \underbrace{(u_{C,e} - u_C(t_0))}_{\text{Differenz}} \cdot \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)}_{\text{Exp. Annäherung}} \quad (12.30)$$

Die allgemeine Lösung in Gleichung 12.29 beziehungsweise 12.30 gilt nur für Anregungen mit Gleichgröße. Die Lösung ist typisch für verlustbehaftete, lineare Systeme erster Ordnung (mit einem Energiespeicher), weshalb sie in ähnlicher Form auch bei RL-Gliedern auftritt.

Exkurs: DGL 1. Ordnung und Zeitkonstante τ

Die Exponentialform ist typisch für lineare Systeme erster Ordnung mit Energiespeicher und ergibt sich aus der Lösung der linearen, gewöhnlichen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Durch Umformung ($a_0 = 1$) lässt sich die Zeitkonstante τ direkt aus der DGL ablesen ($a_1 = \tau$):

$$\tau \cdot \frac{d}{dt} y(t) + y(t) = b(t) \quad (12.31)$$

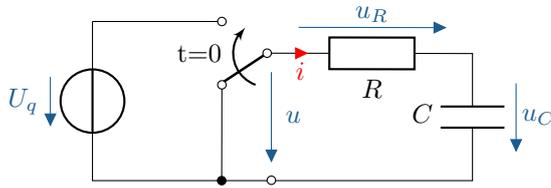
Dadurch lässt sich die homogene Lösung direkt angeben mit.:

$$y_h(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (12.32)$$

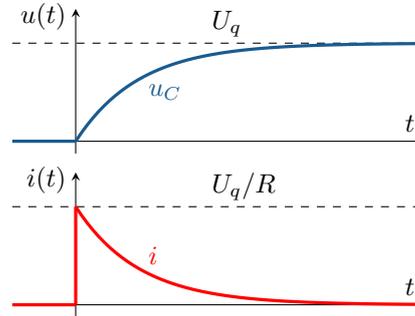
Die Zeitkonstante ist ein Maß für die Schnelligkeit, mit der ein System auf eine Änderung reagiert.

Beispiel 12.2: RC-Glied DC-Ladevorgang

Bestimmung von Spannung u_C und Ladestrom i der Kapazität C beim Laden über Widerstand R mit Gleichspannung U_q für $t \geq 0$. Die Kapazität ist zu Beginn entladen.



gegeben: $i(0), U_q, R, C$
 gesucht: $i(t), u_C(t)$



1.) DGL aufstellen: von $u_C(t)$ für $t > 0$

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_C ausgedrückt:

Masche : $u_R + u_C = U_q$ mit $u_R = R \cdot i$
 $R \cdot i + u_C = U_q$ mit $i = C \cdot \frac{d}{dt}u_C$

DGL : $R \cdot C \cdot \frac{d}{dt}u_C + u_C = U_q$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

DGL_h : $RC \cdot \frac{d}{dt}u_{C,h} + u_{C,h} = 0$ Ansatz: $u_{C,h} = K \cdot e^{\lambda t}$
 $K \cdot (RC \cdot \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}) = 0$

char. Pol.: $RC \cdot \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{RC}$

hom. Lsg. : $u_{C,h} = K \cdot e^{-t/\tau}$ mit $\tau = RC$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen) (für $t \rightarrow \infty$)

DGL_p : $RC \cdot \frac{d}{dt}u_{C,p} + u_{C,p} = U_q$ mit $u_{C,p} = \text{konst.}$

part. Lsg. : $u_{C,p} = U_q$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

$u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t)$ $u_C(t) = u_{C,f}(t) + u_{C,e}(t)$

allg. Lsg.: $u_C(t) = K \cdot e^{-t/\tau} + U_q$

5.) Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingungen einsetzen)

Anfangsbed. $u_C(0) = K + U_q \stackrel{!}{=} \frac{0}{1} \Rightarrow K = -U_q$

$u_C(t) = -U_q \cdot e^{-t/\tau} + U_q$

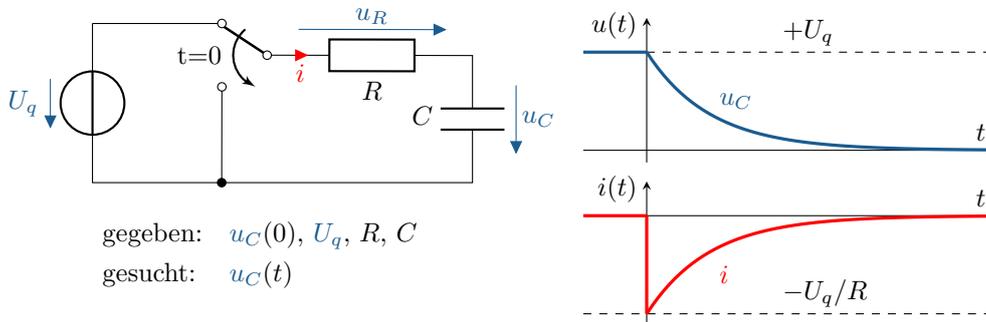
spez. allg. Lsg.: $u_C(t) = U_q \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

Strom i aus Spannung u_C bestimmen:

Strom: $i = \frac{U_q}{R} \cdot e^{-t/\tau}$ mit $i = C \cdot \frac{d}{dt}u_C$

Beispiel 12.3: RC-Glied Entladevorgang

Bestimmung von Spannung u_C und Strom i_C einer Kapazität C beim Entladen über einen Widerstand R für $t \geq 0$. Die Kapazität ist zu Beginn geladen auf U_q .



1.) **DGL aufstellen:** von $u_C(t)$ für $t > 0$, analog zu Beispiel 12.2

$$\begin{aligned} \text{Masche :} & \quad u_R + u_C = 0 & \text{mit } u_R = R \cdot i \\ \text{DGL :} & \quad RC \cdot \frac{d}{dt} u_C + u_C = 0 & \text{mit } i = C \cdot \frac{d}{dt} u_C \end{aligned}$$

2.) **Homogene Lösung, allg.:** (flüchtig) Identisch zu Beispiel 12.2

$$\text{hom. Lsg. :} \quad u_{C,h} = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = RC$$

Die partikulare Lösung $u_{C,p}$ entfällt, da u_C eingeschwungen ($t \rightarrow \infty$) null wird.

3. **Part. Lsg.:** (eingeschwungen) und 4. **Überlagerung:**

$$\text{allg. Lsg. :} \quad u_C = u_{C,h} + \cancel{u_{C,p}} \quad \text{mit } u_{C,p} = 0$$

5.) **Konstanten bestimmen:** (Anfangsbedingungen einsetzen)

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbed.} & \quad u_C(0) = K \cdot e^0 \stackrel{!}{=} U_q & \Rightarrow K = U_q \\ \text{spez. allg. Lsg.:} & \quad u_C(t) = U_q \cdot e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Strom i aus Spannung u_C bestimmen:

$$\text{Strom:} \quad i = -\frac{U_q}{R} \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } i = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$$

12.3.1.2 bei Induktivitäten

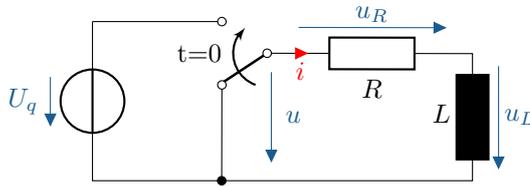
Der Rechenweg zur Bestimmung des Strom- oder Spannungsverlaufs bei Induktivitäten bei Anregung mit Gleichspannung ist identisch zu der Berechnung bei Kapazitäten in Kapitel 12.3.1.1. Das sich einstellende Zeitverhalten mit Exponentialverläufen und Zeitkonstanten ist analog zu dem dort beschriebenen.

Exemplarisch ist in Beispiel 12.4 und 12.5 der Ladestrom $i(t)$ und die Induktivitätsspannung $u_L(t)$ einer Induktivität L beim Laden über einen Widerstand R mit Gleichspannung U_q für $t \geq 0$ berechnet und dargestellt.

Die Beispiele unterscheiden sich lediglich im Rechenweg. In Beispiel 12.4 wird die DGL für $i(t)$ und in Beispiel 12.5 für $u_L(t)$ aufgestellt und gelöst.

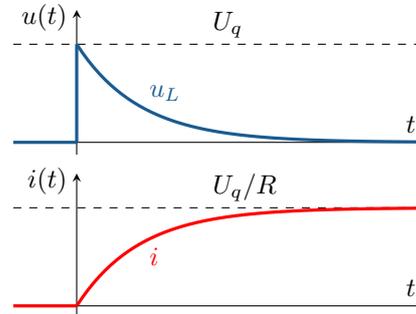
Beispiel 12.4: RL-Glied DC-Ladevorgang - Über DGL von i

Bestimmung von Ladestrom i und Spannung u_L der Induktivität L beim Laden über Widerstand R mit Gleichspannung U_q ab Schaltzeitpunkt $t = 0$. Zuvor fließt kein Strom.



gegeben: $i(0), U_q, R, L$

gesucht: $u_L(t), i(t)$



1.) DGL aufstellen: von $i(t)$ für $t \geq 0$

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R und u_L nach i umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \text{Masche :} \quad & u_R + u_L = U_q && \text{mit } u_R = R \cdot i \\ & R \cdot i + L \cdot \frac{d}{dt} i = U_q && \text{mit } u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i \\ \text{DGL :} \quad & \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i + i = \frac{U_q}{R} \end{aligned}$$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

$$\begin{aligned} \text{DGL}_h : \quad & \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i_h + i_h = 0 && \text{Ansatz: } i_h = K \cdot e^{\lambda t} \\ \text{char. Pol.:} \quad & \frac{L}{R} \cdot \lambda + 1 = 0 && \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L} \\ \text{hom. Lsg. :} \quad & i_h = K \cdot e^{-t/\tau} && \text{mit } \tau = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen) mit $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{DGL}_p : \quad & \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i_p + i_p = \frac{U_q}{R} && \text{mit } i_p = \text{konst.} \\ \text{part. Lsg. :} \quad & i_p = \frac{U_q}{R} \end{aligned}$$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

$$\text{allg. Lsg. :} \quad i(t) = \underbrace{K \cdot e^{-t/\tau}}_{i_h} + \underbrace{\frac{U_q}{R}}_{i_p} \quad \text{mit } i_h = i_f, \quad i_p = i_e$$

5.) Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingungen einsetzen)

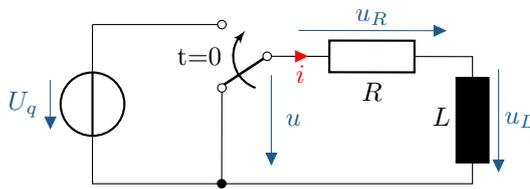
$$\begin{aligned} \text{Anfangsbed.} \quad & i(0) = K \cdot e^0 + \frac{U_q}{R} \stackrel{!}{=} 0 && \Rightarrow K = -\frac{U_q}{R} \\ \text{eindeut. Lsg.:} \quad & i(t) = \frac{U_q}{R} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \end{aligned}$$

Spannung u_L aus Strom i bestimmen:

$$\text{Spannung:} \quad u_L = U_q \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i$$

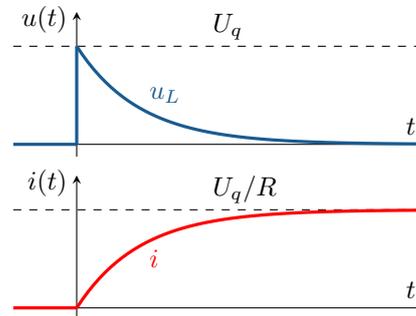
Beispiel 12.5: RL-Glied DC-Ladevorgang - Über DGL von u_L

Bestimmung von Spannung u_L und Ladestrom i der Induktivität L beim Laden über Widerstand R mit Gleichspannung U_q für $t \geq 0$. Der Stromkreis ist vor $t = 0$ unterbrochen.



gegeben: $i(0), U_q, R, L$

gesucht: $u_L(t), i(t)$



1.) DGL aufstellen: von $u_L(t)$ für $t \geq 0$

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_L ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \text{Masche :} \quad & u_R + u_L = U_q && \text{mit } u_R = R \cdot i \\ & R \cdot i + u_L = U_q && \left| \cdot \frac{d}{dt} \right. \\ & R \cdot \frac{u_L}{L} + \frac{d}{dt} u_L = \frac{d}{dt} U_q && \text{mit } u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i \\ \text{DGL :} \quad & \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} u_L + u_L = 0 \end{aligned}$$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

$$\begin{aligned} \text{DGL}_h : \quad & \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} u_{L,h} + u_{L,h} = 0 && \text{Ansatz: } u_{L,h} = K \cdot e^{\lambda t} \\ \text{char. Pol.:} \quad & \frac{L}{R} \cdot \lambda + 1 = 0 && \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L} \\ \text{hom. Lsg. :} \quad & u_{L,h} = K \cdot e^{-t/\tau} && \text{mit } \tau = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen) mit $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \text{DGL}_p : \quad & \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} u_{L,p} + u_{L,p} = 0 && \text{mit } u_{L,p} = \text{konst.} \\ \text{part. Lsg. :} \quad & u_{L,p} = 0 \end{aligned}$$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

$$\begin{aligned} & u_L(t) = u_{L,h}(t) + \cancel{u_{L,p}(t)} && u_L(t) = u_{L,f}(t) + \cancel{u_{L,e}(t)} \\ \text{allg. Lsg.:} \quad & u_L(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

5.) Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingungen einsetzen)

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbed.} \quad & i(0) = \frac{u_R(0)}{R} \stackrel{!}{=} 0 && \Rightarrow u_L(0) = U_q - \cancel{u_R(0)} \\ & u_L(0) = K \cdot e^{-0} \stackrel{!}{=} U_q && \Rightarrow K = U_q \\ \text{eindeut. Lsg.:} \quad & u_L(t) = U_q \cdot e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Strom i aus Spannung u_L bestimmen:

$$\text{Strom:} \quad i = \frac{U_q}{R} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{mit } i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_q - u_L}{R}$$

Der Entladevorgang einer Induktivität L über einen Widerstand R ist ähnlich zum Ladevorgang über einen Widerstand R mit Gleichspannung U_q . Der Kurzschluss über R entspricht einer Spannungsquelle mit $U_q = 0$ V. Entladevorgang und Ladevorgang unterscheiden sich lediglich in den Anfangsbedingungen und dem Störterm der jeweiligen DGL. Die Zeitkonstante τ ist identisch für den Lade- und Entladevorgang. Auf eine detaillierte Berechnung wird daher an dieser Stelle verzichtet.

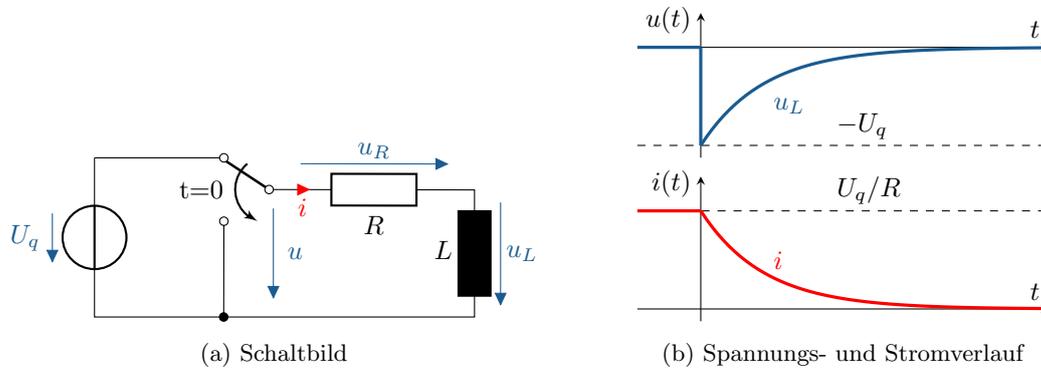


Abbildung 12.12: RL-Glied, Entladevorgang

Abbildung 12.12 zeigt das Schaltbild (a) und den Spannungs- und Stromverlauf (b) der Induktivität L beim Entladen über einen Widerstand R ab Schaltzeitpunkt $t = 0$. Die Induktivität ist vor dem Schalten in Reihe mit dem Widerstand R an eine Gleichspannungsquelle U_q angeschlossen. Zum Schaltzeitpunkt ist die Induktivität vollständig geladen (stationärer Zustand) und führt vor dem Schalten den Konstantstrom U_q/R .

Reale Induktivitäten lassen sich durch eine Reihenschaltung aus einer idealen Induktivität L und einem ohmschen Widerstand R_{Cu} modellieren, der den Kupferverlusten entspricht. Durch Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes R_{Fe} unmittelbar zur Induktivität L lassen sich zudem Eisenverluste modellieren.

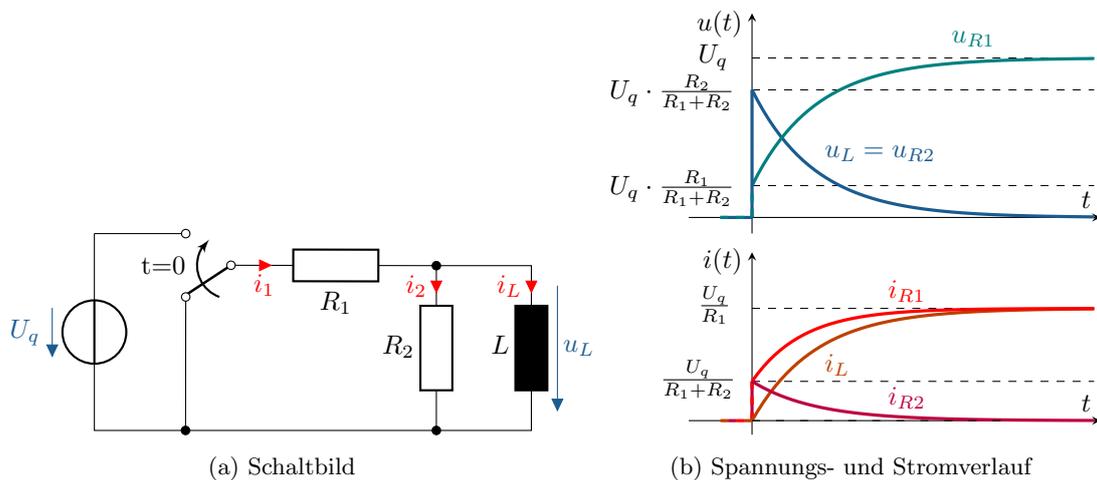


Abbildung 12.13: RL-Glied, realer Induktivität, Ladevorgang an idealer Spannungsquelle

Abbildung 12.13 zeigt das Schaltbild (a) einer realen Spule mit Induktivität L in Serie zu einem Widerstand R_{Cu} (hier R_1). Unmittelbar parallel zur Induktivität befindet sich der ohmsche Widerstand R_{Fe} (entspricht R_2). Die Induktivität wird ab $t = 0$ über eine ideale Konstantspannungsquelle U_q geladen und ist vorher vollständig entladen. Daneben abgebildet sind die zugehörigen den Spannungs-

und Stromverläufe (b).

Im Vergleich zum Ladevorgang einer reinen RL-Serienschaltung in Beispiel 12.5 springt die Spannung über der Induktivität nicht auf die ganze Quellenspannung sondern auf einen geringeren Wert begrenzt durch den Spannungsteiler $\frac{R_2}{R_1+R_2}$. Der Eingangsstrom macht bedingt durch die Eisenverluste einen Sprung zum Schaltzeitpunkt und nähert sich dann exponentiell dem Strom $\frac{U_q}{R_1}$. Der Strom durch R_2 springt beim Schalten auf den Wert $\frac{U_q}{R_1+R_2}$ und fällt dann exponentiell ab. Der Strom durch die Induktivität nähert sich exponentiell dem Strom $\frac{U_q}{R_1}$ an. Die Zeitkonstante beträgt $\tau = \frac{L}{R_1 \parallel R_2}$.

12.3.2 bei sinusförmiger Anregung

Die Vorgehensweise zur Berechnung von Schaltvorgängen bei sinusförmiger Anregung ist prinzipiell gleich zur Vorgehensweise bei gleichförmiger Anregung. Deshalb wird in diesem Kapitel nur auf die Besonderheiten bei sinusförmiger Anregung eingegangen und die Berechnung anhand eines Beispiels erläutert.

Die Differentialgleichungen bei Schaltungen mit Wechselspannungs- oder stromquellen unterscheiden sich gegenüber den Gleichspannungs- oder -stromfällen lediglich durch die rechte Seite der DGL, dem Störterm. Der Störterm ergibt sich aus der Anregung und ist bei sinusförmiger Anregung linearer, zeitinvarianter Systeme ebenfalls sinusförmig.

Aufgrund der Zeitabhängigkeit sinusförmiger Anregungen, ist der exakte Schaltzeitpunkt entscheidend für das Verhalten des Systems. Präziser formuliert ist die Phasenlage der Anregung zum Schaltzeitpunkt entscheidend.

Am Beispiel eines RC-Gliedes wird in Kapitel 12.3.2.1 die Berechnung des Schaltvorgangs bei sinusförmiger Anregung gezeigt. Dabei wird die Abhängigkeit des Schaltvorgangs vom Schaltzeitpunkt und die Möglichkeit transientser Spitzenströme und -spannungen näher erläutert.

Exemplarisch ist in Beispiel 12.6 die Berechnung eines Schaltvorganges für ein RL-Glied bei Anregung mit Wechselspannung zusammenfassend präsentiert.

12.3.2.1 bei Kapazitäten

Zur Erläuterung der Besonderheiten von Schaltvorgängen bei sinusförmiger Anregung wird das Beispiel eines RC-Gliedes betrachtet. Die Berechnung erfolgt wie in Beispiel 12.2 nach Merksatz 635.

Eine Kapazität C wird über einen Widerstand R ab dem Schaltzeitpunkt $t = t_0$ an eine ideale Wechselspannungsquelle mit Spannung $u_q(t) = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$ angeschlossen. Die Kapazität C ist zu Beginn vollständig entladen. Abbildung 12.14 zeigt das Schaltbild dieser Anordnung.

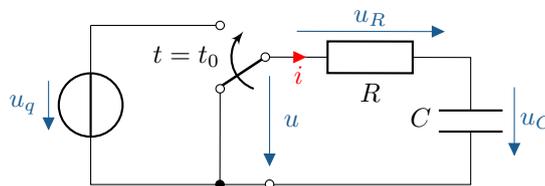


Abbildung 12.14: Schaltbild, RC-Glied (Reihe) nach Schalten an idealer Wechselspannungsquelle

1.) Differentialgleichung aufstellen:

Die inhomogene DGL von u_C für $t \geq t_0$ ergibt sich analog zu Beispiel 12.2 zu:

$$RC \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = u_q(t) \quad (12.33)$$

$$\text{mit } u_q(t) = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q) \quad (12.34)$$

Gegenüber Beispiel 12.2 ist lediglich der Störterm verändert. Der Gleichspannungsterm U_q ist hier durch den Wechselspannungsterm u_q ersetzt.

2.) Homogene Lösung, allgemein (flüchtiger Zustand):

Die homogene Lösung $u_{C,h}$ ist unabhängig vom Störterm und damit von der Anregung. Die Lösung ist aus Beispiel 12.2 übernommen mit Berücksichtigung des variablen Schaltzeitpunktes t_0 :

$$\begin{aligned} u_{C,h} &= K \cdot e^{-\frac{t'}{\tau}} & \text{mit } t' &= t - t_0 \\ &= K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} & \text{mit } \tau &= RC \end{aligned} \quad (12.35)$$

Da der Exponentialansatz erst ab Schaltzeitpunkt t_0 gilt, wird dieser von der Zeit t subtrahiert.

3.) Partikuläre Lösung (eingeschwungener Zustand):

Die partikuläre Lösung $u_{C,p}$ entspricht bei sinusförmiger Anregung ebenfalls einer sinusförmigen Größe mit gleicher Frequenz wie die Anregung wie in Kapitel 12.2.4.3 beschrieben ist. Der eingeschwungene Zustand lässt sich mittels komplexem Amplitudenzeiger $\hat{U}_{C,p}$ wie folgt beschreiben:

$$u_{C,p} = \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,p}) \quad (12.36)$$

$$= \text{Re} \left\{ \hat{U}_{C,p} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad \text{mit } \hat{U}_{C,p} = \hat{U}_{C,p} \cdot e^{j\varphi_{C,p}} \quad (12.37)$$

Die Amplitude $\hat{U}_{C,p}$ und der (Last-)Phasenwinkel $\varphi_{C,p}$ lassen sich gemäß komplexen Spannungsteiler bestimmen.

$$\begin{aligned} \hat{U}_{C,p} &= \hat{U}_q \cdot \frac{Z_C}{R + Z_C} = \hat{U}_q \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{\hat{U}_q}{1 + j\omega RC} \quad \text{mit } \hat{U}_q = \hat{U}_q \cdot e^{j\varphi_q} \end{aligned} \quad (12.38)$$

Für die Amplitude $\hat{U}_{C,p}$ und die Phase $\varphi_{C,p}$ folgt aus Gl. 12.38:

$$\hat{U}_{C,p} = \frac{\hat{U}_q}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi_{C,p} = \varphi_q - \arctan(\omega RC) \quad (12.39)$$

4.) Inhomogene Lösung, allgemein (Überlagerung):

Aus der Überlagerung von Gl. 12.35 und 12.36 folgt die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$\begin{aligned} u_C &= u_{C,h} + u_{C,p} \\ &= K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,p}) \end{aligned} \quad (12.40)$$

5.) Konstanten bestimmen (Anfangsbedingung):

Aus der Anfangsbedingung, dass die Kapazität zu Beginn entladen ist, folgt für die Konstante K :

$$\begin{aligned} u_C(t_0) &\stackrel{!}{=} 0 \\ K \cdot e^{\cancel{0}} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,p}) &= 0 \\ K &= -\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,p}) \end{aligned} \quad (12.41)$$

Mit Gl. 12.41 eingesetzt in 12.40 ergibt sich die eindeutige Lösung für $u_C(t)$:

$$u_C(t) = \underbrace{-\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,p}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{u_{C,h}} + \underbrace{\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,p})}_{u_{C,p}} \quad (12.42)$$

An Gleichung 12.42 ist erkennbar, dass der flüchtige Zustand $u_{C,f} = u_{C,h}$ ab t_0 exponentiell gegen null strebt. Im Gegensatz zum DC-Fall (Beispiel 12.2) ist der Startwert der Exponentialkurve K aus Gleichung 12.41 abhängig von t_0 , da der eingeschwungene Zustand $u_{C,e} = u_{C,p}$ zeitabhängig ist.

Verhalten bei Variation des Schaltzeitpunktes/der Zeitkonstante:

Abbildung 12.15a zeigt den Spannungsverlauf der Anregung u_q bei einem Nullphasenwinkel φ_q von Null und den Spannungsverlauf der Kapazität u_C . Zum Vergleich ist u_C für zwei verschiedenen Schaltzeitpunkten t_0 gezeigt. Das ist einmal beim negativen Scheitelwert und einmal beim Nulldurchgang von $u_{C,p}$. u_C ist als Überlagerung des flüchtigen Zustandes $u_{C,h}$ (schwarz, gestrichelt) und des eingeschwungenen Zustandes $u_{C,p}$ (schwarz) dargestellt.

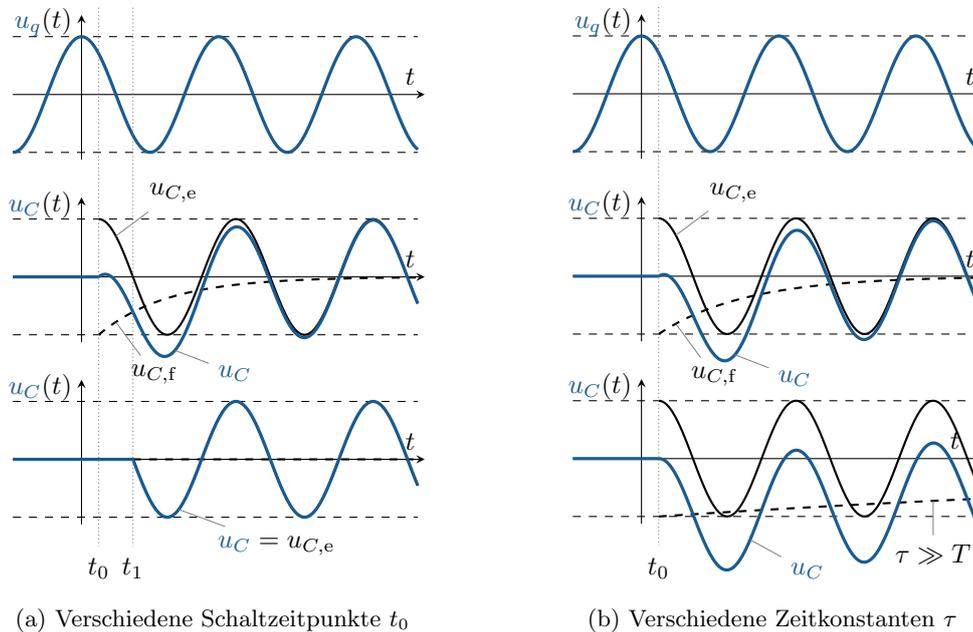


Abbildung 12.15: Spannungsverlauf u_C bei RC-Glied nach Schalten an Wechselspannungsquelle u_q

Wie zu erkennen ist, ist der Ausgleichsvorgang maximal ($|K| = \max.$), wenn die Differenz $|u_{C,p}(t_0) - u_C(t_0)|$ maximal ist. Erfüllt die $u_{C,p}$ bereits die Anfangsbedingung mit $u_{C,p}(t_0) \stackrel{!}{=} u_C(t_0)$, entfällt der flüchtige Zustand vollständig $K = 0 \Rightarrow u_{C,h} = 0$ und es kommt zu keinem Ausgleichsvorgang.

In Abbildung 12.15b wird der Spannungsverlauf u_C für verschiedenen Zeitkonstanten τ gezeigt. Einmal beträgt $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, einmal $\tau = \frac{20\pi}{\omega}$. In beiden Fällen ist t_0 so gewählt, dass der Ausgleichsvorgang maximal wird.

Bei großen Zeitkonstanten klingt der flüchtige Zustand langsamer ab, dadurch kann es bei ungünstigen Schaltzeitpunkten zu Überspannungen/-strömen kommen. Ist u_C wie im Beispiel nach Anfangsbedingung zu Beginn entladen ($u_C(t_0) = 0$), kann u_C bis zum doppelten Scheitelwert von $u_{C,p}$ ansteigen. Ist u_C hingegen zu Beginn bereits bis zum negativen/positiven Scheitelwert von $u_{C,p}$ geladen, kann u_C sogar bis zum dreifachen Scheitelwert von $u_{C,p}$ ansteigen.


Merke: Ausgleichsvorgänge bei AC-Anregung

Durch geschicktes Schalten können Ausgleichsvorgänge bei AC-Anregung vermieden werden. Bei großen Zeitkonstanten sind Überwerte bis zum doppelten/dreifachen Scheitelwert möglich.

12.3.2.2 bei Induktivitäten

Beispiel 12.6 zeigt exemplarisch die Berechnung eines Schaltvorgangs für ein RL-Glied bei Anregung mit Wechselspannung nach Merksatz 635.

Die Berechnung von Schaltvorgängen bei sinusförmiger Anregung für Induktivitäten erfolgt analog zu der Berechnung für Kapazitäten in Kapitel 12.3.2.1. Es gelten die gleichen Besonderheiten bezüglich Schaltzeitpunkten und möglicher transienter Spitzenströme und -spannungen wie bei Kapazitäten.

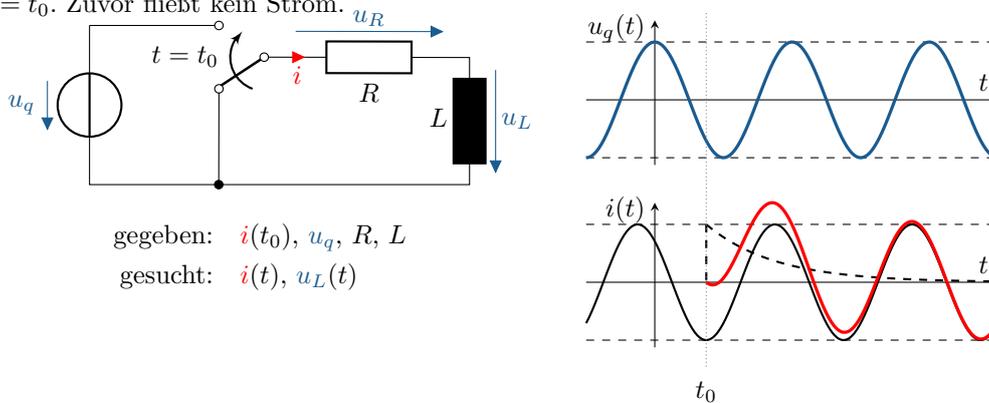
Im Beispiel ist die DGL der partikulären Lösung nach Gleichung 12.25 transformiert:

$$\begin{aligned} \text{DGL}_p: \quad & \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} \hat{i}_p + \hat{i}_p = \frac{u_q}{R} & \text{mit } u_q = \text{Re} \left\{ \hat{U}_q \cdot e^{j\omega t} \right\} \\ \text{transformiert:} \quad & \Leftrightarrow \frac{L}{R} \cdot j\omega \hat{I}_p + \hat{I}_p = \frac{\hat{U}_q}{R} & \text{mit } \hat{U}_q = \hat{U}_q \cdot e^{j\varphi_q} \end{aligned}$$

Der Ansatz bietet eine einfache Umstellung nach dem komplexen Amplitudenzeiger der partikulären Lösung und ist prinzipiell gleichwertig mit der Herleitung über komplexe Spannungsteiler wie sie in Gleichung 12.38 am Beispiel des RC-Gliedes gezeigt ist.

Beispiel 12.6: RL-Glied, Schaltvorgang mit Wechselspannungsquelle

Bestimmung des Strom i durch die Induktivität L in Reihe mit dem ohmschen Widerstand R bei Zuschalten der idealen Wechselspannungsquelle $u_q = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$ ab Schaltzeitpunkt $t = t_0$. Zuvor fließt kein Strom.



gegeben: $i(t_0)$, u_q , R , L

gesucht: $i(t)$, $u_L(t)$

1.) **DGL aufstellen:** von i für $t \geq t_0$, Lösung aus Bsp. 12.4

$$\text{DGL:} \quad \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i + i = \frac{u_q}{R} \quad \text{mit} \quad u_q = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$$

2.) **Homogene Lösung, allg.:** (flüchtig), Lösung aus Bsp. 12.6 für Schaltzeitpunkt t_0

$$\text{hom. Lsg.:} \quad i_h = K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

3.) **Partikuläre Lösung:** (eingeschwungen) mit $t \rightarrow \infty$, kompl. Wechselstromrechnung

$$\text{transf.:} \quad \frac{L}{R} \cdot j\omega \hat{I}_p + \hat{I}_p = \frac{\hat{U}_q}{R} \quad \text{mit} \quad \hat{U}_q = \hat{U}_q \cdot e^{j\varphi_q}$$

$$\text{Zeiger:} \quad \hat{I}_p = \frac{\hat{U}_q}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}} \quad \text{mit} \quad \hat{I}_p = \hat{I}_p \cdot e^{j\varphi_I}$$

$$\hat{I}_p = \frac{\hat{U}_q/R}{\sqrt{1 + (\omega \frac{L}{R})^2}} \quad \varphi_I = \varphi_q - \arctan\left(\omega \frac{L}{R}\right)$$

$$\text{part. Lsg.:} \quad i_p = \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) \quad \text{mit} \quad i_p = \text{Re} \left\{ \hat{I}_p \cdot e^{j\omega t} \right\}$$

4.) **Inhomogene Lösung, allg.:** (Überlagerung)

$$\text{allg. Lsg.:} \quad i = \underbrace{K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{i_h} + \underbrace{\hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)}_{i_p}$$

5.) **Konstanten bestimmen:** (AB einsetzen)

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbed.:} \quad i(t_0) &= K \cdot e^0 + \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow K &= -\hat{I}_p \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \end{aligned}$$

$$\text{eindeut. Lsg.:} \quad i(t) = -\hat{I}_p \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

Spannung u_L über der Induktivität L über $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i$ berechnen.

$$\text{Spannung:} \quad u_L(t) = R \cdot \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \omega L \cdot \hat{I}_p \cdot \sin(\omega t + \varphi_I)$$

12.3.3 bei RLC-Serienschwingkreisen

Systeme mit zwei unterschiedlichen Energiespeichern (Induktivität L und Kapazität C) sind prinzipiell schwingungsfähig. Daher werden RLC-Glieder auch als Schwingkreise oder Resonanzkreise bezeichnet. Die Schwingungsfähigkeit lässt sich anhand der Eigenwerte bestimmen und beschreiben. Ein anderer Ansatz ist die Betrachtung der (Schwingkreis-)Güte Q . [Vgl. Modul 8]

Abbildung 12.16 zeigt das Schaltbild eines RLC-Gliedes beim Laden mit konstanter Gleichspannung U_q . Daneben sind die Zeitverläufe der Kondensatorspannung für die drei möglichen Fälle dargestellt. Das sind der **aperiodischen Fall**, der **aperiodischen Grenzfall** und der **periodischen Fall** die in Kapitel 12.3.3.1 näher beschrieben sind.

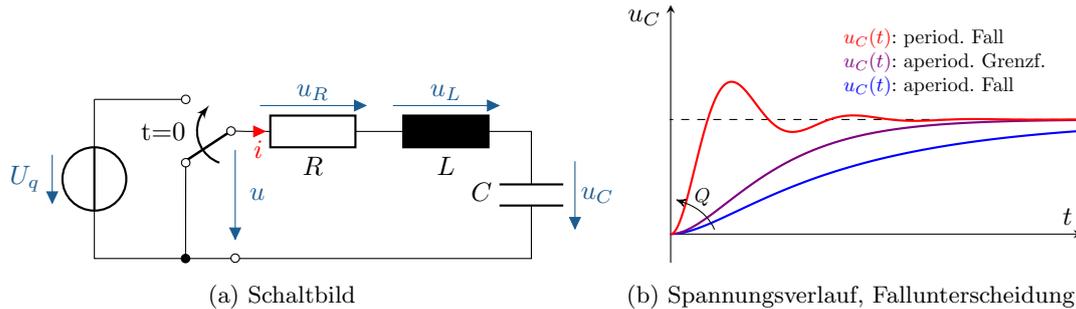


Abbildung 12.16: RLC-Glied, Ladevorgang mit konstanter Gleichspannung

Die Berechnung von Schaltvorgängen bei RLC-Gliedern erfolgt analog zu den Beispielen für RC- und RL-Glieder aus den vorigen Kapiteln.

1.) **DGL aufstellen:** für u_C für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 u_L + u_R + u_C &= u \\
 L \cdot \frac{d}{dt}i + R \cdot i + u_C &= U_q \\
 LC \cdot \frac{d^2}{dt^2}u_C + RC \cdot \frac{d}{dt}u_C + u_C &= U_q
 \end{aligned}
 \tag{12.43}$$

Aufgrund der zwei verschiedenen Energiespeichern ergibt sich eine DGL 2. Ordnung.

2.) **Homogene Lösung, allg.:** (flüchtig) (ohne Störterm)

Die Form der homogenen Lösung ist abhängig von der Art der Eigenwerte.

$$\text{hom. DGL: } LC \cdot \frac{d^2}{dt^2}u_{C,h} + RC \cdot \frac{d}{dt}u_{C,h} + u_{C,h} = 0 \quad \text{mit } u_{C,h} = K \cdot e^{\lambda t}
 \tag{12.44}$$

$$\text{char. Polynom: } \lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{mit } D = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}
 \tag{12.45}$$

Durch Anwenden der p - q -Formel (Mitternachtsformel) ergeben sich für die **Eigenwerte** (EW) $\lambda_{1/2}$ je nach Wurzelterm entweder zwei unterschiedliche oder zwei identische Werte. Die homogenen Lösung nimmt daher, wie in Kapitel 12.2.4.2 beschrieben ist, eine der folgenden zwei Formen an:

$$\text{hom. Lsg.: } u_{C,h} = \begin{cases} K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} & \text{für } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} & \text{für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}
 \tag{12.46}$$

Die Fallunterscheidung kann anhand der sogenannten **Diskriminante** D vorgenommen werden.

12.3.3.1 Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis

Die Diskriminante D ist der Term unter der Wurzel in Gleichung 12.45 zur Bestimmung von $\lambda_{1/2}$.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}} \quad (12.47)$$

Tabelle 12.3 listet alle drei Fälle mit Art der Eigenwerte und relative Aussagen bezüglich der Dämpfung des Schwingkreises. Als Unterscheidungsmerkmal sind die Wertebereiche der Diskriminante D respektive der Schwingkreisgüte Q_S (Vgl. Modul 8) mit angegeben.

Tabelle 12.3: Fallunterscheidung beim RLC-Schwingkreis

Fallunterscheidung	Dämpfung	Diskrimi.	Güte	Eigenwerte $\lambda_{1/2}$
aperiodischer Fall	stark	$D > 0$	$Q_S < 0,5$	Zwei verschiedene, reelle EW
aperiodischer Grenzfall	kritisch	$D = 0$	$Q_S = 0,5$	Eine doppelte, reelle EW
periodischer Fall	schwach	$D < 0$	$Q_S > 0,5$	konjugierte, komplexe EW

Ein Ortskurvendiagramm der Eigenwerte wird im optionalen Exkurs in Kapitel 12.3.4.2 gezeigt. Der Zusammenhang zwischen λ und Q_S wird im optionalen Exkurs in Kapitel 12.3.4.3 näher erläutert.

12.3.3.2 Aperiodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis

Ist die Diskriminante D positiv, ist der Wurzelterm reellwertig und immer kleiner als der Betrag des Terms $\frac{R}{2L}$ vor der Wurzel. Dadurch sind beide Eigenwerte verschieden, reell und negativ.

$$\text{für } D > 0 \text{ gilt} \quad \frac{R}{2L} > \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ reelle EW}$$

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,h} = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad \text{mit } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda < 0 \quad (12.48)$$

Die Konstanten K_1 und K_2 müssen beide reell sein, damit die Lösung reellwertig bleibt. Der flüchtige Zustand entspricht damit der Addition zweier Exponentialfunktionen. Dabei dominiert die langsamer Exponentialfunktion, das heißt die mit der größeren Zeitkonstante (Vgl. Exkurs in Kapitel 12.3.4.2).

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen, identisch für alle drei Fälle)

$$u_{C,p} = U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

$$u_C(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + U_q$$

5.) Konstanten bestimmen: (wie bekannt)

Sei $u_C(0) = 0$ und $i(0) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} u_C(0) = 0$ als Anfangsbedingungen (AB) gegeben, so folgt:

$$\begin{aligned}
1. \text{ AB: } & u_C(0) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot 0} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot 0} + U_q \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow & K_1 = -K_2 - U_q \\
2. \text{ AB: } & \frac{d}{dt} u_C(0) = K_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot 0} + K_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot 0} + 0 \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow & K_1 = -K_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\
\Rightarrow & & & K_1 = \frac{U_q}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{U_q}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1}
\end{aligned}$$

12.3.3.3 Aperiodischer Grenzfall beim RLC-Serienschwingkreis

Ist die Diskriminante D exakt null, sind beide Eigenwerte identisch, reell und negativ. Durch die doppelte Nullstelle ergibt sich eine spezielle Form der homogenen Lösung durch Überlagerung der zwei Ansätze ($K_1 \cdot e^{\lambda_1 t}$ und $K_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_2 t}$).

$$\text{für } D = 0 \text{ gilt} \quad \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{0} = \lambda \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ reeller EW}$$

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,h} = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} \quad \text{mit } \lambda_1 = \lambda_2 < 0 \quad (12.49)$$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen)

$$u_{C,p} = U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

$$u_C(t) = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} + U_q$$

5.) Konstanten bestimmen: (wie bekannt)

Sei $u_C(0) = 0$ und $i(0) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} u_C(0) = 0$ als Anfangsbedingungen (AB) gegeben, so folgt:

$$\begin{aligned}
1. \text{ AB: } & u_C(0) = (K_1 + K_2 \cdot 0) \cdot e^{\lambda \cdot 0} + U_q \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow & K_1 = -U_q \\
2. \text{ AB: } & \frac{d}{dt} u_C(0) = (K_1 + K_2 \cdot 0) \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot 0} + K_2 \cdot e^{\lambda \cdot 0} \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow & K_2 = -K_1 \cdot \lambda \\
\Rightarrow & & & K_1 = -U_q \quad \text{und} \quad K_2 = +U_q \cdot \lambda
\end{aligned}$$

12.3.3.4 Periodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis

Ist die Diskriminante negativ, gibt es zwei komplex konjugierte Eigenwerte mit negativem Realteil. Umformung mit $\sqrt{-1} = j \cdot \sqrt{1}$ und Herleitung für $u_{C,h}$ in Kapitel 12.3.4.1:

$$\text{für } D < 0 \text{ gilt} \quad \lambda_{1/2} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d} \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ kompl. EW} \quad (12.50)$$

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \quad \text{mit } \lambda_{1/2} = -\delta \pm j\omega_d \quad (12.51)$$

Die homogene Lösung entspricht einer abklingenden Schwingung mit der **Abklingkonstante** δ (neg. Realteil der EW) und der **gedämpften Eigenkreisfrequenz** ω_d (pos. Imaginärteil der EW). Eine Herleitung für Gl. 12.51 aus Gl. 12.53 erfolgt in Kapitel 12.3.4.1.

3.) **Partikuläre Lösung:** (eingeschwungen)

$$u_{C,p} = U_q$$

4.) **Allgemeine Lösung:** (Überlagerung)

$$u_C(t) = e^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) + U_q$$

5.) **Konstanten bestimmen:** (wie bekannt)

$$1. \text{ AB: } u_C(0) = e^{-\delta \cdot 0} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d \cdot 0 + \varphi_0) + U_q \stackrel{!}{=} 0$$

$$2. \text{ AB: } \frac{d}{dt} u_C(0) = -\delta \cdot e^{-\delta \cdot 0} \cdot C_0 \cdot \sin(\varphi_0) + e^{-\delta \cdot 0} \cdot C_0 \cdot \omega_d \cdot \cos(\varphi_0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow C_0 = -\frac{U_q}{\sin(\varphi_0)} \quad \text{und} \quad \varphi_0 = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right)$$

In Abbildung 12.17 ist der zeitlichen Verlauf der Spannung $u_C(t)$ für $t = 0$ bis $t = 5 \cdot \frac{1}{\delta}$ gezeigt. In der gewählten Skalierung beträgt ω_0 das vierfache der Abklingkonstante δ (Güte $Q_S = 2$).

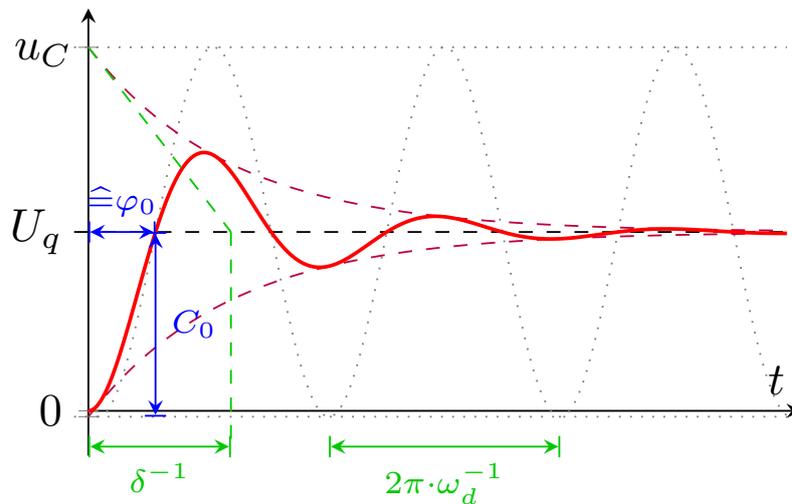


Abbildung 12.17: Spannung $u_C(t)$ im periodischen Fall mit zugehörige Konstanten: C_0 , φ_0 , δ , ω_d

12.3.4 Exkurse zu Serienschwingkreisen

In diesem Kapitel sind ergänzende Exkurse zum Verhalten von Schwingkreisen enthalten, die zur Vertiefung des Themas dienen und Brücken zu weiteren Themengebieten schlagen. Die Inhalte der Exkurse sind für das Verständnis der restlichen Modulinhalt nicht zwingend erforderlich und können bei Bedarf übersprungen werden.

12.3.4.1 Herleitung der homogenen Lösung im periodischen Fall

Aus der allgemeinen homog. Lösung im periodischen Fall (Gl. 12.46) folgt mit $\lambda_{1/2}$ (Gl. 12.50):

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot (K_1 \cdot e^{+j\omega_d t} + K_2 \cdot e^{-j\omega_d t}) \tag{12.52}$$

K_1 und K_2 müssen komplex konjugiert sein, damit $u_{C,h}$ reell ist! [hagmann]

mit
$$K_1 = a + jb \quad \text{und} \quad K_2 = a - jb \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot [(a + jb) \cdot e^{+j\omega_d t} + (a - jb) \cdot e^{-j\omega_d t}]$$

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot \left[a \cdot \underbrace{(e^{+j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t})}_{2 \cos(\omega_d t)} + jb \cdot \underbrace{(e^{+j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t})}_{2j \sin(\omega_d t)} \right]$$

mit
$$e^{+jx} + e^{-jx} = \cos(x) + j \sin(x) + \cos(x) - j \sin(x) = 2 \cos(x)$$

$$e^{+jx} - e^{-jx} = \cos(x) + j \sin(x) - \cos(x) + j \sin(x) = 2j \sin(x)$$

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot \left[\underbrace{2a}_{C_1} \cdot \cos(\omega_d t) - \underbrace{2b}_{C_2} \cdot \sin(\omega_d t) \right] \tag{12.53}$$

Die homogene Lösung entspricht im periodischen Fall einer abklingenden ($e^{-\delta t}$) Überlagerung der Schwingungen z_1 und $-z_2$ mit gleicher Kreisfrequenz ω_d und Phasenverschiebung von $\pi/2$ zueinander.

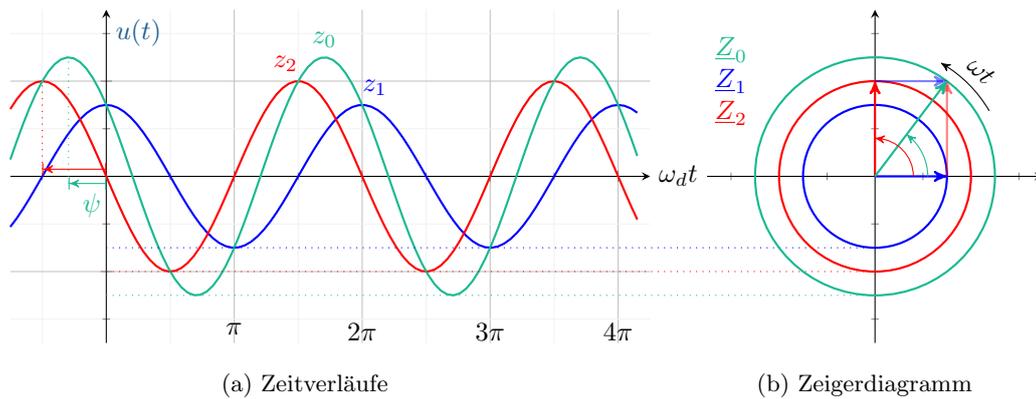


Abbildung 12.18: Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz, Zeitverlauf u. Zeigerdiagramm

In Abbildung 12.18 ist die Überlagerung in Form addierter Zeitverläufe (a) und in Form addierter komplexer Amplitudenzeiger im Zeigerdiagramm (b) dargestellt. Mathematisch ausgedrückt:

	<i>Zeitbereich</i>	\Leftrightarrow	<i>Polar.</i>	\Leftrightarrow	<i>Kart.</i>
	$z_1(t) = +C_1 \cdot \cos(\omega_d t)$		$z_1 = C_1 \cdot e^{j0}$		$z_1 = C_1$
	$z_2(t) = -C_2 \cdot \sin(\omega_d t)$		$z_2 = C_2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$		$z_2 = -j \cdot C_2$
	$z_0(t) = z_1(t) + z_2(t)$		$z_0 = z_1 + z_2$		$z_0 = C_1 - j \cdot C_2$
	$= C_0 \cdot \cos(\omega_d t + \psi)$		$= C_0 \cdot e^{j\psi}$		
mit	$C_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$	und	$\psi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right)$,		$\varphi_0 = \psi + \frac{\pi}{2}$
	$z_0(t) = C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0)$				(12.54)

Die homogene Lösung im periodischen Fall aus Gl. 12.53 lässt sich nach Gl. 12.54 wie im Folgenden als abklingende, phasenverschobene Sinuskurve beschreiben (Vgl. Gl. 12.51):

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \lambda_{1/2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d$$

12.3.4.2 Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis, Nullstellen

Die Nullstellen (NST) des charakteristischen Polynoms, das heißt die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$, des RLC-Serienschwingkreises hängen von der Diskriminante D ab.

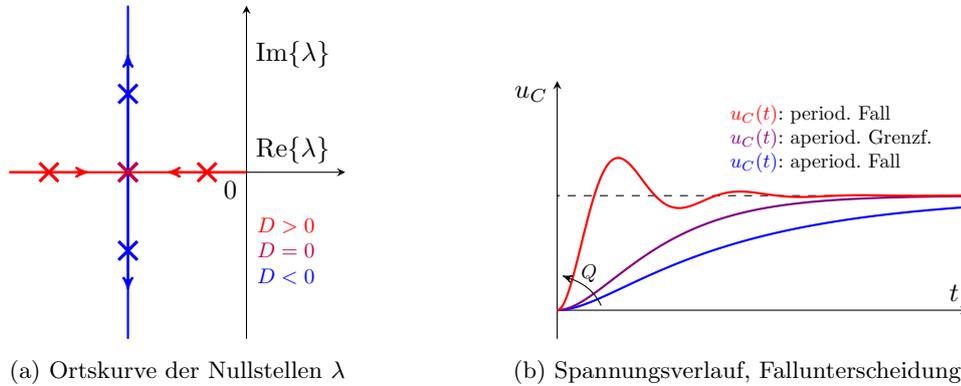


Abbildung 12.19: Ortskurve der Eigenwerte und Spannungsverläufe im RLC-Serienschwingkreis

Abbildung 12.19a zeigt die Lage der Nullstellen im komplexen Zahlenraum als Ortskurve in Abhängigkeit von D für $\delta = \frac{R}{2L} = konst..$ Der Verlauf der NST entspricht einem Anstieg der ungedämpften Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. [Vgl. Gl. 12.60]

Im aperiodischen Fall ($D > 0$) bewegen sich die beiden negativen reellen NST für $\delta = konst.$ und steigendem ω_0 auf einander zu. Die NST näher an der Imaginärachse dominiert das Einschwingverhalten des Systems (langsamerer Abklingvorgang). Im aperiodischen Grenzfall ($D = 0$) verschmelzen die NST zu einer doppelten Nullstelle bei $\lambda_{1/2} = -\delta$. Im periodischen Grenzfall ($D < 0$) bewegen sich die konjugiert komplexen NST für $\delta = konst.$ und steigendem ω_0 parallel zur Imaginärachse und entfernen sich von der Realachse.

Vergleich: Polstellen der Übertragungsfunktion (Systemtheorie)

Aus der Lage der Eigenwerte im Ortskurvendiagramm lassen sich Rückschlüsse auf das Einschwingverhalten des RLC-Serienschwingkreises ziehen. Das Vorgehen ist üblich bei der Stabilitätsanalyse von Systemen im Rahmen der Regelungstechnik und stammt als Methode aus der Systemtheorie.

Für verschwindende Anfangsbedingungen ($\frac{d^i}{dt^i} u_C(0) = 0 \forall i$) lässt sich die DGL aus Gl. 12.43 mithilfe der Laplace-Transformation direkt im Bildbereich beschreiben. Durch umstellen der transformierten Ausgangsgröße $U_C(s)$ nach der Eingangsgröße $U(s)$ ergibt sich die Übertragungsfunktion $G(s)$ des RLC-Serienschwingkreises:

$$u(t) = LC \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_C(t) + RC \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) \quad \Big| \mathcal{L} \quad (12.55)$$

$$U(s) = LC \cdot s^2 \cdot U_C(s) + RC \cdot s \cdot U_C(s) + U_C(s) \quad (12.56)$$

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{\text{Ausgangsgröße}(s)}{\text{Eingangsgröße}(s)} \quad (12.57)$$

$$= \frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1} \quad (12.58)$$

Die Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ entsprechen den Eigenwerten $\lambda_{1/2}$.

12.3.4.3 Abklingkonstante, Eigen- und Resonanzkreisfrequenz, Güte

Im periodischen Fall ergibt sich die (gedämpfte) Eigenkreisfrequenz ω_d und die Abklingkonstante δ aus den Eigenwerten $\lambda_{1/2}$. Die Größen hängen eng zusammen mit der **Güte** Q_S und der **Resonanzkreisfrequenz** ω_0 eines Schwingkreises (Resonanzkreises). Beide Größen werden als Kenngrößen für Schwingkreise verwendet und ausführlicher in Modul 8 (Frequenzvariable Schaltungen) behandelt.

Der Zusammenhang zwischen ω_d , δ , ω_0 und Q_S soll anhand des RLC-Serienschwingkreises aus Abbildung 12.16a erläutert werden. Die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ sind nach Gleichung 12.50 gegeben durch:

$$\lambda_{1/2} = - \underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d} \quad (12.59)$$

Der negative Realteil $-\delta$ bestimmt die Abklingrate und der Imaginärteil ω_d die Kreisfrequenz der linear gedämpften, harmonischen Schwingung. Die Eigenkreisfrequenz ω_d lässt sich mit Gl. 12.64 auch in Abhängigkeit von ω_0 und δ ausdrücken.

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (12.60)$$

Das hat den Vorteil, dass die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0 und die Abklingkonstante δ direkt aus den Koeffizienten der DGL abgelesen werden können. Hierfür bietet sich die Form:

$$\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = b \quad (12.61)$$

für gewöhnliche, homogene, lineare DGLen 2. Ordnung an. Die DGL beschreibt das Verhalten linearer gedämpfter Systeme zweiter Ordnung (mit zwei Energiespeichern).

Die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz entspricht dabei der Resonanzkreisfrequenz ω_0 . Bei Anregung eines Schwingkreises mit dessen **Resonanzfrequenz** f_0 tritt eine Resonanz auf. Im Resonanzfall verschwindet der Blindanteil der Gesamtimpedanz $\underline{Z}(\omega)$ (Resonanzbedingung). [Vgl. Modul 8]

Mit der Gesamtimpedanz:

$$\underline{Z}(\omega) = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (12.62)$$

und der Resonanzbedingung:

$$\text{Im}\{\underline{Z}(\omega_0)\} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \stackrel{!}{=} 0 \quad (12.63)$$

folgt für die Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (12.64)$$

Die Güte Q_S als Maß für die Schwingungsfähigkeit eines Schwingkreises lässt sich ebenfalls aus ω_0 und δ ableiten. Sie ist definiert als Verhältnis der schaltungsintern schwingenden Blindleistung zur schaltungsinternen Verlustleistung im Resonanzfall. Dies entspricht beim RLC-Serienschwingkreis dem Verhältnis von Blindwiderstand der Induktivität $X_{L,0}$ bei Resonanzfrequenz zur Serienresistenz R (ohne Herleitung). Dadurch ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$Q_S = \frac{X_{L,0}}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (12.65)$$

Die Güte ist proportional zum Verhältnis der ungedämpften Eigenkreisfrequenz zur Dämpfungskonstante.

Index

- A**
- Amplitudengang 227
 - Anfangsbedingungen 376
 - Asynchronmaschine
 - Anlauf 361
 - Aufbau 359
 - Funktionsprinzip 361
- B**
- Bandbreite 246
 - Blochwände 140
 - Bode-Diagramm 243
- D**
- Dezibel 240
 - Differentialgleichung
 - Charakteristische Polynom 377, 378
 - Eigenwert 377
 - Lösung der homogenen 377
 - Lösung der inhomogenen 377
 - Ordnung 374
 - partikuläre Lösung 377
 - Störfunktion 374
 - Durchflutung 142
- E**
- Eigenfrequenz 257
 - Eigenschaft
 - harmonisch 370
 - homogen 370
 - linear 370
 - Linearität 374
 - Ordnung 370
 - periodisch 370
 - zeitinvariant 370
 - Zeitinvarianz 374
 - Eigenwert 399
 - Elementarmagnet 140
 - Entmagnetisieren 146, 148
 - Erregerwicklung 352
- F**
- Fall
 - aperiodischer Fall 393, 394
 - aperiodischer Grenzfall 393, 395
 - periodischer Fall 393, 395
- Ferromagnetismus** 140, 145, 148
- Filter**
- Bandpass 246
 - Bandsperr 246
 - Hochpass 232, 243
 - Tiefpass 228, 242, 243
- Flussdichte** 144, 147
- Frequenzgang** 227
- G**
- Gleichstrommaschine**
- Aufbau 351
 - Felder 353
 - Fremderregt 354
 - Rotor 353
- Grenzfrequenz** 242
- Größe**
- Abklingkonstante 370, 396, 400
 - Dämpfungskonstante 370
 - Diskriminante 393
 - Eigenfrequenz 370
 - Eigenkreisfrequenz, gedämpft 396, 400
 - Güte 400
 - Resonanzfrequenz 370
 - Resonanzkreisfrequenz 400
 - Zeitkonstante 370, 381
- Güte** 258, 265, 277
- H**
- Hochspannung 343
- I**
- Induktion 155
 - Induktivität 156
- K**
- Käfigläufer 360
 - Kennleitwert 258
 - Kennwiderstand 258
 - Koerzitivfeldstärke 146, 148
 - Kommutator 352
- L**
- Läufer 350

lineare, zeitinvariante Systeme (LZI-Systeme)	374	Stromwender	352
lineares zeitinvariantes System	227	Synchronmaschine	
logarithmische Darstellung	237	Aufbau	357
Lorentzkraft	150, 152	Ersatzschaltbild	359
M		T	
Magnetische Durchflutung	142	Transformator	342
Magnetische Feldstärke	143	U	
Magnetische Flussdichte	144, 147	Überspannung	259
Magnetischer Fluss	143, 144, 147	Überstrom	259
Magnetischer Kreis	150	V	
Magnetischer Widerstand	149	Verstärkung	241
Magnetisierungskennlinie	146, 148	Vorgang	
Mittelspannung	343	Ausgleichsvorgang	370, 371
Mittenfrequenz	246	Ausschwingvorgang	371
N		Einschwingvorgang	370, 371
Netztransformator	347	Schaltvorgang	370, 371
O		Transiente	370, 371
Ordnung, (Filter-)	248	W	
Ortskurve	250, 399	Weissche Bezirke	140
P		Z	
Permeabilität	145, 147, 150	Zeigerdiagramm	251
Phasengang	227	Zustand	
Polradwinkel	358	ausgeglichen	369
R		eingeschwungen	369, 376
Rechte Hand Regel	141	flüchtig	376
relative Verstimmung	265	stationär	370
Reluktanz	149		
Remanenz	145, 148		
Resonanz,			
Spannungs- (spannungsbezogen)	259, 266		
Strom- (strombezogen)	259, 275		
Resonanzbedingung	258		
Resonanzerscheinung	256		
Resonanzfrequenz	258, 400		
Resonanzkreis	256		
Rotor	350		
S			
Schalten	370		
Schalter	370		
Schlupf	361		
Schwingkreis	256		
LC-Parallelschwingkreis	259		
LC-Reihenschwingkreis	259		
RLC-Parallelschwingkreis	271		
RLC-Reihenschwingkreis	260		
Schwingung			
erzwungene Schwingung	256		
freie Schwingung	256		
Ständer	350		
Stator	350		