GET it digital

Modul 1:

Elektrische Grundgrößen

Henrik Bode

Ein Kooperationsvorhaben
empfohlen durch die

DIGITALE HOCHSCHULE NRW

gefördert durch

Ministerium für
Kultur und Wissenschaft
des Landes Nordrhein-Westfalen

Stand: 11. September 2025

Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 1: Elektrische Grundgrößen“ von H. Bode Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de
Das Werk ist online verfügbar unter:
https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-1-elektrische-grundgroessen

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation **1**

2 Physikalische Größen - Definitionen und Maßeinheiten **2**
2.1 Das SI-Einheitensystem . . . 2
2.2 Zehnerpotenzen . . . 4

3 Die elektrische Ladung **4**
3.1 Der Atomaufbau . . . 4
3.2 Ladungsdichten . . . 6
3.3 Elektrische Leiter - Metalle . . . 8
3.4 Das Coulombsche Gesetz . . . 9

4 Das elektrische Feld **10**
4.1 Charakterisierung des elektrischen Feldes . . . 10
4.2 Elektrische Leiter und elektrostatische Felder I . . . 11
4.3 Beispiele elektrischer Felder . . . 12

5 Das elektrische Potential **14**
5.1 Arbeit im elektrischen Feld . . . 14
5.2 Definition des elektrischen Potentials . . . 17
5.3 Zusammenhang zwischen Arbeit und Potential . . . 18
5.4 Definition der elektrischen Spannung . . . 20

6 Die elektrische Stromstärke **23**
6.1 Das elektrische Strömungsfeld . . . 23
6.2 Der elektrische Strom . . . 23
6.3 Definition der elektrischen Stromstärke . . . 25

A Übungsaufgaben **29**
A.1 Elektrisches Homogenfeld 1 . . . 29
A.2 Elektrisches Homogenfeld 2 . . . 29
A.3 Elektrisches Homogenfeld 3 . . . 30
A.4 Ladungsträgergeschwindigkeit . . . 30

B Lösungen zu den Übungsaufgaben **31**
B.1 Elektrisches Homogenfeld 1 . . . 31
B.2 Elektrisches Homogenfeld 2 . . . 31
B.3 Elektrisches Homogenfeld 3 . . . 31
B.4 Ladungsträgergeschwindigkeit . . . 31

1 Motivation

Die Elektrotechnik durchdringt nahezu jeden Bereich unseres modernen Lebens. Die Spanne reicht von der Energieversorgung über die Steuerungstechnik bis hin zur IT-Technik. Egal ob Smartphone, Auto oder moderne Haushaltsgeräte, tagtäglich werden zahlreiche Gegenstände genutzt, die oben diese Disziplin nicht denkbar wären. Die Elektrotechnik hat in den letzten Jahrzehnten bahnbrechende Innovationen ermöglicht und ist der Treiber für zahlreiche Entwicklungen. Im Bereich der erneuerbaren Energien basieren Photovoltaikanlagen, Windkraftwerke und intelligente Stromnetze auf fortschrittlichen elektrotechnischen Konzepten. Für das Internet der Dinge (IoT) erfordert die Vernetzung von Alltagsgegenständen miniaturisierte Sensoren, Mikrocontroller und Kommunikationsmodule und die Entwicklung leistungsfähiger KI-Systeme wäre ohne spezialisierte Hardwarekomponenten wie GPUs oder CPUs nicht möglich. Fachwissen aus diesem Bereich ist jedoch nicht nur für Studierende der Elektrotechnik relevant. Auch steigt die Relevanz der grundlegenden Inhalte für Studierende sämtlicher weiterer ingenieurstechnischer sowie verwandter Studiengänge stetig an. Die moderne Produktentwicklung wird mit interdisziplinären Projektteams umgesetzt.

- Maschinenbau: Auch wenn die Maschinenbauingenieur*innen nicht unmittelbar an der Entwicklung elektrisch/elektronischer Komponenten beteiligt sind, brauchen sie ein grundlegendes Verständnis für die am Entwicklungsprojekt beteiligten Kolleg*innen. Beispielsweise bei der Entwicklung von Robotersystemen oder automatisierten Fertigungsanlagen ist eine enge Zusammenarbeit zwischen Maschinenbau und Elektrotechnik unerlässlich.
- Informatik: Die Schnittstelle zwischen Hardware und Software wird immer wichtiger. Informatiker*innen müssen verstehen, wie ihre Programme mit der zugrundeliegenden Elektronik interagieren.
- Medizintechnik: Moderne medizinische Geräte wie MRT-Scanner oder Herzschrittmacher sind ohne fundierte elektrotechnische Kenntnisse nicht denkbar.

Dieses Skript unterstützt bei dem Erlernen der benötigten Grundlagen. Es vermittelt nicht nur theoretisches Wissen, sondern zeigt auch praktische Anwendungen und interdisziplinäre Verknüpfungen auf. Ziel ist es, ein solides Fundament zu schaffen, auf dem Studierende verschiedener Ingenieurdisziplinen aufbauen können. Die hier erlernten Konzepte bilden die Basis für das Verständnis komplexerer Systeme und bereiten auf die Herausforderungen einer zunehmend digitalisierten und vernetzten Welt vor. Von den Grundlagen der Elektrizität bis hin zu fortgeschrittenen Themen wie Signalverarbeitung oder Regelungstechnik - dieses Skript legt den Grundstein für eine erfolgreiche Karriere in einer Welt, die maßgeblich von der Elektrotechnik geprägt ist.

2 Physikalische Größen - Definitionen und Maßeinheiten

Lernziele: Beschreibung physikalischer Größen

Die Studierenden können

- physikalische Größen mit Maßzahl und Maßeinheit angeben
- die sieben SI-Basiseinheiten sowie die davon abgeleiteten Einheiten nutzen sowie ihren jeweiligen Größen zuordnen
- Zahlenwerte mit Hilfe von Zehnerpotenzen sowie deren Bezeichnung angeben und ineinander umrechnen

2.1 Das SI-Einheitensystem

Jede physikalische Größe wird immer als Kombination von Zahlenwert (Maßzahl) und ihrer Maßeinheit (auch Dimension genannt) beschrieben. Wenige einheitenlose Größen bilden hier eine Ausnahme, die Maßeinheit von diesen ist "1". Vor der Einheit kann - falls erforderlich - das Kürzel einer Zehnerpotenz stehen, die den Zahlenwert skaliert (siehe Abschnitt *Zehnerpotenzen*). Der Zahlenwert und die Einheit werden durch ein Leerzeichen getrennt. Beispiel: $1000\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{km}$.

Diese Einheiten sind im internationalen Einheitensystem, dem SI-System (Système International), definiert und bilden die Grundlage aller physikalischen Größen. Es gibt sieben SI-Basisgrößen, welche mit Hilfe von fundamentalen physikalischen Konstanten definiert werden können. Diese Konstanten können experimentell mit ausreichend hoher Genauigkeit bestimmt werden, um eine zuverlässige Grundlage unseres gesamten Einheitensystems zu bilden. Neben den so definierten Grundeinheiten gibt es noch weitere, sogenannte abgeleitete Einheiten, die sich auf die Grundeinheiten zurückführen lassen.

Abseits des SI-Systems und seiner abgeleiteten Größen gibt es eine Vielzahl weiterer Einheiten, wie beispielsweise die angelsächsischen Größen Pfund, Inch oder die Meile, die an dieser Stelle nicht weiter verwendet werden.

SI-Größe	**Formelzeichen**	**Einheit**	**Basis**
Zeit	t	Sekunde, s	$\Delta\nu$
Länge	ℓ	Meter, m	c, s
Masse	m	Kilogramm, kg	$h, \mathrm{s}, \mathrm{m}$
Stromstärke	I	Ampere, A	e, s
Temperatur	T	Kelvin, K	$k_\mathrm{B}, \mathrm{s}, \mathrm{m}, \mathrm{kg}$
Stoffmenge	n	Mol, mol	N_A
Lichtstärke	I_v	Candela, cd	$K_\mathrm{cd}, \mathrm{s}, \mathrm{m}, \mathrm{kg}$

Tabelle 2.1: SI-Einheiten und ihre Basisgrößen

Die aktuell gültigen Definitionen der in obiger Tabelle aufgeführten Einheiten sind:

- Eine Sekunde ist das 9.192.631.770-fache der Periodendauer des Hyperfeinstrukturübergangs $\Delta\nu$ im Cäsium-Atom ^{133}Cs.
- Ein Meter ist die Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von $t = \frac{1}{299.792.458}$ s zurücklegt.

- Das Kilogramm ist seit Mai 2019 vom genau definierten Planckschen Wirkungsquantum abhängig: $1\text{kg} = \frac{h}{6{,}62607015 \cdot 10^{-34}} \frac{\text{s}}{\text{m}^2}$
- Das Ampere ist seit 2019 durch die Elementarladung definiert. Ein Ampere ist der Stromfluss von $\frac{e}{1{,}602176634} \cdot 10^{-19} \frac{1}{\text{s}}$ Elementarladungen pro Sekunde.
- Ein Kelvin entspricht einer Änderung der thermodynamischen Temperatur, die mit einer Änderung der thermischen Energie (kT) um $1{,}380649 \cdot 10^{-23}$ J einhergeht.
- Ein Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das $6{,}02214076 \cdot 10^{23}$ eines bestimmten Einzelteilchens enthält.
- Eine Candela ist die Lichtstärke einer Strahlungsquelle, die mit einer Frequenz von 540 THz emittiert und die eine Strahlungsintensität in dieser Richtung von $\frac{1}{683} \frac{\text{W}}{\text{sr}}$ hat.

Die zur Definition des SI-Systems verwendeten Naturkonstanten sind:

- Hyperfeinstrukturübergang: ${}^{133}Cs\Delta v = 9.192.631.770\,\text{Hz}$
- Lichtgeschwindigkeit: $c = 299.792.458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}$ Js
- Elementarladung: $e = 1{,}602176634 \cdot 10^{-19}$ As
- Boltzmann-Konstante: $k_\text{B} = 1{,}38064910^{-23}\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2\cdot\text{K}}$
- Avogadro-Konstante: $N_\text{A} = 6{,}02214076 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{\text{mol}}$
- Photometrisches Strahlungsäquivalent einer monochromatischen Strahlung der Frequenz 540 THz: $K_\text{cd}(540\,\text{THz}) = 683\,\frac{\text{lm}}{\text{W}}$

Abgeleitete SI-Einheiten

Aus diesen sieben Grundeinheiten werden weitere 22 Größen mit eigener Bezeichnung hergeleitet. Einige für die Elektrotechnik wichtige Beispiele sind nachfolgend aufgeführt:

Größe	**Formel**	**Einheit**	**Basiseinheit**
Kraft	F	Newton, N	1 N = 1 kg m/s^2
Energie	E	Joule, J	1 J = 1 Ws = 1 Nm = 1 kg m^2/s^2
Leistung	P	Watt, W	1 W = 1 J/s = 1 kg m^2/s^3
Spannung	U	Volt, V	1 V = 1 W/A = 1 Nm/As = 1 kg m^2/s^{3}A
Ladung	Q	Coulomb, C	1 C = 1 As
Widerstand	R	Ohm, Ω	1 Ω = 1 V/A = 1 kg m^2/s^{3}A^2
Kapazität	C	Farad, F	1 F = 1 As/V = 1 s^{4}A^2/kg m^2
Induktivität	L	Henry, H	1 H = 1 Vs/A = 1 kg m^2/s^{2}A^2
magn. Fluss	Φ	Weber, Wb	1 Wb = 1 Vs = 1 kg m^2/s^{2}A
Flussdichte	B	Tesla, T	1 T = 1 Vs/m^2 = 1 kg/s^{2}A

Tabelle 2.2: Größen und ihre Basiseinheiten

Wichtig: In Gleichungen mit physikalischen Größen treten auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens sowohl Maßzahlen als auch Maßeinheiten auf. Eine Überprüfung der Einheiten auf Gleichheit (im Zweifel heruntergebrochen auf auf die SI-Basiseinheiten) liefert oft eine gute Kontrolle hinsichtlich der Plausibilität der Rechnung.

2.2 Zehnerpotenzen

Zur besseren Lesbarkeit sehr kleiner oder großer Zahlenwerte können Einheiten mit Zehnerpotenzen skaliert werden. Dazu wird die Bezeichnung der Zehnerpotenz ohne Leerzeichen direkt vor die Einheit geschrieben. Oft wird dabei diejenige Zehnerpotenz gewählt, bei der die Zahl vor dem Komma möglichst wenige Stellen hat.

Eine andere Möglichkeit zur Verbesserung der Lesbarkeit ist die sogenannte Exponentialdarstellung. Dabei wird die Maßzahl mit der entsprechenden Zehnerpotenz direkt multipliziert. Die Anzahl der verwendeten Nachkommastellen muss physikalisch sinnvoll sein. Ist dazu nichts weiter bekannt, werden meist zwei Nachkommastellen verwendet.

Bezeichnung	**Potenz**	**Potenz**	**Bezeichnung**
Dezi, d	10^{-1}	10^{1}	Deka, da
Zenti, c	10^{-2}	10^{2}	Hekto, h
Milli, m	10^{-3}	10^{3}	Kilo, k
Mikro, μ	10^{-6}	10^{6}	Mega, M
Nano, n	10^{-9}	10^{9}	Giga, G
Piko, p	10^{-12}	10^{12}	Tera, T
Femto, f	10^{-15}	10^{15}	Peta, P
Atto, a	10^{-18}	10^{18}	Exa, E

Achtung: Bei Gewichtsangaben werden Präfixe nicht auf die SI-Basiseinheit Kilogramm (kg), sondern auf die Einheit Gramm (g) angewendet.

Bei potenzierten Einheiten, wie zum Beispiel Flächen oder Volumeneinheiten, bezieht sich der Skalierungspräfix immer auf die Grundeinheit, er muss also auch potenziert werden.

$$
\begin{aligned}
1\,\mathrm{m}^1 &= 100^1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} \\
1\,\mathrm{m}^2 &= 100^2 \cdot (10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 10.000\,\mathrm{cm}^2 \\
1\,\mathrm{m}^3 &= 100^3 \cdot (10^{-2}\,\mathrm{m})^3 = 1.000.000\,\mathrm{cm}^3
\end{aligned}
$$

3 Die elektrische Ladung

Lernziele: Die Elektrische Ladung

Die Studierenden können

- die Eigenschaften elektrischer Ladungen sowie im Zusammenhang stehende physikalische Phänomene beschreiben
- elektrische Felder beschreiben und für einfache Ladungsanordnungen berechnen
- mit dem Coulomb´schen Gesetz Kräfte auf Ladungen berechnen

3.1 Der Atomaufbau

Viele physikalische Prozesse sind nur durch klassische Phönomene aus der Mechanik nicht zu erklären. Bereits etwa 600 v. Chr. entdeckte der griechische Philosoph Thales von Milet, dass Bernstein, wenn er an einem Fell gerieben wird, leichte Objekte wie Federn anzieht. In weiteren Experimenten konnte bedeutend später nachgewiesen werden, dass es neben der Gravitationskraft eine weitere, sogenannte

elektrische Kraft gibt. Diese kann sowohl anziehend als auch abstoßend wirken. Als Ursache dieser Kraftwirkungen werden **elektrische Ladungen** postuliert und als (historisch willkürlich) **positiv** und **negativ** festgelegt. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen hingegen ziehen sich an.

Eine einfache, den beobachteten Effekten zu Grunde liegende Modellvorstellung entwickelte Nils Bohr 1913. Laut diesem in Abbildung 3.1 dargestellten Atommodell besteht jedes Atom aus einen Atomkern und einer Elektronenhülle. Der Atomkern wiederum besteht aus dicht gepackten Protonen (positive Ladungsträger) und Neutronen (elektrisch neutral). Die Hülle besteht aus Elektronen (negative Ladungsträger), die den Atomkern auf konzentrischen Bahnen mit unterschiedlichen Radien umkreisen.

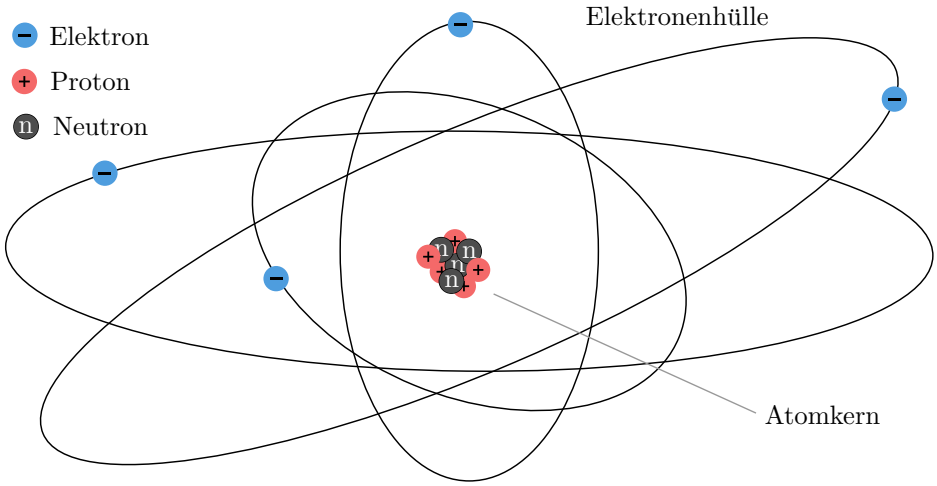


Abbildung 3.1: Illustration des Bohr'schen Atommodells

Die **Ladung** Q eines Protons und eines Elektrons ist betragsmäßig gleich und wird als Elementarladung e bezeichnet. Ihr experimentell bestimmter Wert beträgt $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Das Proton ist positiv und das Elektron negativ geladen. Ein Atom hat im Regelfall die identische Anzahl Protonen wie Elektronen und ist daher von außen gesehen elektrisch neutral.

Das Coulomb ist die Einheit der elektrischen Ladung und wird wie folgt beschrieben:

$$[Q] = 1\,\mathrm{Coulomb} = 1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}$$

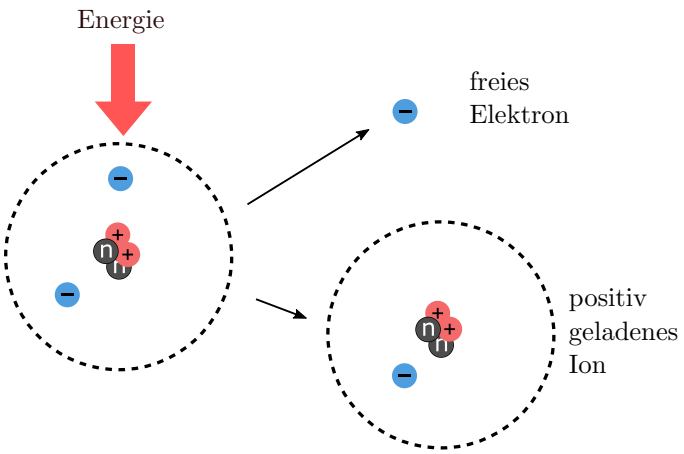


Abbildung 3.2: Trennen eines Atoms in ein positiv geladenes Ion und ein freies Elektron durch Energiezufuhr

Durch Zufuhr von Energie oder durch Wechselwirkung mit anderen Teilchen (beispielsweise durch Reibung eines Plastikstabes an einem Stück Stoff, Reibung von Kleidung an einer Kunststoffrutsche, UV-Strahlung) kann sich die Elektronenanzahl eines Atoms verändern. Bekommt ein Atom ein oder mehrere zusätzliche Elektronen, liegt also ein **Elektronenüberschuss** vor, wird es negativ geladen. Verliert es Elektronen, also bei einem **Elektronenmangel**, wird es positiv geladen. In beiden Fällen wird es als Ion bezeichnet. Da jeweils nur ganze Elektronen dem Ion hinzugefügt oder abgezogen werden können, ist die entsprechende Ladung Q eines Ions (und damit auch jedes anderen Objektes) immer ein Vielfaches der Elementarladung e.

Merke:

$Q = \pm n \cdot e$

Die Masse der sich im Kern befindenden Protonen und Neutronen ist um viele Größenordnungen höher als die der Elektronen. Folglich sind die aus dem Atomverband befreiten Elektronen als kleinste, leichteste und beweglichste Ladungsträger für die Elektrotechnik von großer Bedeutung.

3.2 Ladungsdichten

Nicht nur die Anzahl, sondern auch die Verteilung der elektrischen Ladungsträger spielt in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle. So ist es beispielsweise für die Gestaltung und Funktionsweise von elektrischen Bauelemente (wie Widerständen, Kondensatoren oder Halbleiterbauelementen) entscheidend zu wissen, wie sich die Ladungen entlang von Linien, auf Oberflächen oder innerhalb von Volumina verteilen. Dabei wird in diesem Modul von einer gleichmäßigen Ladungsträgerverteilung ausgegangen.

Die **Punktladung** dient als idealisiertes Modell einer Ladungsverteilung auf einen Punkt ohne räumliche Ausdehnung. Ist die reale räumliche Verteilung an der entsprechenden Stelle nicht weiter relevant, werden Ladungen meist als Punktladungen betrachtet.

Die **Linienladungsdichte** λ (lambda), angegeben in C/m, beschreibt die Verteilung der elektrischen Ladung entlang einer Linie, wie sie beispielsweise in einem sehr dünnen Draht vorkommt, der nur in einer Dimension ausgedehnt ist (siehe Abbildung 3.3).

Da die Ladungsträger sowie ihre atomaren Strukturen im Vergleich zu den in Bauteilen verwendeten Strukturen vernachlässigbar klein sind, kann statt der diskreten eine kontinuierliche Verteilung ange-

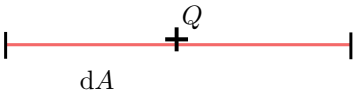


Abbildung 3.3: Linienladungsdichte: Eine Ladung Q gleichmäßig verteilt auf einem eindimensionalen Pfad mit der Länge $\mathrm{d}l$

nommen werden. Folglich lässt sich die Linienladungsdichte als Ableitung der Ladung pro Linienlänge beschreiben.

$$\lambda = \lim_{l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}$$

Die Ladung Q ist analog dazu das Integral der Linienladungsdichte λ über die Länge l.

$$Q = \int_l \lambda \, \mathrm{d}l$$

Die **Flächenladungsdichte** σ (sigma) in $\mathrm{C/m^2}$ beschreibt die Verteilung der Ladung Q, die pro Flächeneinheit A verteilt ist (siehe Abbildung 3.4). Sie wird beispielsweise bei der Berechnung von Kondensatoren, welche zu einem späteren Zeitpunkt eingeführt werden, benötigt.

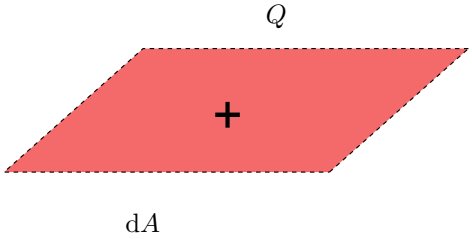


Abbildung 3.4: Flächenladungsdichte: Eine Ladung Q gleichmäßig verteilt auf einer zweidimensionalen Fläche mit der Größe $\mathrm{d}A$.

Vergleichbar zur Linienladungsdichte kann auch σ über eine Grenzwertbetrachtung und damit über eine Ableitung beschrieben werden:

$$\sigma = \lim_{A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}$$

$$Q = \iint_A \sigma \, \mathrm{d}A$$

Die **Raumladungsdichte** ρ (rho) in $\mathrm{C/m^3}$ gibt die Anzahl der freien Ladungsträger im betrachteten Volumen an. Hierbei kann es sich beispielsweise um Elektronen in einem Leiter oder geladene Ionen in einem Gasgemisch handeln.

$$\rho = \lim_{V \to \infty} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}$$

$$Q = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}V$$

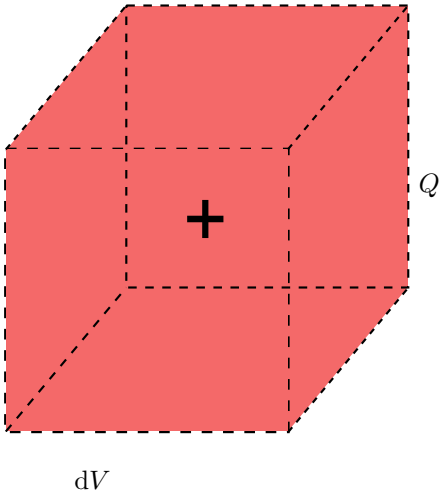


Abbildung 3.5: Raumladungsdichte ρ: Eine Ladung Q gleichmäßig verteilt in einem dreidimensionalen Volumen mit der Größe dV.

3.3 Elektrische Leiter - Metalle

Diese Aufteilung der Ladungsträger ist beispielsweise in Metallen gut zu sehen. Viele Metalle weisen einen besonderen Atomverband auf. Die Atome ordnen sich bei ihnen in einer regelmäßigen **Gitterstruktur** an. Dadurch sind die äußersten Elektronen eines jeden Atoms innerhalb des Metallkörpers nahezu frei beweglich. Diese freien Elektronen verleihen Metallen ihre elektrisch leitende Eigenschaft. In Abbildung 3.6 wird diese Struktur dargestellt. Häufig werden Metalle in der Elektrotechnik deshalb kurz als (elektrische) Leiter bezeichnet. Im Allgemeinen sind Leiter elektrisch neutral, da in jedem Atom die Summe aller Elektronen der Summe aller Protonen entspricht.

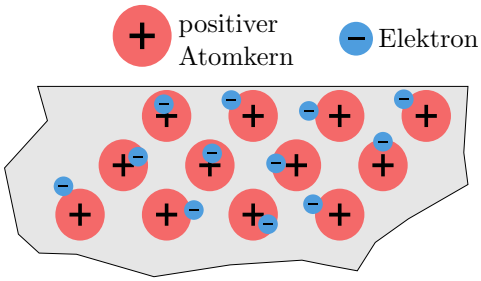


Abbildung 3.6: Ausschnitt aus einem Metallblech. Eingezeichnet sind die positiv geladenen Atomkerne sowie deren frei bewegliche äußeren Elektronen.

Durch das Hinzuführen von Elektronen entsteht ein Elektronenüberschuss, wodurch der Leiter negativ geladen wird. Werden Elektronen entzogen entsteht ein Elektronenmangel und der Leiter wird positiv geladen (Abbildung 3.7).

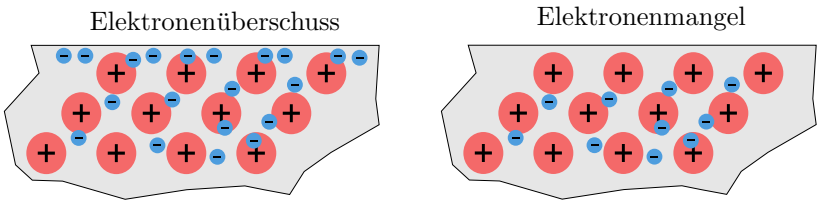


Abbildung 3.7: Leiter, bei denen an der Oberfläche ein Elektronenüberschuss (links) beziehungsweise ein Elektronenmangel (rechts) herrscht.

3.4 Das Coulombsche Gesetz

Geladene Teilchen beeinflussen sich gegenseitig, wobei sich Ladungen gleichen Vorzeichens abstoßen und unterschiedlichen Vorzeichens anziehen. Bereits um 1785 konnte Charles Augustin de Coulomb experimentell nachweisen, dass sich der Betrag der Kraft proportional zu jeder der kugelsymmetrischen Ladungen Q_1 und Q_2, aber antiproportional zum Quadrat des Abstandes r der beiden Ladungen voneinander verhält.

Die proportionale Wechselwirkung zwischen den Ladungen Q_1 sowie Q_2 und dem Abstandsquadrat r^2 führt mit der Proportionalitätskonstante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ zur Kraft zwischen den Ladungen. Dieser proportionale Zusammenhang ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

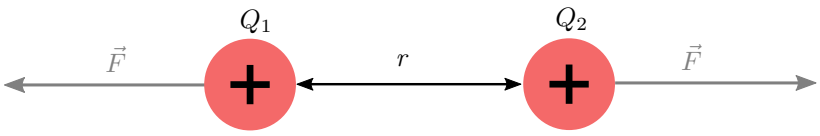


Abbildung 3.8: Anordnung von zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 sowie die auf sie wirkenden Kräfte.

Durch das Einführen eines Proportionalitätstermes kann aus dem zuvor bestimmten proportionalen Zusammenhang die resultierende Kraft F direkt errechnet werden. Die resultierende Gleichung 3.1 wird Coulombsches Gesetz genannt.

$$F \sim \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \rightarrow F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{3.1}$$

Der Faktor ε_0 wird als **elektrische Feldkonstante** (auch Dielektrizitätskonstante des Vakuums) bezeichnet, während die 4 π ihren Ursprung in geometrischen Betrachutngen der Anordnung haben.

Der Wert der elektrischen Feldkonstante beträgt etwa:

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \mathrm{As/Vm}$$

Gibt es mehr als zwei Ladungen, kann die resultierende Kraft auf jede der einzelnen Ladungen durch die Addition aller Einzelkräfte errechnet werden, die sich aus jeder Zweierkombination von Ladungen ergibt, an der die Zielladung beteiligt ist. Dieser Effekt wird als Superpositionsprinzip bezeichnet, welches auch im Modul 5 *Erweiterte Gleichstromnetzwerke* zur Berechnung von sich ergebenden Spannungen verwendet wird.

In der Praxis wird dieser Effekt unter anderem beim elektrostatischen Aufspannen von Papier auf Plottern, bei Laserdruckern zur Übertragung des Tonerpulvers auf das Papier, bei Touchscreens zur Bestimmung des Berührungspunktes oder bei Plasmabildschirmen zur kontrollierten Gasentladung von Ionen zur Lichterzeugung genutzt.

4 Das elektrische Feld

Lernziele: Das elektrische Feld

Die Studierenden

- entwickeln ein "Gefühl" für elektrische Felder
- elektrische Felder beschreiben und für einfache Ladungsanordnungen berechnen
- das Verhalten elektrischer Felder an Leitern charakterisieren

4.1 Charakterisierung des elektrischen Feldes

Wie gezeigt haben elektrische Ladungen einen direkten Einfluss auf andere Ladungen. Dies geschieht dadurch, dass sie die Eigenschaften des Raums um sich herum verändern. Diese Veränderungen können durch ein Feldmodell beschrieben werden. Der Feldbegriff ist in der Physik von fundamentaler Bedeutung. Beispiele hierfür sind das Temperaturfeld, in dem die Temperatur abhängig von seinem Ort durch eine skalare Größe beschrieben wird. Neben solchen skalaren Feldern gibt es auch Vektorfelder, in denen jedem Ort neben einer Größe auch eine Richtung, in die sie wirkt, zugeschrieben wird. Beispiele hierfür sind das Gravitationsfeld oder ein Strömungsfeld, welches beispielsweise die Richtung und Geschwindigkeit von Wasserteilchen beschreibt.

Das **elektrische Feld** wird durch **Größe** (in Newton) sowie die **Richtung** der **Kraft** $\vec{F}_\mathrm{E}$ auf eine positive Probeladung Q_2 beschrieben und durch Feldlinien charakterisiert. Dargestellt wird diese Anordnung in Abbildung 4.1.

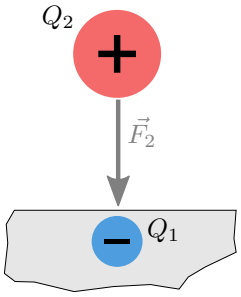


Abbildung 4.1: Anziehende Kraftwirkung F_2 einer Probeladung Q_2 in Richtung ruhender Ladung Q_1

Die elektrische Feldstärke ist also:

Merke:

$$\text{Elektrische Feldstärke} = \frac{\text{Kraft auf Ladung}}{\text{Ladung}}$$

$$\vec{E_1} = \frac{\vec{F_2}}{Q_2} \qquad \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{A \cdot s}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] \tag{4.1}$$

Nachteilig an dieser Definition erscheint auf den ersten Blick, dass die elektrische Feldstärke von der Probeladung Q_2 abhängig zu sein scheint. Durch Einsetzen des Coulombschen Gesetzes (Gleichung 3.1) in Gleichung 4.1 lässt sich jedoch zeigen, dass die Kraft F_2 immer proportional zur Probeladung Q_2 steigt. Ihr Verhältnis liefert also immer den gleichen Betrag für die elektrische Feldstärke, und diese wird, wie in Abbildung 4.2 gezeigt, unabhängig von der Probeladung:

$$\vec{E_1} = \frac{\vec{F_2}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{1}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r^2} \tag{4.2}$$

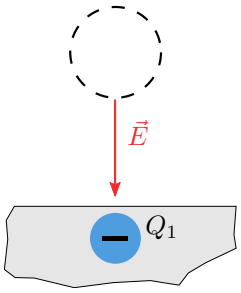


Abbildung 4.2: Das durch Q_1 hervorgerufene elektrische Feld ist unabhängig von jeglicher Probeladung

4.2 Elektrische Leiter und elektrostatische Felder I

Im vorherigen Kapitel wird die Wirkung von Punktladungen auf das elektrische Feld untersucht. Da im Alltag elektrische Felder jedoch häufig von geladenen, elektrischen Leitern (wie Metallen) ausgehen, werden sie hier gesondert aufgeführt.

Liegt ein Elektronenüberschuss vor, wird - wie in Abbildung 3.7 dargestellt - die positive Probeladung Q in Richtung der Plattenoberflächen angezogen. Auch die Feldlinien $\vec{E}$ des elektrischen Feldes verlaufen in Richtung der Leiteroberfläche. Im Falle eines Elektronenmangels wird die Probeladung abgestoßen, auch die Feldlinien führen vom positiven Leiter weg.

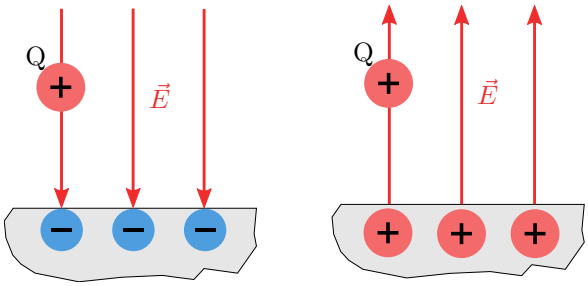


Abbildung 4.3: Richtung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ von einem negativ (links) sowie positiv (rechts) geladenen Leiter auf eine positive Probeladung

Da die Elektronen innerhalb eines Leiters frei beweglich sind, würden diese im Falle eines elektrischen Feldes innerhalb eines Leiters durch dieses Feld angezogen (oder abgestoßen) werden, bis sich das Feld innerhalb des Leiters ausgeglichen hat (siehe Abbildung 4.4). Folglich kann in diesem Fall kein elektrisches Feld innerhalb eines Leiters existieren

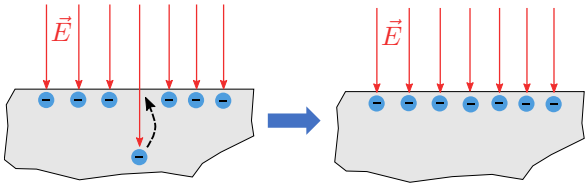


Abbildung 4.4: Freier Ladungsträger wird durch das elektrische Feld augenblicklich an den Leiterrand gezogen. Innerhalb des Leiters kann deshalb kein elektrostatisches Feld existieren.

Dies führt zu der Erkenntnis, dass die elektrischen Feldlinien zwangsläufig **senkrecht** auf der Oberfläche von Leitern stehen müssen (siehe Abbildung 4.5). Eine schräg stehende Feldlinie ließe sich sonst vektoriell in eine senkrecht und eine horizontal auf der Leiteroberfläche verlaufende Komponente zerlegen. Da diese horizontale Komponente augenblicklich durch die sich bewegenden Ladungsträger ausgleichen wird, kann sie nicht existieren. Dieser Effekt tritt ausschließlich bei elektrisch leitenden Materialien auf, in nicht leitenden Materialien (sogenannten Isolatoren) gibt es keine beweglichen Ladungsträger, welche die horizontale Komponente ausgleichen können.

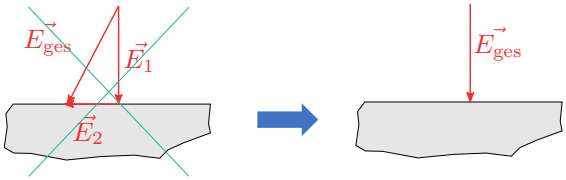


Abbildung 4.5: Durch die Eliminierung der horizontalen Komponente $\vec{E}_2$ des elektrischen Feldes bleibt ausschließlich die vertikale Komponente $\vec{E}_1$ bestehen, welche senkrecht auf der Leiteroberfläche steht.

4.3 Beispiele elektrischer Felder

Das einfachste elektrische Feld ist das **Homogenfeld**. In diesem Feld sind sowohl der Betrag als auch die Richtung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ an jedem Punkt konstant. Eine sich in diesem Feld befindliche Probeladung erfährt also an jeder Stelle die gleiche Kraftwirkung. Erzeugen lässt sich ein solches Feld wie in Abbildung 4.6 dargestellt beispielsweise zwischen zwei parallelen Metallplatten, welche mit unterschiedlichen Ladungen Q aufgeladen sind. Die Feldlinien verlaufen grundsätzlich von der positiv aufgeladenen zur negativ aufgeladenen Metallplatte. Häufig wird die Dichte, in der die Feldlinien eingezeichnet sind, als Maß für die Stärke des elektrischen Feldes verwendet. Je dichter die Feldlinien eingezeichnet sind, desto stärker ist das elektrische Feld an dieser Stelle.

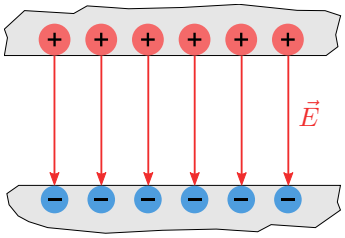


Abbildung 4.6: Ein elektrisches Homogenfeld zwischen zwei unterschiedlich geladenen Metallplatten

Das elektrische Feld einer Punktladung wird auch als **Radialfeld** (siehe Abbildung 4.7) bezeichnet. Unter der idealisierten Annahme, dass sich unendlich weit entfert eine Hülle mit entgegengesetzter Ladung befindet, breiten sich die Feldlinien geradelinig aus. In ihrer symmetrischen Anordnung zeigen sie bei positiven Punktladungen in Richtung der negativen Hülle, bei negativen Punktladungen in Richtung der Punktladung.

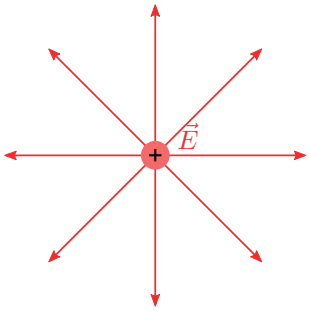


Abbildung 4.7: Radiales elektrische Feld einer positiven Punktladung.

Die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ ist direkt proportional zur Ladung Q, verringert sich jedoch mit zunehmendem Abstand r von ihr quadratisch. Errechnet werden kann ihr Betrag über:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{4.3}$$

Die mit zunehmendem Abstand r von der Punktladung schwächer werdende elektrische Feldstärke zeigt sich neben dem mathematischen Zusammenhang auch in dem größer werdenden Abstand zwischen den Feldlinien.

Kompliziertere elektrische Felder ergeben sich schon beim Hinzufügen einer zweiten Punktladung. Im Fall von zwei betragsgleichen Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens (Abbildung 4.8) ergibt sich zwischen den Ladungen ein nahezu gleichmäßiges Feld, während es weiter außen bedeutend schwächer wird.

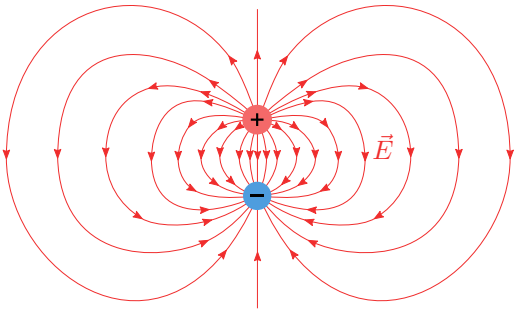


Abbildung 4.8: Das elektrische Feld von zwei betragsgleichen Ladungen unterschiedlichen Vorzeichens

Der Fall mit zwei identischen Punktladungen zeigt wie in Abbildung 4.9 eine Besonderheit des elektrischen Feldes. Während sich die Feldlinien im Rest des Raumes erwartbar von den positiven Ladungen wegzeigen, gibt es zwischen den Punktladungen einen freien Raum ohne Feldlinien. Dies liegt daran, dass sich die entgegengesetzten Feldlinien in diesem Zwischenraum gegenseitig kompensieren. Im Punkt zwischen beiden Ladungen liegt keine elektrische Feldstärke vor, auf der Ebene zwischen den Ladungen neutralisieren sich die jeweiligen horizontalen Kompenenten, und es liegt lediglich ein elektrisches Feld in der jeweiligen vertikalen Richtung vor.

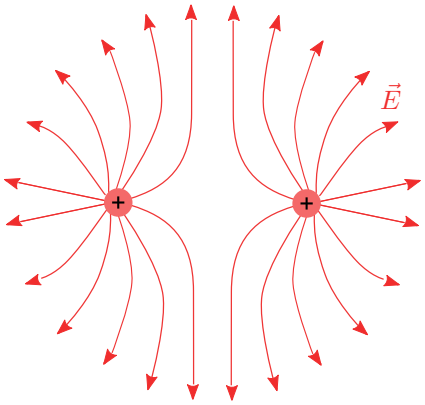


Abbildung 4.9: Das elektrische Feld von zwei betragsgleichen Ladungen gleichen Vorzeichens

5 Das elektrische Potential

Lernziele: Das elektrische Potential

Die Studierenden können

- Verschiebearbeit von Ladungen im elektrischen Feld berechnen
- Äquipotentialflächen bestimmen und einzeichnen
- elektrische Spannungen aus gegebenen Feldgrößen bestimmen

5.1 Arbeit im elektrischen Feld

Befindet sich eine Ladung innerhalb eines elektrischen Feldes, so wird eine Kraft auf sie ausgeübt. Wird die Ladung nun innerhalb des Feldes bewegt, muss eine Arbeit verrichtet werden. Analog ist hier das Gravitationsfeld zu sehen, bei dem eine Arbeit verrichtet werden muss, wenn eine Masse angehoben wird, also die potentielle Energie des Objektes erhöht wird. Dieser Abschnitt ist als kurzer Vorgriff auf Modul 2 *Energie und Leistung* zu sehen, in welchem die elektrische Arbeit genau definiert wird.

Das Vorzeichen einer verrichteten Arbeit ist abhängig davon, ob die Arbeit auf das betrachtete System (hier: Potentielle Energie der Probeladung Q im elektrischen Feld $\vec{E}$) oder auf den Erzeuger dieser Arbei bezogen wird. In diesem Skript wird sich auf den Erzeuger bezogen. Muss dieser eine Arbeit verrichten, um die potentielle Energie des Systems zu erhöhen, ist die verrichtete Arbeit als negativ anzusehen. Wird eine Arbeit vom System freigesetzt, sprich die potentielle Energie der Prodeladung sinkt, ist die Arbeit positiv.

Physikalisch gesehen ist die Arbeit das Produkt aus der Kraft, die benötigt wird, um die Ladung zu bewegen, multipliziert mit der zurückgelegten Wegstrecke. Mit der Erkenntnis aus Kapitel 4.1, dass die elektrische Feldstärke der Quotient aus der Kraft auf eine Ladung pro Ladung ist (siehe Gleichung 4.1), lässt sich die zum Bewegen der Ladung benötigte Arbeit ermitteln.

Nachfolgend soll berechnet werden, welche Arbeit W bei der positiven Probeladung Q aus Abbildung 5.1 freigesetzt wird, wenn sie sich entlang der Feldlinien in Richtung der negativ geladenen Leiterplatte bewegt.

Die Verlauf der elektrischen Feldstärke sowie Richtung von $\vec{E}$ gegenüber dem Weg x lässt sich wie in Abbildung 5.2 gezeigt darstellen.

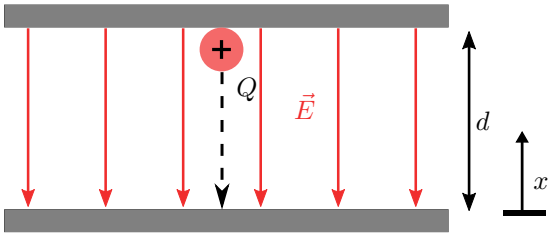


Abbildung 5.1: Probeladung Q in einem elektrischen Homogenfeld $\vec{E}$

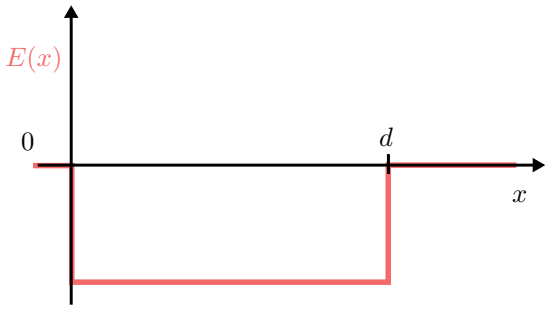


Abbildung 5.2: Feldstärke $E(x)$ im betrachteten Aufbau aus Abbildung 5.1

$$W = \int_d^0 \vec{F}\, d\vec{x}$$

Da die Richtung des elektrischen Feldes $\vec{E}$ der Raumrichtung x entgegengesetzt ist, führt ein Eliminieren der Vektorpfeile zu einem negativen Vorzeichen vor dem Integral. Durch Einsetzen der Kraft F in Gleichung 4.1 ergibt sich:

$$W = -Q \int_d^0 E \cdot \mathrm{d}x$$

Lösen des Integrals und Einsetzen der Integrationsgrenzen ergibt:

$$W = -Q \cdot E\,[x]_d^0 = -Q \cdot E(0 - d)$$

$$W = Q \cdot E \cdot d$$

Die Differenz der zu- oder abgeführten Arbeit einer Ladung im elektrischen Feld beträgt also:

$$\Delta W = Q \cdot E \cdot \Delta x \tag{5.1}$$

Beispiel 5.1

Für die in Abbildung 5.1 dargestellte Probeladung soll erreichnet werden, wie viel Energie auf ihrem Weg vom Startpunkt zur negativen Platte freigesetzt wird.

Die Probeladung betrage $Q = 1\mu\text{C}$, der Abstand zur Platte betrage 0,1 m und das elektrische Feld sei $E = 200$ V/m.
Die Arbeit W berechnet sich dann zu

$$W = Q \cdot E \cdot d = 1 \cdot 10^{-6}\text{C} \cdot 200\text{V/m} \cdot 0{,}1\text{m} = 2 \cdot 10^{-5}\text{J}$$

Analog zu einem Objekt im Gravitationsfeld führt das elektrische Feld einer Ladung Energie zu. Dadurch wird diese beschleunigt, und die potentielle Energie wird in kinetische Energie umgewandelt.

Es ist unmittelbar einsichtig, dass der Betrag der im elektrischen Feld gespeicherten und nutzbaren potentiellen Energie der Probeladung Q vom Ort x der Probeladung linear abhängig ist (siehe Abbildung 5.3). Verfügt die Probeladung bereits im Vorfeld über eine kinetische Energie, oder geht das elektrische Feld über den betrachteten Abschnitt hinaus, lässt sich die Gleichung um den zusätzlichen Term W_0 erweitern:

$$W(x) = Q \cdot E \cdot x + W_0 \tag{5.2}$$

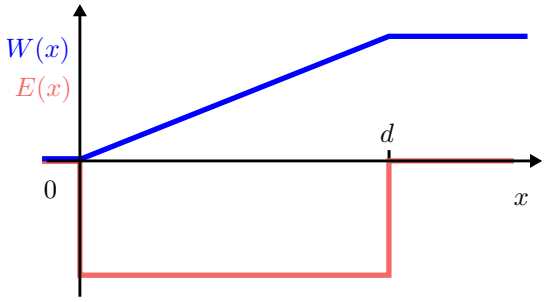


Abbildung 5.3: Linearer Zusammenhang zwischen dem Ort x und der potentiellen Energie $W(x)$ der Probeladung.

Der Übergang zwischen der im elektrischen Feld gespeicherten potentiellen Energie in die kinetische Energie der Probeladung kann über das Schaubild in Abbildung 5.4 dargestellt werden.

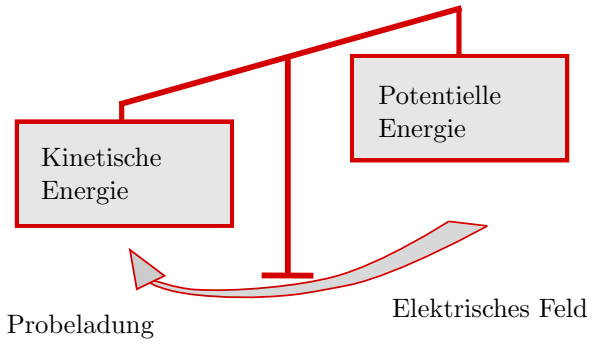


Abbildung 5.4: Übergang von potentieller Energie im elektrischen Feld zu potentieller Energie in der Probeladung

Zur allgemeinen Beschreibung muss die technisch nutzbare Feldenergie unabhängig von der Probeladung Q sein. Dazu wird die potentielle Energie auf ein Arbeitspotential normiert.

$$\frac{W(x)}{Q} = E \cdot x + \frac{W_0}{Q}$$

5.2 Definition des elektrischen Potentials

Die potentielle Energie normiert auf die betrachtete Ladung Q ist das **elektrische Potential** φ des elektrischen Feldes. Dieses ist für jeden Punkt im Raum unabhängig von weiteren Einflussfaktoren direkt bestimmbar. Das Potentialfeld ist im Gegensatz zum elektrischen Feld ein Skalarfeld. Das bedeutet, dass jedem Punkt im Raum unabhängig von weiteren Einflussfaktoren ein eindeutiges elektrisches Potential zugeordnet werden kann, jedoch keine Richtung dieser Größe im Raum vorliegt.

$$\varphi = \frac{W}{Q} \tag{5.3}$$

$$[\varphi] = \text{V (Volt)}$$

Abbildung 5.5 zeigt ein elektrisches Homogenfeld, in welches die Potentiallinie eingezeichnet ist, auf welcher sich die Ladung Q gerade befindet. Mit zunehmender Entfernung von der positiven Platte in x-Richtung steigt das Potential an, und kann wie folgt berechnet werden:

$$\varphi(x) = E \cdot x + \varphi_0 \tag{5.4}$$

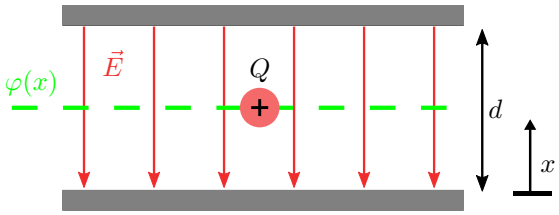


Abbildung 5.5: Elektrisches Homogenfeld mit eingezeichneter Potentiallinie $\varphi(x)$

Die Steigung des Potentials ist durch die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ bestimmt. Das elektrische Potential φ und die elektrische Feldstärke hängen durch den negativen Gradienten des Potentials zusammen. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 5.6 verdeutlicht.

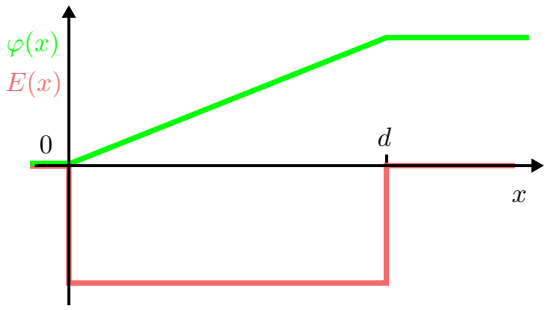


Abbildung 5.6: Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potential φ und der elektrischen Feldstärke E im Homogenfeld

Die Beziehung kann im Homogenfeld durch die folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \tag{5.5}$$

In inhomogenen, dreidimensionalen Feldern gilt die allgemeine Gleichung, bei der der Gradient von φ in jede Raumrichtung errechnet wird:

$$E = -\text{grad}\,\varphi(x,y,z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \tag{5.6}$$

Um das elektrische Potential an einem Punkt vollständig zu beschreiben, muss wie in Gleichung 5.4 aufgeführt als notwendige Randbedingung ein Bezugspotential φ_0 gewählt werden, welches eindeutig definiert ist. Prinzipiell ist dieses Potential beliebig wählbar, in der Regel wird jedoch eine Bezugselektrode gewählt, für die das Potential gleich null gesetzt wird. Im Fall des in Abbildung 5.5 gezeigten Aufbaus wäre dies:

$$\varphi_0 = \varphi(x = 0) = 0$$

5.3 Zusammenhang zwischen Arbeit und Potential

Im homogenen elektrischen Feld ist das Potential φ wie Formel 5.4 zeigt ausschließlich von der Entfernung x zur Bezugselektrode abhängig. Dies bedeutet, dass alle Flächen, die senkrecht zum Feld stehen, ein konstantes Potential haben. Solche Flächen werden als Äquipotentialflächen bezeichnet, wie sie in Abbildung 5.7 mit Hilfe der grünen Linien dargestellt sind. Es muss keine Arbeit verrichtet werden, um eine Ladung entlang einer solchen Fläche zu bewegen.

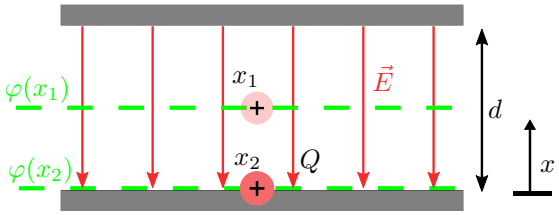


Abbildung 5.7: Elektrisches Homogenfeld, in dem sich eine Probeladung Q von der Äquipotentiallinie $\varphi(x_1)$ auf die Äquipotentiallinie $\varphi(x_2)$ bewegt

Die potentielle Energie W_{12} einer Probeladung Q, die durch das elektrische Feld von einem Punkt x_1 nach x_2 bewegt wird, kann durch die Potentialdifferenz zwischen diesen Punkten beschrieben werden. Die Reihenfolge der Indizes der Arbeit W_{12} beschreibt dabei die Bewegungsrichtung.

Wird eine Probeladung wie in Abbildung 5.7 gezeigt von der Äquipotentialfläche $\varphi(x_1)$ nach $\varphi(x_2)$ bewegt, nimmt sie dabei die folgende Energie auf:

$$W_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

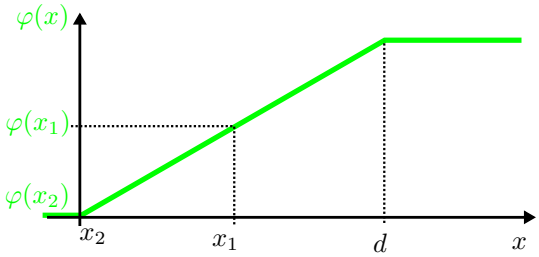


Abbildung 5.8: Darstellung des Potentialverlaufs $\varphi(x)$ innerhalb des elektrischen Homogenfeldes

Bei der in Abbildung 5.8 getroffenen Wahl der Bezugsfläche von $\varphi_2 = 0$ ergibt sich für die zugeführte Arbeit das Ergebnis:

$$W_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - 0) = Q \cdot \varphi_1$$

Mit Hilfe des nachfolgenden Gedankenexperimentes lässt sich eine weitere zentrale Eigenschaft des elektrischen Feldes aufzeigen.

Wie in Abbildung 5.9 gezeigt wird eine Probeladung Q in einem Homogenfeld zwischen den Punkten 1-4 in einem geschlossenem Umlauf bewegt. Die bei diesem Vorgang zu verrichtenden Teilenergien werden betrachtet. So wird bei einer Bewegung vom Punkt 1 zu Punkt 2 eine Arbeit von $W_{12} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$ verrichtet, und von Punkt 4 zu Punkt 1 die Energie $W_{41} = Q \cdot (\varphi_4 - \varphi_1)$.

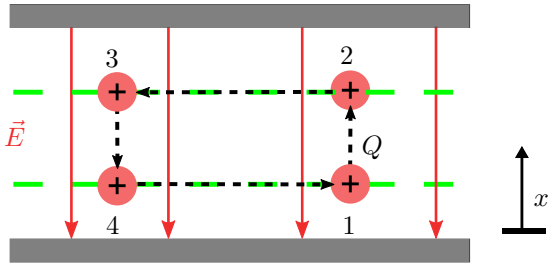


Abbildung 5.9: Darstellung des Potentialverlaufs $\varphi(x)$ innerhalb des elektrischen Homogenfeldes

Die für einen gesamten Umlauf benötigte Energie ergibt sich durch die Aufsummierung der vier Teilenergien:

$$W_{\text{ges}} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + Q \cdot (\varphi_2 - \varphi_3) + Q \cdot (\varphi_3 - \varphi_4) + Q \cdot (\varphi_4 - \varphi_1)$$

Da die Ladung Q in allen Termen identisch ist, ergibt sich durch das Ausklammern von Q:

$$W_{\text{ges}} = Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_4 - \varphi_1)$$

$$\rightarrow W_{\text{ges}} = Q \cdot 0 = 0$$

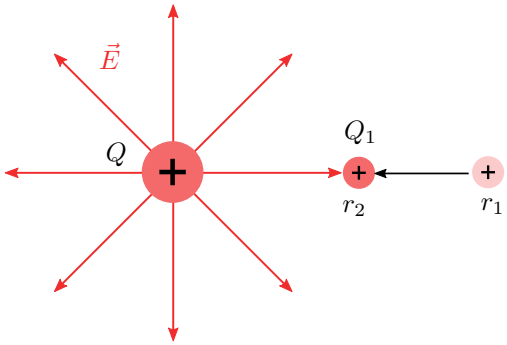
Für einen geschlossenen Umlauf einer Probeladung im Homogenfeld ist also keine Energie erforderlich, da sie ausschließlich vom Anfangs- und Endpunkt der Bewegung, nicht jedoch vom gewählten Weg abhängig ist.

Folglich wird beim elektrischen Feld auch von einem **wirbelfreien Quellenfeld** gesprochen. Dies bedeutet, dass die Feldlinien keine geschlossenen Linien bilden, sondern jeweils einen Anfang (auf positiven Ladungen) und einen Endpunkt (auf negativen Ladungen) haben.

Diese Betrachtung gilt nicht nur für das Homogenfeld, sondern trifft auf jedes elektrostatische Feld zu.

Beispiel 5.2: Arbeit im Radialfeld

In folgendem Beispiel soll die Probeladung Q_1 vom Abstand r_1 auf den Abstand r_2 an die Feste Ladung Q herangeführt werden.



Q betrage 1 C, Q_1 1 mC. Welche Arbeit ist erforderlich, wenn $r_1 = 1$ m und $r_2 = 50$ cm seien?

$$W_{12} = Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{12} = Q_1 \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right) dr$$

$$W_{12} = Q_1 \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{r^2}$ beträgt $-\frac{1}{r}$.

$$W_{12} = Q_1 \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} \right) = Q_1 \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right)$$

wobei $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ dem Potential $\varphi(r)$ entspricht.

$$W_{12} = Q_1 \cdot (\varphi(r_1) - \varphi(r_2))$$

Einsetzen der gegebenen Werte:

$$W_{12} = (1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}) \cdot \frac{1\,\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{1\,\mathrm{m}} - \frac{1}{0{,}5\,\mathrm{m}} \right)$$

$$W_{12} = -8{,}98755 \times 10^6\,\mathrm{J}$$

Folglich müssen etwa 8,99 Megajoule aufgewendet werden, um die Ladung Q_1 zu verschieben.

5.4 Definition der elektrischen Spannung

Die aus dem elektrischen Feld für einen technischen Prozess nutzbare Energie ist durch die **Potentialdifferenz** zwischen Anfangs- und Endpunkt des Weges gegeben. Durch ihre fundamentale Bedeutung in der Elektrotechnik wird sie mit einem Namen und Formelbuchstaben bedacht, und wird als **elektrische Spannung** U bezeichnet:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{5.7}$$

$$[U] = \text{V (Volt)}$$

Durch die Reihenfolge der Indizes wird - analog zur Potentialdifferenz - die Zählrichtung des Spannungspfeiles angegeben. In Abbildung 5.10 beschreibt die Spannung U_{12} also die Potentialdifferenz zwischen den Potientialen φ_1 und φ_2. Durch die Eigenschaften der Äquipotentialflächen ist es hierbei vollkommen unerheblich, von welchem Punkt von φ_1 gestartet wird und welcher Punkt auf φ_2 das Ziel darstellt. Auch der Pfad, welcher zwischen den Punkten gewählt wird, ist für die Spannung zwischen den Punkten unerheblich.

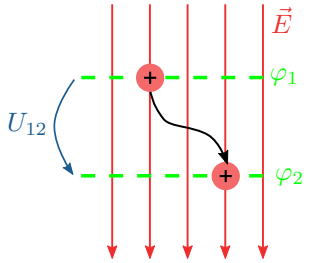


Abbildung 5.10: Spannung U_{12} zwischen den beiden Äquipotentiallinien φ_1 und φ_2

Der Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und dem Potential ist bereits aus Gleichung 5.4 bekannt und wird (bei einem Bezugspotential von $\varphi_0 = 0$) mit $\varphi(x) = E \cdot x$ angegeben.

Eingesetzt in die Definition der Spannung (Gleichung 5.7) ergibt sich:

$$U = \varphi(x = d) - \varphi(x = 0) = E \cdot d - E \cdot 0$$

Die elektrische Spannung U kann in einem wie in Abbildung 5.11 dargestellten Homogenfeld wie folgt berechnet werden, sofern die Wegstrecke d parallel zu den Feldlinien liegt:

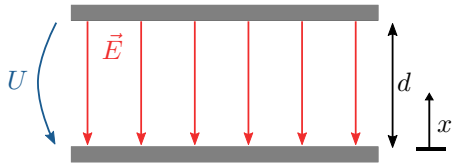


Abbildung 5.11: Elektrische Spannung U im Homogenfeld

$$U = E \cdot d \tag{5.8}$$

Alternativ kann aus einer gegebenen Spannung U bei bekannter Wegstrecke d auch die elektrische Feldstärke berechnet werden:

$$E = \frac{U}{d} \tag{5.9}$$

In Abbildung 5.12 lässt sich erkennen, dass die Spannung nichts anderes als die über die Wegstrecke d aufintegrierte Feldstärke E ist.

Während dieses Integral im Homogenfeld durch eine Multiplikation von elektrischem Feld E und Wegstrecke d ermittelt werden kann, ist dies bei inhomogenen Feldern nur durch das Lösen des Integrals möglich:

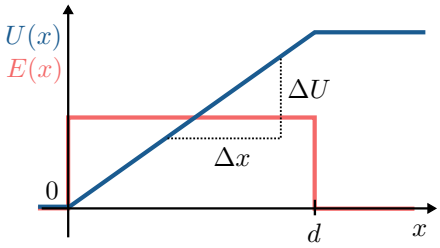


Abbildung 5.12: Zusammenhang zwischen elektrischer Spannung U und elektrischem Homogenfeld E

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{5.10}$$

Zu beachten ist hierbei, dass es sich bei dem Produkt $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ um Vektoren handelt. Zeigen sie in die gleiche Richtung, dürfen die Vektorpfeile eliminiert werden, andernfalls muss das Skalarprodukt verwendet werden:

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = E \cdot \mathrm{d}s \cdot \cos(\alpha)$$

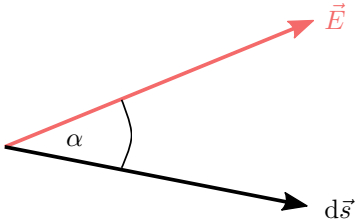


Abbildung 5.13: Skalarprodukt aus Feldstärke $\vec{E}$ und Wegstück $\mathrm{d}\vec{s}$

6 Die elektrische Stromstärke

Lernziele: Die Elektrische Stromstärke

Die Studierenden können

- die Begriffe der elektrischen Stromstärke und der elektrischen Stromdichte erläutern und anwenden
- die elektrische Stromstärke sowie die elektrische Stromdichte in einfachen Anordnungen berechnen
- die Driftgeschwindigkeit von Elektronen in einfachen Anordnungen bestimmen

6.1 Das elektrische Strömungsfeld

Die vorherigen Kapitel beziehen sich ausschließlich auf ruhende Ladungsträger. Folglich wird dieser Teilbereich der Elektrotechnik als Elektrostatik bezeichnet.

Auf molekularer Ebene bewegen sich die freien Elektronen in einem elektrischen Leiter ständig in zufällige Richtungen. Im Mittel gleicht sich die Bewegung der einzelnen Elektronen jedoch aus. Liegt an einem Leiter ein elektrisches Feld $\vec{E}$ an, so werden die frei beweglichen Elektronen in diesem in Richtung der positiv geladenen Elektrode angezogen (siehe Abbildung 6.1). Zusätzlich zur zufälligen, ungerichteten Bewegung wird eine **gerichtete Bewegungskomponente** hinzugefügt. Liegt eine solche gerichtete Bewegung von Teilchen vor, wird von einem **Strömungsfeld** gesprochen.

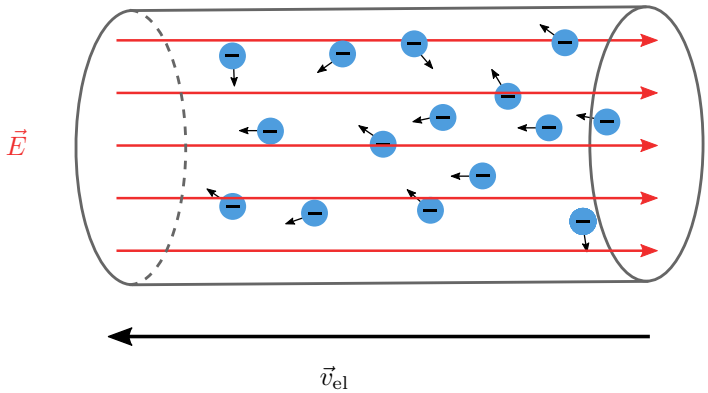


Abbildung 6.1: Elektrischer Leiter mit eingeprägter elektrischer Feldstärke $\vec{E}$. Die Driftbewegung der Elektronen $\vec{v}_{\mathrm{el}}$ verläuft in entgegengesetzter Richtung zur Feldstärke.

Neben Elektronen in Leitern kann ein elektrisches Strömungsfeld auch durch geladene Ionen in Gasen oder Flüssigkeiten hervorgerufen werden.

Im Fall einer im zeitlichen Mittel konstanten Ladungsträgerbewegung, was im abgebildeten Leiter durch ein konstantes elektrisches Feld erreicht wird, liegt ein stationäres elektrisches Strömungsfeld vor.

6.2 Der elektrische Strom

Als elektrische Stromstärke I wird die gerichtete Bewegung (Driftbewegung) von elektrischen Ladungsträgern bezeichnet. Die Richtung der elektrischen Stromstärke ist so definiert, dass sie vom höheren Potential (positiv geladene Elektrode) zum niedrigeren Potential verläuft. Damit verläuft

sie in die gleiche Richtung wie die elektrische Feldstärke, jedoch in die zur Driftgeschwindigkeit der Elektronen entgegengesetzen Richtung (siehe Abbildung 6.2).

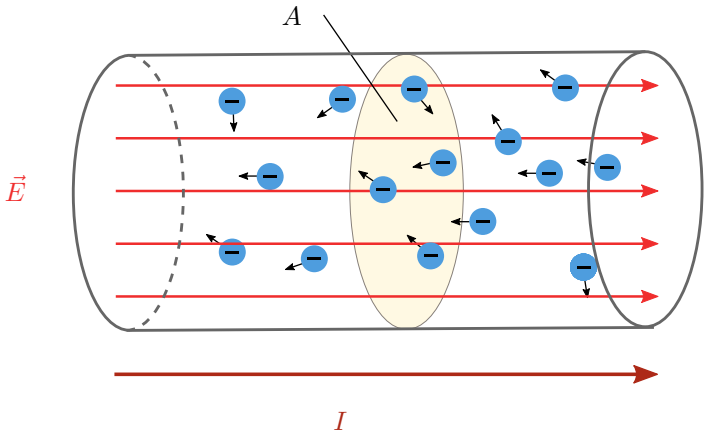


Abbildung 6.2: Elektrischer Leiter mit elektrischer Feldstärke $\vec{E}$ und resultierender elektrischer Stromstärke I.

Die Elektronen erreichen eine feldstärkeabhängige Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{el}}$. Zusammenstöße mit den Metallatomen aus der Gitterstruktur behindern die freie Bewegung der Elektronen, und wirken dieser als eine Art Widerstand entgegen.

$$\vec{v}_{\text{el}} = -b_{\text{el}} \cdot \vec{E} \tag{6.1}$$

$$[\vec{v}_{\text{el}}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Proportionalitätsfaktor b_{el} zwischen der Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{el}}$ und der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ wird als Elektronenbeweglichkeit bezeichnet.

$$[b_{\text{el}}] = \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

Neben der Driftgeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{el}}$ ist auch die Anzahl der Elektronen N_{el} sowie deren Ladungsmenge ΔQ zur Ermittlung der elektrischen Stromstärke I relevant.

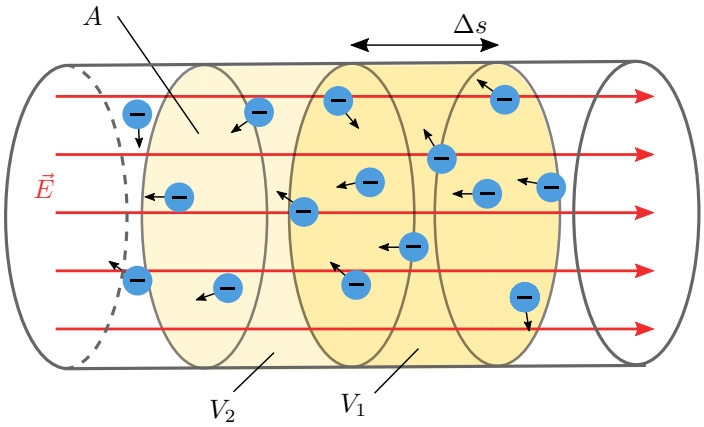


Abbildung 6.3: Illustration der Elektronenbewegung durch einen elektrischen Leiter

Die Ladungsmenge ΔQ entspricht

$$\Delta Q = e \cdot N_{\text{el}} = e \cdot n_{\text{el}} \cdot V_1$$

wobei n_{el} die Dichte der Ladungsträger im Volumen V_1 angibt.

Mit $V_1 = \Delta s \cdot A$ und $\Delta s = v_{\text{el}} \cdot \Delta t$ ergibt sich:

$$\Delta Q = e \cdot n_{\text{el}} \cdot v_{\text{el}} \cdot \Delta t \cdot A$$

Über die Definition der Driftgeschwindigkeit (6.1) führt dies zu:

$$\Delta Q = e \cdot n_{\text{el}} \cdot b_{\text{el}} \cdot E \cdot \Delta t \cdot A\,,$$

woraus sich die Änderung der Ladungsmenge ΔQ pro Zeiteinheit Δt herleiten lässt:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = e \cdot n_{\text{el}} \cdot b_{\text{el}} \cdot E \cdot A$$

6.3 Definition der elektrischen Stromstärke

Diese so ermittelte Ladungsänderung über die Zeit wird als **elektrische Stromstärke** I bezeichnet:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{6.2}$$

$$[I] = \text{Ampere} = \text{A}$$

Aus dieser Definition der Stromstärke folgt, dass eine über einen Zeitraum aufaddierte elektrische Stromstärke die in dieser Zeit transporte Ladungsmenge Q ergibt:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.3}$$

Neben der gesamten elektrischen Stromstärke I ist oft auch der auf den Leiterquerschnitt bezogene Strom von Interesse. Zur Berechnung dieser **Stromdichte** J wird die Stromstärke ΔI durch ein elementar kleines Flächenelement ΔA betrachtet:

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta A} \tag{6.4}$$

Ist die elektrische Stromstärke I über eine Fläche gleichmäßig verteilt, lässt sich dies vereinfachen:

$$J = \frac{I}{A} \tag{6.5}$$

Da die Stromstärke I über den gesamten Leiter hinweg identisch bleibt, ändert sich bei einer Querschnittsverkleinerung des Leiters auch die resultierende elektrische Stromdichte J (siehe Abbildung 6.4).

Hier gilt:

$$J_1 \cdot A_1 = J_2 \cdot A_2 = I$$

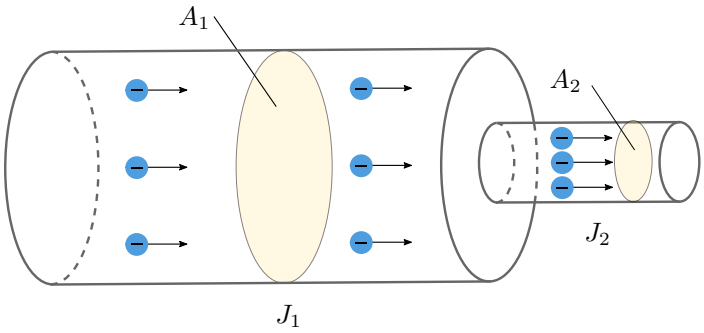
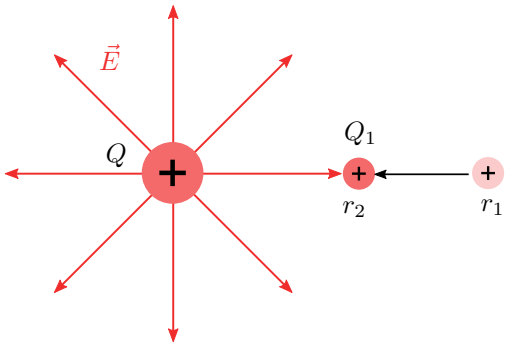


Abbildung 6.4: Zusammenhang zwischen der Stromdichte J_1 bei Querschnitt A_1 und J_2 bei A_2

Beispiel 6.1

Durch eine Kupferleitung mit dem Querschnitt $A = 1\text{mm}^2$ fließt ein Strom von $I = 8\text{A}$. Ein mm^3 enthält etwa $8{,}5 \cdot 10^{19}$ Atome. Jeweils 1 Elektron pro Atom sei am Ladungstransport beteiligt.



Mit welcher Driftgeschwindigkeit bewegen sich die Elektronen im Mittel durch die Leitung?

$$\vec{v}_{\text{el}} = -b_{\text{el}} \cdot \vec{E}$$

Da sich die negativ geladenen Elektronen entgegen der Feldrichtung $\vec{E}$ (und somit auch entgegen der technischen Stromrichtung I) bewegen, ist die Richtung der Driftgeschwindigkeit ausreichend beschrieben, und es genügt, den Betrag v_{el} zu berechen.
mit dem Zusammenhang

$$I = e \cdot n_{\text{el}} \cdot b_{\text{el}} \cdot E \cdot A \rightarrow E = \frac{I}{e \cdot n_{\text{el}} \cdot b_{\text{el}} \cdot A}$$

ergibt sich:

$$v_{\text{el}} = \cancel{b_{\text{el}}} \cdot \frac{I}{e \cdot n_{\text{el}} \cdot \cancel{b_{\text{el}}} \cdot A}$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$v_{\text{el}} = \frac{8\text{A}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{As} \cdot 8{,}5 \cdot 10^{19}\,\text{mm}^{-3} \cdot 1\,\text{mm}^2}$$

$$v_{\text{el}} = 0{,}59 \frac{\text{mm}}{s}$$

Die Elektronen bewegen sich im Mittel also mit 0,59 mm/s. Da sich innerhalb des Leiters die elektrische Feldstärke jedoch mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegt, setzen sich alle Elektronen

des Leiters praktisch gleichzeitig in Bewegen. Vergleichbar ist dies mit einem vollständig mit Murmeln gefüllten Rohr. Im Moment des hereinschiebens einer weiteren Murmel fällt auf der anderen Seite eine Murmel heraus, obwohl sich die einzelnen Murmeln nur langsam bewegen.

A Übungsaufgaben

A.1 Elektrisches Homogenfeld 1

Mit einem Dielektrikum, in dem maximal eine Feldstärke $E = 30\ \frac{kV}{cm}$ zulässig ist, soll ein Kondensator für den Spannungsbereich von 100 kV realisiert werden.

Aufgabenteil 1:

Das Dielektrikum wird zunächst in einem (idealen) Plattenkondensator eingesetzt.

a1) Skizzieren Sie die Anordnung.

b1) Skizzieren Sie die Feldlinien in der Anordnung.

c1) Wo ist der Ort der maximalen Feldstärke?

d1) Skizzieren Sie den Verlauf des Betrags der elektrischen Feldstärke von einer Kondensatorplatte zur anderen $|E(x)|$, parallel zu den Kondensatorplatten $|E_{Diel}(z)|$ und in den Kondensatorplatten $|E_{Pl}(z)|$.

e1) Zeichnen Sie die 50%-Äquipotentiallinie ein.

f1) Berechnen Sie den minimalen Plattenabstand $d_{Pl,min}$ für die o.a. Randbedingungen.

Aufgabenteil 2:

Nun soll das Dielektrikum zwischen koaxialen Zylindern eingesetzt werden.
$\left(E_r(r) = \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right)};\ r_a : Außenradius; r_i : Radius\ des\ Innenzylinders\right)$

a2) Skizzieren Sie die Anordnung.

b2) Skizzieren Sie die Feldlinien.

c2) Wo ist der Ort der maximalen Feldstärke?

d2) Skizzieren Sie den Verlauf der elektrischen Feldstärke $E_r(r)$ von $r = r_i$ bis $r = r_a$.

e2) Zeichnen Sie die 50%-Äquipotentiallinie ein.

f2) Berechnen Sie den minimalen Außenradius r_a für $r_i = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 10\ cm$ und die zugehörige Dicke des Dielektrikums d_i.

A.2 Elektrisches Homogenfeld 2

Zwischen den Platten des nebenstehenden Kondensators befinden sich zwei Isolierstoffe mit den Dielektrizitätszahlen $\varepsilon_{\mathrm{r1}}$ und $\varepsilon_{\mathrm{r2}}$. Der Kondensator ist über den Schalter S mit einer Batterie verbunden.

Gegeben sind die Größen: Plattenteilflächen $A_1 = A_2 = 100\ cm^2; U_{\mathrm{B}} = 100\ V; d = 1\ cm$.

a) Der Schalter ist geschlossen. Es gelte $\varepsilon_{\mathrm{r1}} = \varepsilon_{\mathrm{r2}} = 1$. Wie groß sind die Kondensatorladung Q, die elektrische Flussdichte D, die elektrische Feldstärke E sowie die Kapazität C_{AB}?

b) Der Schalter ist geschlossen. Es gelte $\varepsilon_{\mathrm{r1}} = 1, \varepsilon_{\mathrm{r2}} = 3$. Wie hat sich die Gesamtkapazität allgemein im Vergleich zu Punkt a) verändert? Zu bestimmen sind außerdem die Werte Q_1 und Q_2, D_1 und D_2 sowie E_1 und E_2. Welche Spannung U_{AB} stellt sich am Kondensator ein?

c) In die Anordnung gemäß Punkt a) wird nach dem Öffnen des Schalters S ein anderes Dielektrikum eingeführt, so dass gilt: $\varepsilon_{\mathrm{r1}} = 1, \varepsilon_{\mathrm{r2}} = 3$. Welche Spannung U_{AB} stellt sich am Kondensator ein?

A.3 Elektrisches Homogenfeld 3

Mit einem Dielektrikum, in dem maximal eine Feldstärke $E = 30\ \frac{kV}{cm}$ zulässig ist, soll ein Kondensator für den Spannungsbereich von 100 kV realisiert werden.

Das Dielektrikum wird zunächst in einem (idealen) Plattenkondensator eingesetzt.

a1) Skizzieren Sie die Anordnung.

b1) Skizzieren Sie die Feldlinien in der Anordnung.

c1) Wo ist der Ort der maximalen Feldstärke?

d1) Skizzieren Sie den Verlauf des Betrags der elektrischen Feldstärke von einer Kondensatorplatte zur anderen $|E(x)|$, parallel zu den Kondensatorplatten $|E_{\mathrm{Diel}}(z)|$ und in den Kondensatorplatten $|E_{\mathrm{Pl}}(z)|$.

e1) Zeichnen Sie die 50%-Äquipotentiallinie ein.

f1) Berechnen Sie den minimalen Plattenabstand $d_{\mathrm{Pl,min}}$ für die o.a. Randbedingungen.

Nun soll das Dielektrikum zwischen koaxialen Zylindern eingesetzt werden.

$$\left(E_{\mathrm{r}}(r) = \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right)};\ r_{\mathrm{a}} : \textit{Außenradius}; r_{\mathrm{i}} : \textit{Radius des Innenzylinders}\right)$$

a2) Skizzieren Sie die Anordnung.

b2) Skizzieren Sie die Feldlinien.

c2) Wo ist der Ort der maximalen Feldstärke?

d2) Skizzieren Sie den Verlauf der elektrischen Feldstärke $E_{\mathrm{r}}(r)$ von $r = r_{\mathrm{i}}$ bis $r = r_{\mathrm{a}}$.

e2) Zeichnen Sie die 50%-Äquipotentiallinie ein.

f2) Berechnen Sie den minimalen Außenradius r_{a} für $r_{\mathrm{i}} = 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 10\ cm$ und die zugehörige Dicke des Dielektrikums d_{i}.

A.4 Ladungsträgergeschwindigkeit

Durch eine Kupferleitung mit dem Querschnitt $A = 1\ mm^2$ und mit der Länge $L = 10\ m$ fließt ein Strom $I = 8\ A$. Ein mm^3 Kupfer enthält $8{,}5 \cdot 10^{19}$ Atome. Es darf davon ausgegangen werden, dass jeweils 1 Elektron pro Atom am Ladungstransport beteiligt ist ($\vartheta = 20\ °C$).

a) Bestimmen Sie die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in der Kupferleitung.

b) Welche elektrische Feldstärke E besteht in der Kupferleitung?

c) Wie hoch ist der Spannungsabfall U in dieser Kupferleitung?

d) Welchen Widerstand hat die Kupferleitung bei den angegebenen Randbedingungen? Welchen Widerstand nimmt der Draht bei einer Erwärmung auf $\vartheta_{\mathrm{w}} = 180\ °C$ an? Wie groß ist die prozentuale Widerstandserhöhung?

B Lösungen zu den Übungsaufgaben

B.1 Elektrisches Homogenfeld 1

Hier entsteht eine Musterlösung...

B.2 Elektrisches Homogenfeld 2

Hier entsteht eine Musterlösung...

B.3 Elektrisches Homogenfeld 3

Hier entsteht eine Musterlösung...

B.4 Ladungsträgergeschwindigkeit

Hier entsteht eine Musterlösung...