

GET it digital

Modul 12: Schaltvorgänge



Stand: 14. Juli 2025



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 12: Schaltvorgänge“ von M. Werle Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Das Werk ist online verfügbar unter:

<https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-12-schaltvorgaenge>

Einführung

- Ausgleichsvorgänge

- Schaltvorgänge

- Beispiele für Schaltvorgänge

- Idealer Schalter vs. Realer Schalter

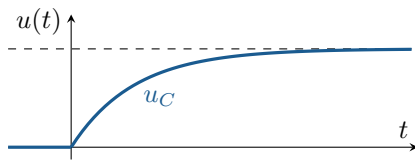
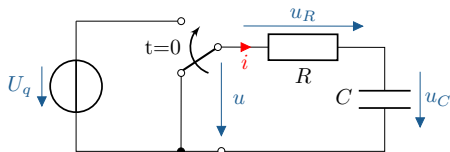
Grundlagen

Berechnung im Zeitbereich

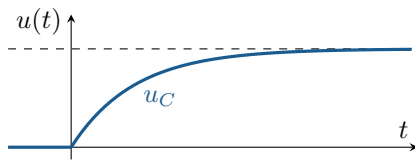
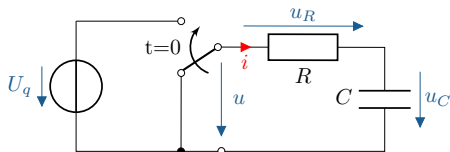
Lernziele: Einführung

Studierende lernen:

- ▶ Schaltvorgänge als nicht-stationäre Zustände nach Schaltaktionen kennen
- ▶ Schaltvorgänge im Kontext anderer Ausgleichsvorgänge zu verstehen
- ▶ Herausforderungen und Möglichkeiten bei Schaltvorgängen kennen
- ▶ das Schaltverhalten von idealen und realen Schaltern zu unterscheiden



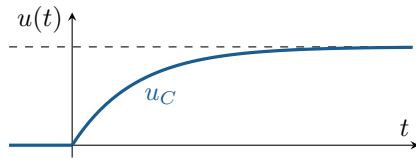
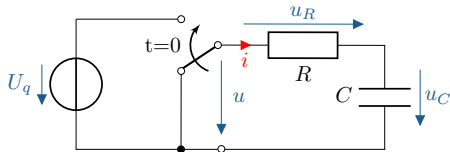
¹Bild: Bartolomeo Pinelli, Ausschnitt aus *A Peasant Family Cooking over a Campfire*, Lizenz CC0 1.0
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81414513>



Analogie: Wasser erhitzen¹



¹Bild: Bartolomeo Pinelli, Ausschnitt aus *A Peasant Family Cooking over a Campfire*, Lizenz CC0 1.0
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81414513>



Analogie: Wasser erhitzen¹

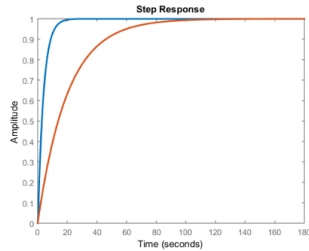
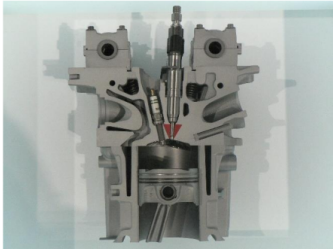
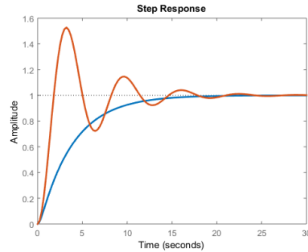


Ursachen für Ausgleichsvorgänge:

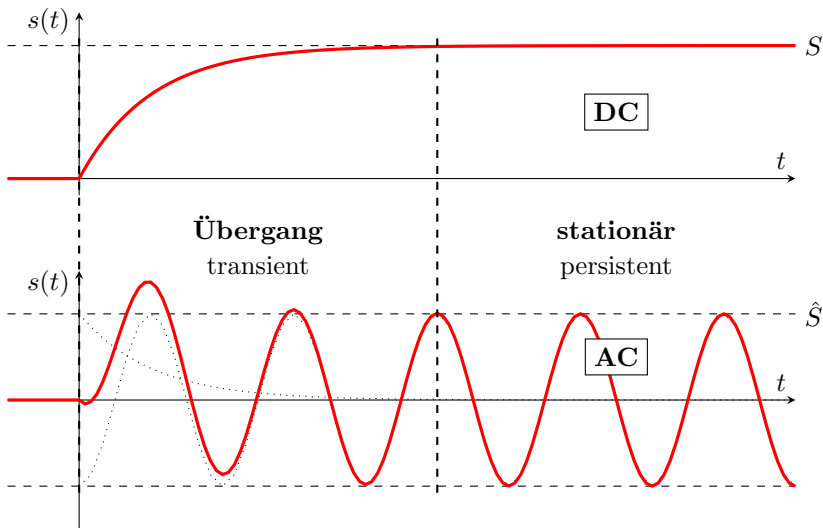
- ▶ Schalthandlungen
- ▶ DC: Änderung d. Spannung/Strom
- ▶ AC: Änderung d. Frequenz/Amplitude/Phase

¹Bild: Bartolomeo Pinelli, Ausschnitt aus *A Peasant Family Cooking over a Campfire*, Lizenz CC0 1.0
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81414513>

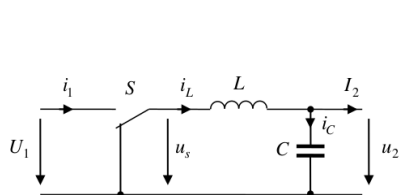
Ausgleichsvorgänge - Beispiele



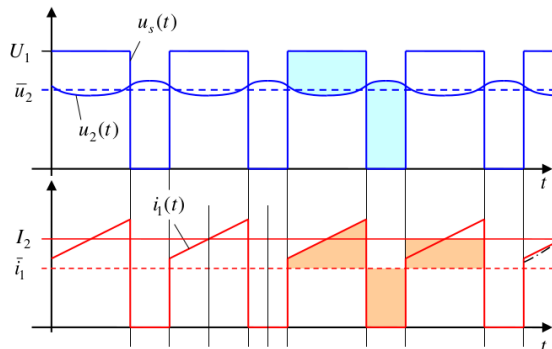
Beispiel Schaltvorgang bei Gleich- und Wechselspannung.



Beispiel aus der Leistungselektronik:



Tiefsetzsteller mit
Glättungskondensator²



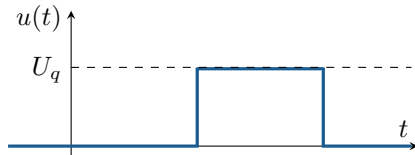
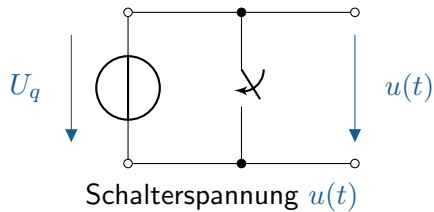
Stromrichter (engl. *power converter*) wandeln elektrische in elektrische Energie um. Die Wandlung (z.B. Spannung, Strom, Frequenz) erfolgt durch getaktetes Schalten.

Andere Beispiele:

Ein-/Ausschalten, AD-/DA-Converter, Fahrradlicht mit Kondensator, ...

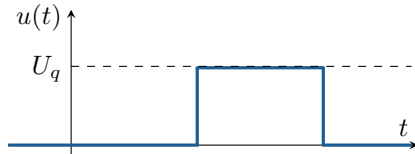
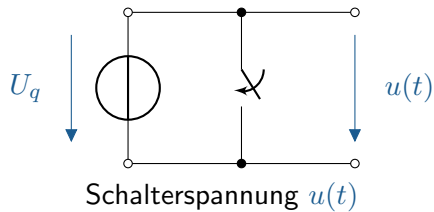
²Schaltbild und Zeitverlauf: Joachim Böcker, GET2, Universität Paderborn, modifiziert (gekürzt)

Idealer Schalter vs. Realer Schalter

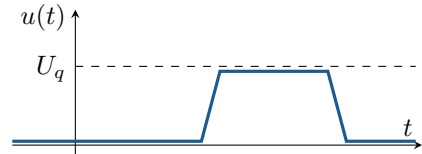


Ideal: verlustlos, instantan

Idealer Schalter vs. Realer Schalter

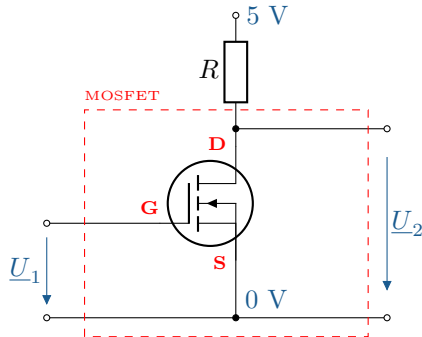


Ideal: verlustlos, instantan



Real: Verluste, Latenzen

Idealer Schalter vs. Realer Schalter



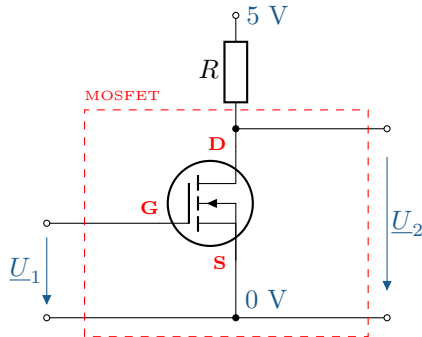
Ideal: keine parasitären Effekte

Hier: Ausgleichsvorgänge nach Schalten (Schaltvorgänge) im Fokus

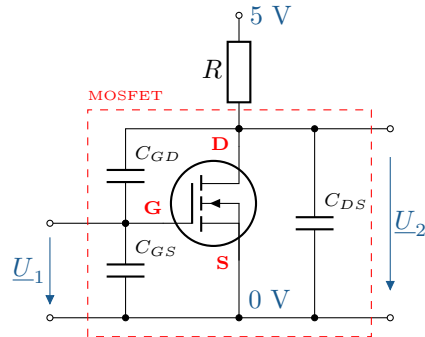
Real: Ausgleichsvorgänge während Schalten

Eingrenz.: Annahme idealer Schalter

Idealer Schalter vs. Realer Schalter



Ideal: keine parasitären Effekte



Real: mit parasitären Kapazitäten

Hier: Ausgleichsvorgänge nach Schalten (Schaltvorgänge) im Fokus

Real: Ausgleichsvorgänge während Schalten

Eingrenz.: Annahme idealer Schalter

Gliederung - Grundlagen der Berechnung von Schaltvorgängen I

Einführung

Grundlagen

- Definitionen

- Berechnungsmethoden

- Differentialgleichungen

- Berechnungsverfahren im Zeitbereich

Berechnung im Zeitbereich

Lernziele: Grundlagen

- ▶ grundlegende Begriffe kennen und verstehen (Definitionen)
- ▶ Berechnungsmethoden im Zeit- und Bildbereich (Laplace) kennen
- ▶ DGLen für Schaltungsgrößen von LZI-Schaltungen aufzustellen
- ▶ DGL-Eigenschaften aus Schaltungseigenschaften abzuleiten
- ▶ Zeitverläufe bei Schaltvorgängen zu bestimmen (DGLen zu lösen)

G.	Begriffe	Definitionen
allg.	Schalten	„durch Betätigen eines Schalters in einen (Betriebs)zustand versetzen“ ^[†]
	Schalter	Komponente, hier zum öffnen oder schließen einer elektr. Verbindung
Eigenschaften	periodisch ¹	„in gleichen Abständen, regelmäßig [auftretend, wiederkehrend]“ ^[†]
	zeitinvariant ¹	invariant/unveränderlich über die Zeit
	gewöhnlich ²	Ableitung(en) nach einer unabhängigen Variable (z.B. Zeit t), Vgl. partiell
	homogen ²	Form gewöhnlich: $\sum a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} f_i(y(t)) \stackrel{!}{=} 0$ mit Störfunktion $b = 0$
	linear ²	Form gewöhnlich: $\sum a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} y(t) = b(t)$ d.h. mit $\frac{d^i}{dt^i} y(t)$ linear
Vorgänge	Ordnung ²	n [1] d.h. höchstens Ableitung der Ordnung n in DGL
	Ausgleichsvorg.	Vorgang in einem System, dass einen stationären Zustand anstrebt
	Einschwingvorg.	Ausgleichsvorgang, schwingend, endergon (nicht spontan)
	Schaltvorg.	nicht stationärer Zustand nach Schalten
	Transiente	Ausgleichsvorgang (synonym), Vgl. transient (adj.)

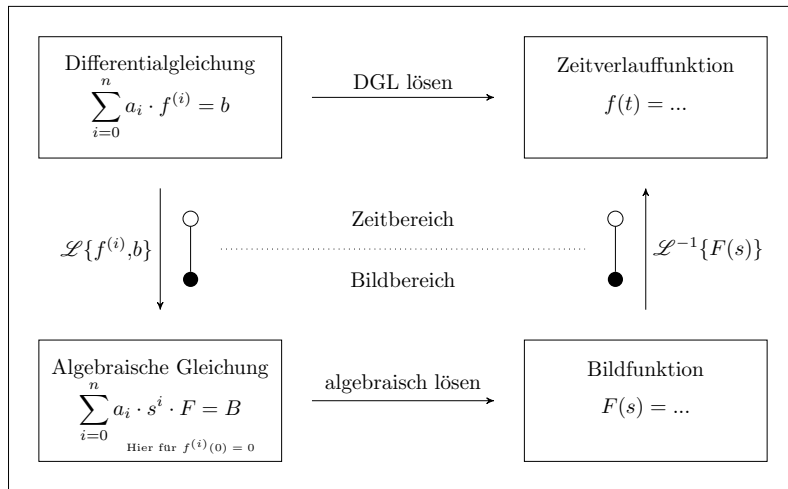
¹ allgemein

²bezogen auf DGL

[†]Duden online

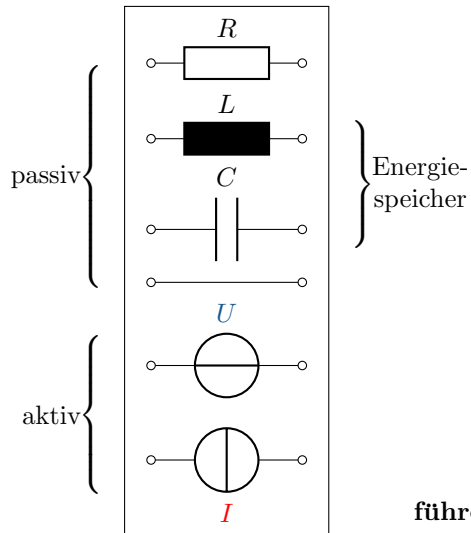
Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge

Schaltvorgänge können im Zeit- und Bildbereich berechnet werden.



Beide Methoden basieren auf dem Lösen von Differentialgleichungen.

Schaltung



Gleichungen

Komponenten

Widerstand $u_R = R \cdot i_R$

Induktivität $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} \cdot i_L$

Kapazität $i_C = C \cdot \frac{d}{dt} \cdot u_C$

Energiespeicher

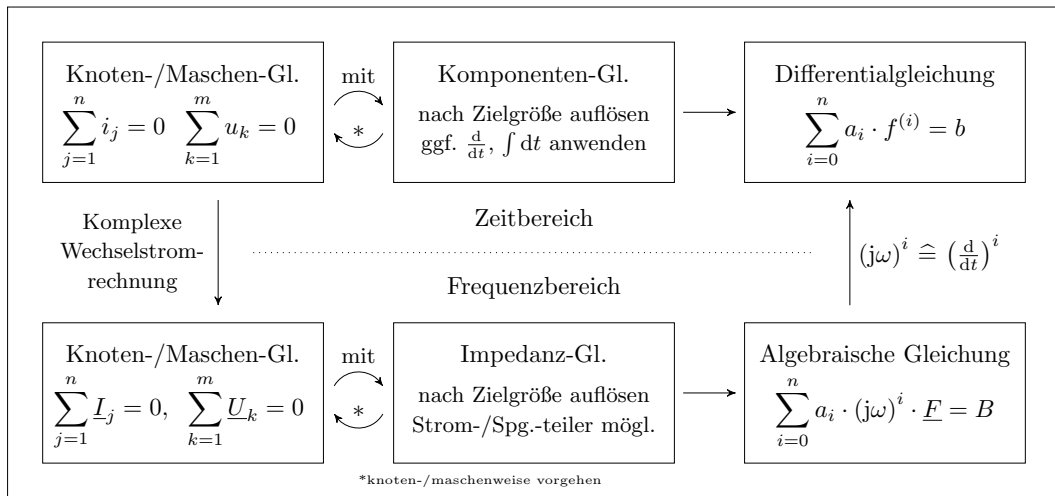
Kirchhoff

Knoten: $\sum i = 0$

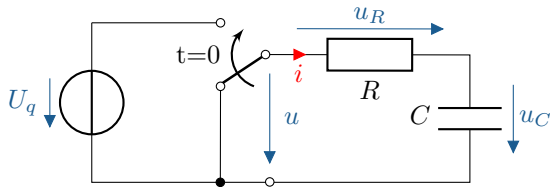
Maschen: $\sum u = 0$

**Energiespeicher in Schaltungen
führen zu Schaltvorgängen und DGLen.**

Mögliche Vorgehensweisen zum Aufstellen von Differentialgleichungen:



Differentialgleichungenaufstellen, Beispiel



Zeitbereich: Gesucht sei $u_C(t \geq 0)$.

$t \geq 0$

Kirchhoff:

Komponenten:

Knoten:

$$i_R = i_C = i$$

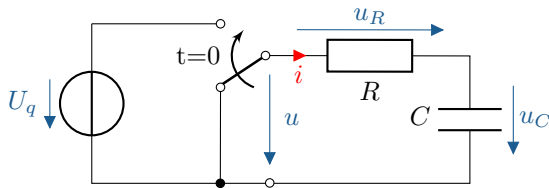
$$i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$$

Masche:

$$u_R + u_C = u$$

$$u_R = R \cdot i_R$$

Differentialgleichungenaufstellen, Beispiel



Zeitbereich: Gesucht sei $u_C(t \geq 0)$.

$t \geq 0$

Kirchhoff:

Komponenten:

Knoten:

$$i_R = i_C = i$$

$$i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$$

Masche:

$$u_R + u_C = u$$

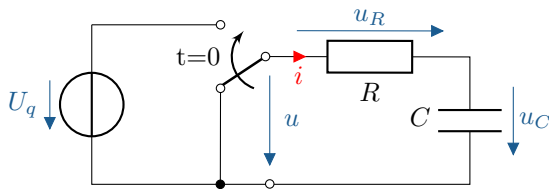
$$u_R = R \cdot i_R$$

$$R \cdot i_R + u_C = U_q$$

DGL: $RC \cdot \frac{d}{dt} u_C + u_C = U_q$

1. Ord.

Differentialgleichungenaufstellen, Beispiel



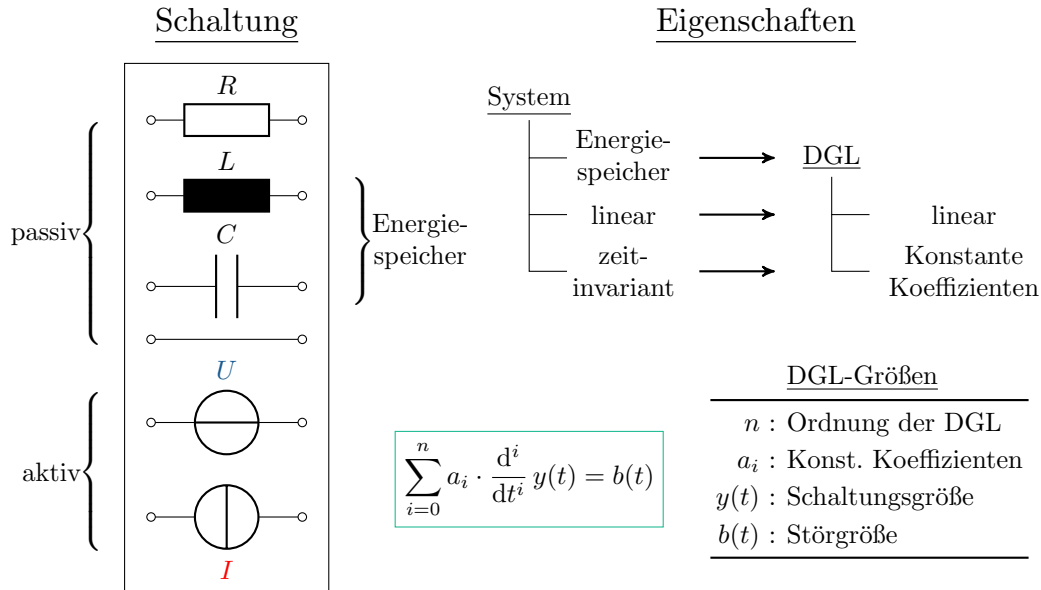
Bildbereich: Gesucht sei $u_C(t \geq 0)$.

$$\underline{U}_C = \underline{U}_q \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

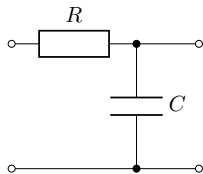
$$\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) \cdot \underline{U}_C = \underline{U}_q \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

$$(j\omega \cdot RC + 1) \cdot \underline{U}_C = \underline{U}_q$$

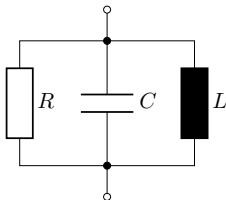
$$\mathbf{DGL :} \quad RC \cdot \frac{d}{dt} u_C + u_C = U_q$$



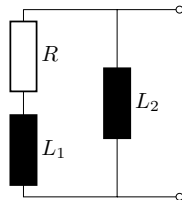
Ordnung von Differentialgleichungen



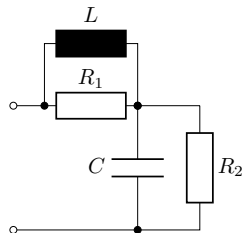
1 En.sp. $\rightarrow$ 1. Ord.



2 En.sp. $\rightarrow$ 2. Ord.



2 En.sp. $\rightarrow$ 2. Ord.



2 En.sp. $\rightarrow$ 2. Ord.

Anzahl Energiespeicher[§] = Ordnung der DGL

[§]nicht zusammenfassbar

Jede DGL hat unendlich viele Lösungen.

Jede DGL hat unendlich viele Lösungen.

Eine eindeutige Lösung für DGL n -ter Ordnung braucht n **Anfangsbedingungen**.

Jede DGL hat unendlich viele Lösungen.

Eine eindeutige Lösung für DGL n -ter Ordnung braucht n **Anfangsbedingungen**.

Def. Anfangsbed.: Wert beliebiger Schaltungsgröße $y(t)$ während Schaltvorgang.

Jede DGL hat unendlich viele Lösungen.

Eine eindeutige Lösung für DGL n -ter Ordnung braucht n **Anfangsbedingungen**.

Def. Anfangsbed.: Wert beliebiger Schaltungsgröße $y(t)$ während Schaltvorgang.

Mit:

$$\textbf{Kapazität:} \quad E_{el} = \frac{1}{2} C \cdot u^2 \quad \Longrightarrow \quad u = \textit{stetig} \quad (\text{Speicher el. Energie})$$

$$\textbf{Induktivität:} \quad E_{mag} = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \quad \Longrightarrow \quad i = \textit{stetig} \quad (\text{Speicher mag. Energie})$$

Jede DGL hat unendlich viele Lösungen.

Eine eindeutige Lösung für DGL n -ter Ordnung braucht n **Anfangsbedingungen**.

Def. Anfangsbed.: Wert beliebiger Schaltungsgröße $y(t)$ während Schaltvorgang.

Mit:

Kapazität: $E_{el} = \frac{1}{2}C \cdot u^2 \implies u = \text{stetig}$ (Speicher el. Energie)

Induktivität: $E_{mag} = \frac{1}{2}L \cdot i^2 \implies i = \text{stetig}$ (Speicher mag. Energie)

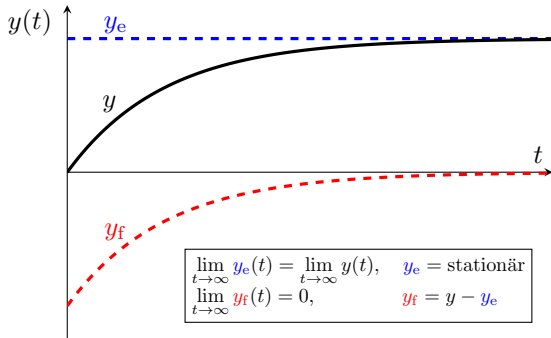
gilt unmittelbar vor und nach einem Schaltzeitpunkt:

$$\begin{array}{ll} u_{C,t-} = u_{C,t+} & i_{L,t-} = i_{L,t+} \\ \text{mit } \lim_{\pm\infty \rightarrow t} u_C(t) = u_{C,t\pm} & \lim_{\pm\infty \rightarrow t} i_L(t) = i_{L,t\pm} \end{array}$$

Zerlegung der **Systemgröße** $y(t)$ in:
eingeschwungener Zustand $y_e(t)$
und **flüchtiger Zustand** $y_f(t)$.

Zerlegung von Ausgleichsvorgängen und Lösung der inhomogenen DGL

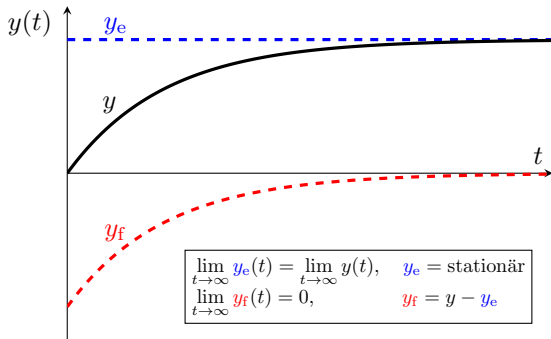
Zerlegung der **Systemgröße** $y(t)$ in:
eingeschwungener Zustand $y_e(t)$
und **flüchtiger Zustand** $y_f(t)$.



Zerlegung von Ausgleichsvorgängen und Lösung der inhomogenen DGL

Zerlegung der **Systemgröße** $y(t)$ in:
eingeschwungener Zustand $y_e(t)$
und **flüchtiger Zustand** $y_f(t)$.

Entspricht der Zerlegung von y in:
eine **partikuläre Lösung** y_p
und die **allg. homogene Lösung** y_h

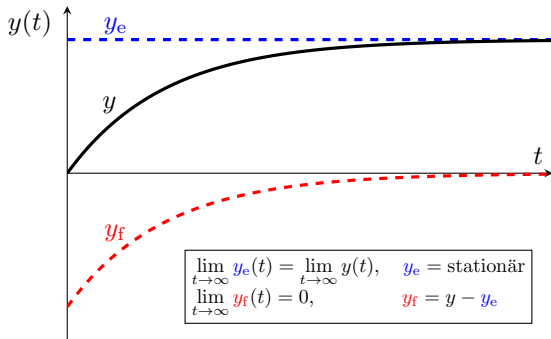


$$y(t) - \underbrace{y_e(t)}_{y_p(t)} = \underbrace{y_f(t)}_{y_h(t)}$$

Zerlegung von Ausgleichsvorgängen und Lösung der inhomogenen DGL

Zerlegung der **Systemgröße** $y(t)$ in:
eingeschwungener Zustand $y_e(t)$
und **flüchtiger Zustand** $y_f(t)$.

Entspricht der Zerlegung von y in:
eine **partikuläre Lösung** y_p
und die **allg. homogene Lösung** y_h



$$y(t) - \underbrace{y_e(t)}_{y_p(t)} = \underbrace{y_f(t)}_{y_h(t)}$$

mit

$$\begin{aligned} \sum a_i \cdot \frac{d^i}{dt^i} y &= b(t) \\ - \sum a_i \cdot \frac{d^i}{dt^i} y_e &= b(t) \\ \hline = \sum a_i \cdot \frac{d^i}{dt^i} y_f &= 0 \end{aligned}$$

Homogene DGL: $\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i}{dt^i} y_h = 0$ (gew., lin., konst. Koeff.)

Ansatz: $y_h(t) = K \cdot e^{\lambda t}$ (Exponentialfkt.)

Char. Polynom: $\sum_{i=0}^n a_i \cdot \lambda^i = 0 \Rightarrow \lambda_i = \dots$ (Eigenwerte: λ)

1. Lösungsansatz: $y_h(t) = \sum_{i=1}^n K_i \cdot e^{\lambda_i t}$ für $\lambda_i \neq \lambda_{i-1} \forall i$

2. Lösungsansatz: $y_h(t) = \sum_{j=1}^m K_j \cdot t^{j-1} \cdot e^{\lambda t}$ für $\lambda_j = \lambda \forall j$

allg. hom. Lösung: $y_h(t) = \dots = y_f$ (Linearkombination)

Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:⁵

$$\frac{d^5}{dt^5}y(t) + 7\frac{d^4}{dt^4}y(t) + 26\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 62\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 75y(t) = 0$$

⁵leicht verändert aus: Manfred Albach, *Elektrotechnik 2*, Pearson Deutschland GmbH 3. Auflage, 2020.

Beispiel: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:⁵

$$\frac{d^5}{dt^5}y(t) + 7\frac{d^4}{dt^4}y(t) + 26\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 62\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 75y(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^5 + 7 \cdot \lambda^4 + 26 \cdot \lambda^3 + 62 \cdot \lambda^2 + 85 \cdot \lambda + 75 = 0$$

⁵leicht verändert aus: Manfred Albach, *Elektrotechnik 2*, Pearson Deutschland GmbH 3. Auflage, 2020.

Beispiel: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:⁵

$$\frac{d^5}{dt^5}y(t) + 7\frac{d^4}{dt^4}y(t) + 26\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 62\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 75y(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^5 + 7 \cdot \lambda^4 + 26 \cdot \lambda^3 + 62 \cdot \lambda^2 + 85 \cdot \lambda + 75 = 0$$

⁵leicht verändert aus: Manfred Albach, *Elektrotechnik 2*, Pearson Deutschland GmbH 3. Auflage, 2020.

Beispiel: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:⁵

$$\frac{d^5}{dt^5}y(t) + 7\frac{d^4}{dt^4}y(t) + 26\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 62\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 75y(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^5 + 7 \cdot \lambda^4 + 26 \cdot \lambda^3 + 62 \cdot \lambda^2 + 85 \cdot \lambda + 75 = 0$$

besitzt eine einfache und zwei doppelte, konjugierte, komplexe Nullstellen:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1 + 2j, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -1 - 2j$$

⁵leicht verändert aus: Manfred Albach, *Elektrotechnik 2*, Pearson Deutschland GmbH 3. Auflage, 2020.

Beispiel: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:⁵

$$\frac{d^5}{dt^5}y(t) + 7\frac{d^4}{dt^4}y(t) + 26\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 62\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 75y(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^5 + 7 \cdot \lambda^4 + 26 \cdot \lambda^3 + 62 \cdot \lambda^2 + 85 \cdot \lambda + 75 = 0$$

besitzt eine einfache und zwei doppelte, konjugierte, komplexe Nullstellen:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1 + 2j, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -1 - 2j$$

⁵leicht verändert aus: Manfred Albach, *Elektrotechnik 2*, Pearson Deutschland GmbH 3. Auflage, 2020.

Beispiel: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:⁵

$$\frac{d^5}{dt^5}y(t) + 7\frac{d^4}{dt^4}y(t) + 26\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 62\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 75y(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^5 + 7 \cdot \lambda^4 + 26 \cdot \lambda^3 + 62 \cdot \lambda^2 + 85 \cdot \lambda + 75 = 0$$

besitzt eine einfache und zwei doppelte, konjugierte, komplexe Nullstellen:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1 + 2j, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -1 - 2j$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y_h(t) = K_1 \cdot e^{-3t} + (K_2 + K_3 \cdot t) \cdot e^{-t} \sin(2t) + (K_4 + K_5 \cdot t) \cdot e^{-t} \cos(2t)$$

⁵leicht verändert aus: Manfred Albach, *Elektrotechnik 2*, Pearson Deutschland GmbH 3. Auflage, 2020.

Der **eingeschwungene Zustand** y_e entspricht der **partikulären Lösung** y_p .

In LZI-Systemen gilt eingeschwungen:

DC-Anregung: $y_p(t) = \text{konst.}$ (Gleichgröße)

AC-Anregung: $y_p(t) = \hat{Y} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ (Wechselgröße)

Dadurch sind die bekannten **Methoden der Netzwerkberechnung anwendbar**.

DC: Kapazitäten wie offene Schaltungen und Induktivitäten wie Kurzschlüsse

AC: Komplexe Wechselstromrechnung (Impedanzen, Admittanzen)

Merke: Verfahren für DGL

1. Differentialgleich. aufstellen (lin., gew.)

$$\sum a_i \cdot \frac{d^i y}{dt^i} = b$$

2. Flüchtiger Zustand (homo. Lsg.)

$$y_f \stackrel{*}{=} \sum K'_i \cdot e^{\lambda_i t}$$

3. Eingeschwung. Zustand (part. Lsg.)

$$y_e = y(t \rightarrow \infty)$$

4. Überlagern (allg. Lsg.)

$$y = y_f + y_e$$

5. Konstante(n) bestimmen (Anfangsbed.)

$$i_L, u_C = \text{stetig}$$

*mit
$$K'_i = \begin{cases} K_i & \text{für } \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i, j \\ K_i \cdot t^k & \text{für } \lambda_i = \lambda_{i-k} \quad \text{mit } k \in [0, 1, \dots, m-1] \end{cases}$$

(einfache NS)

(m -fache NS, k -ter gleicher EW)

Einführung

Grundlagen

Berechnung im Zeitbereich

- bei Gleichspannung

- bei sinusförmiger Anregung

- bei RLC-Serienschwingkreisen

Lernziele: Schaltvorgänge

Studierende lernen:

- ▶ Schaltvorgänge bei im Zeitbereich zu berechnen
- ▶ das Schaltverhalten von RC-, RL- und RLC-Gliedern kennen und verstehen
- ▶ die Möglichkeit kennen Schaltvorgänge bei AC-Anregung zu minimieren
- ▶ das Schwingverhalten von Schwingkreisen zu verstehen und zu analysieren

Schaltvorgänge bei Gleichspannung sind:

- ▶ Ladevorgänge,
- ▶ Entladevorgänge.

Schaltvorgänge bei Gleichspannung sind:

- ▶ Ladevorgänge,
- ▶ Entladevorgänge.

Berechnung zunächst für:

- ▶ eine Kapazität C
- ▶ eine Induktivität L

jeweils in Reihe mit einem Widerstand R .

Schaltvorgänge bei Gleichspannung sind:

- ▶ Ladevorgänge,
- ▶ Entladevorgänge.

Berechnung zunächst für:

- ▶ eine Kapazität C
- ▶ eine Induktivität L

jeweils in Reihe mit einem Widerstand R .

RC- oder RL-Glied $\implies$ **DGL** 1. Ordnung

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

Schaltvorgänge bei Gleichspannung sind:

- ▶ Ladevorgänge,
- ▶ Entladevorgänge.

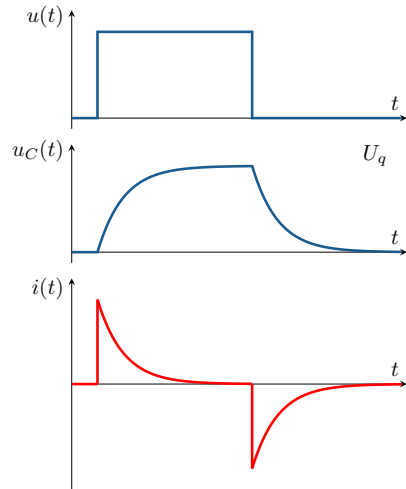
Berechnung zunächst für:

- ▶ eine Kapazität C
- ▶ eine Induktivität L

jeweils in Reihe mit einem Widerstand R .

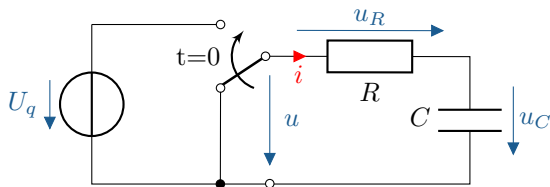
RC- oder RL-Glied $\Rightarrow$ **DGL 1. Ordnung**

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$



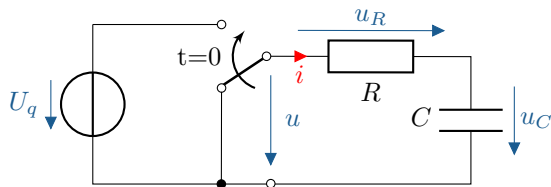
Schaltvorgänge bei RC-Glied (DC)

Schaltvorgänge bei Kapazitäten, Zeitkonstante

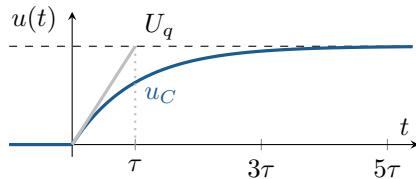


DGL 1. Ordnung $\Rightarrow$ Exponentialverlauf.

Schaltvorgänge bei Kapazitäten, Zeitkonstante

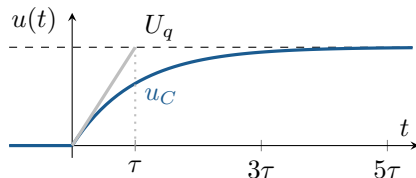
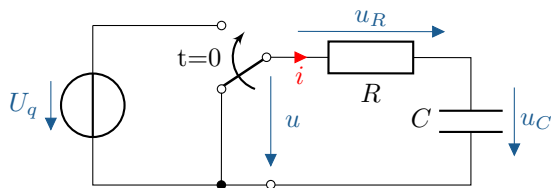


DGL 1. Ordnung $\Rightarrow$ Exponentialverlauf.



$$u_C(t) = U_q (1 - e^{-t/\tau})$$

Schaltvorgänge bei Kapazitäten, Zeitkonstante



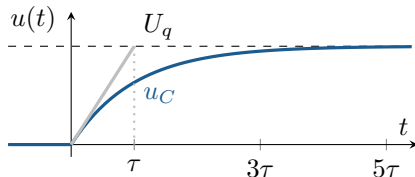
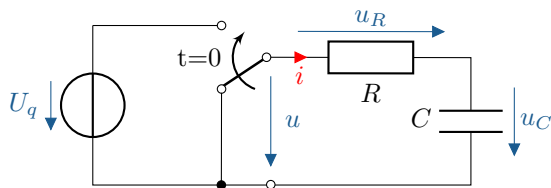
DGL 1. Ordnung $\Rightarrow$ Exponentialverlauf.

$$u_C(t) = U_q (1 - e^{-t/\tau})$$

Die **Zeitkonstante** τ , $[\tau] = 1 \text{ s}$:

- ▶ bestimmt die Steilheit bei exponentiellen Verläufen.
- ▶ ist die Zeit nach der die Tangente den Endwert erreicht.
- ▶ ist beim RC-Glied $\tau = RC$.

Schaltvorgänge bei Kapazitäten, Zeitkonstante



DGL 1. Ordnung $\Rightarrow$ Exponentialverlauf.

$$u_C(t) = U_q (1 - e^{-t/\tau})$$

Die **Zeitkonstante** τ , $[\tau] = 1 \text{ s}$:

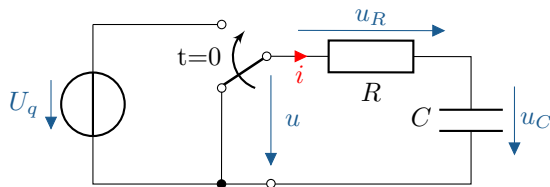
- bestimmt die Steilheit bei exponentiellen Verläufen.
- ist die Zeit nach der die Tangente den Endwert erreicht.
- ist beim RC-Glied $\tau = RC$.

Typ. Werte Zeitkonstante τ

t	τ	3τ	5τ
$1 - e^{-t/\tau}$	63,2%	95,0%	99,3%
$e^{-t/\tau}$	36,8%	5,0%	0,7%

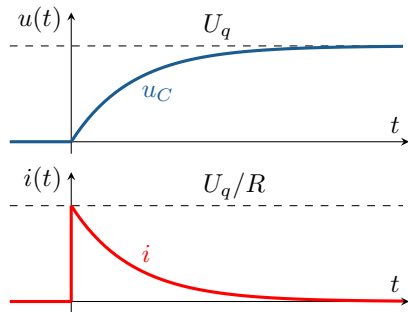
Faustregel: „Eingeschwungen“ nach 5τ

Ladevorgang bei Kapazitäten



gegeben: $u_C(0)$, U_q , R , C

gesucht: $u_C(t)$



1. DGL

$$U_q = RC \cdot \frac{d}{dt}u_C + u_C$$

2. Homogene Lösung

$$u_{C,h} = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = RC$$

3. Partikuläre Lösung

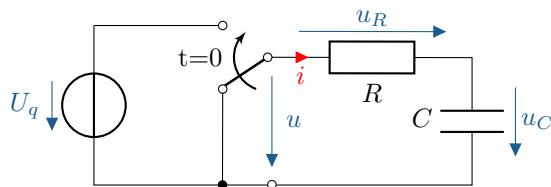
$$u_{C,p} = U_q$$

4. Inhomogene Lösung

$$u_C = K \cdot e^{-t/\tau} + U_q$$

5. Konstanten bestimmen

$$u_C = U_q \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



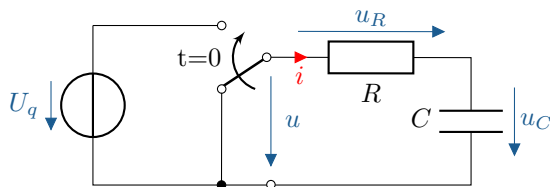
DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

1.) DGL aufstellen: für $u_C(t)$ ($t \geq 0$)

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_C ausgedrückt:

Ladevorgang bei Kapazitäten



DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

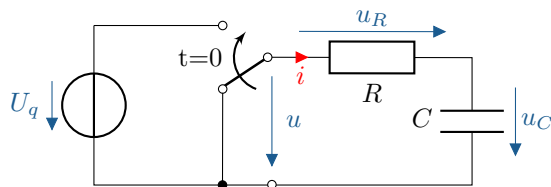
1.) DGL aufstellen: für $u_C(t)$ ($t \geq 0$)

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_C ausgedrückt:

Kirchhoff :

Masche: $u_R + u_C = U_q$

Knoten: $i_R = i_C = i$



DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

1.) DGL aufstellen: für $u_C(t)$ ($t \geq 0$)

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_C ausgedrückt:

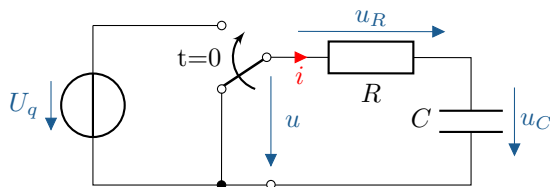
Kirchhoff :

Masche: $u_R + u_C = U_q$

Knoten: $i_R = i_C = i$

$$R \cdot i + u_C = U_q$$

mit $u_R = R \cdot i$



DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

1.) DGL aufstellen: für $u_C(t)$ ($t \geq 0$)

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_C ausgedrückt:

Kirchhoff : Masche: $u_R + u_C = U_q$

Knoten: $i_R = i_C = i$

$$R \cdot i + u_C = U_q$$

mit $u_R = R \cdot i$

DGL : $R \cdot C \cdot \frac{d}{dt}u_C + u_C = U_q$

mit $i = C \cdot \frac{d}{dt}u_C$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

$$\text{DGL}_h : \quad RC \cdot \frac{d}{dt} u_{C,h} + u_{C,h} = 0 \quad \text{Ansatz: } u_{C,h} = K \cdot e^{\lambda t}$$

$$K \cdot (RC \cdot \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}) = 0$$

$$\text{char. Polynom:} \quad \Rightarrow \quad RC \cdot \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}$$

$$\text{hom. Lsg. :} \quad u_{C,h} = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = RC$$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

$$\begin{aligned} \text{DGL}_h : \quad RC \cdot \frac{d}{dt} u_{C,h} + u_{C,h} &= 0 & \text{Ansatz: } u_{C,h} &= K \cdot e^{\lambda t} \\ K \cdot (RC \cdot \lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{char. Polynom:} \quad \Rightarrow RC \cdot \lambda + 1 &= 0 & \Rightarrow \lambda &= -\frac{1}{RC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{hom. Lsg. :} \quad u_{C,h} &= K \cdot e^{-t/\tau} & \text{mit } \tau &= RC \end{aligned}$$

3. Partikuläre Lösung: (eingeschwungen) (für $t \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \text{DGL}_p : \quad \cancel{RC} \cdot \frac{d}{dt} u_{C,p} + u_{C,p} &= U_q & \text{mit } \frac{d}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{part. Lsg. :} \quad u_{C,p} &= U_q \end{aligned}$$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

$$\begin{aligned} \text{allg. Lsg.:} \quad u_C(t) &= u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t) &= u_{C,f}(t) + u_{C,e}(t) \\ u_C(t) &= K \cdot e^{-t/\tau} + U_q \end{aligned}$$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t) &= u_{C,f}(t) + u_{C,e}(t) \\ \text{allg. Lsg.:} \quad u_C(t) &= K \cdot e^{-t/\tau} + U_q \end{aligned}$$

5. Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingung einsetzen)

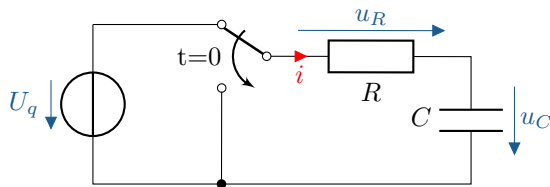
$$\text{Anfangsbed.} \quad u_C(0) = K + U_q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K = -U_q$$

$$u_C(t) = -U_q \cdot e^{-t/\tau} + U_q$$

$$\text{spez. allg. Lsg.:} \quad u_C(t) = U_q \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

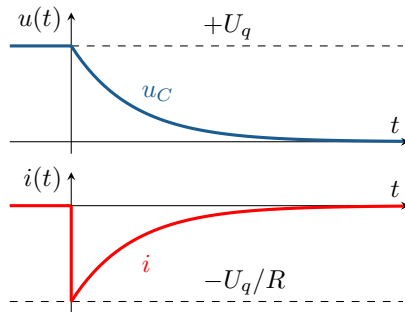
$$\text{Strom:} \quad i_C = \frac{U_q}{R} \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$$

Entladevorgang bei Kapazitäten



gegeben: $u_C(0)$, U_q , R , C

gesucht: $u_C(t)$



1. DGL

$$0 = RC \cdot \frac{d}{dt}u_C + u_C$$

2. Homogene Lösung

$$u_{C,h} = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } \tau = RC$$

3. Partikuläre Lösung

$$u_{C,p} = 0$$

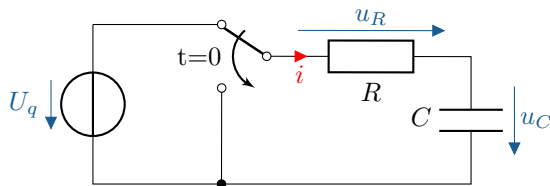
4. Inhomogene Lösung

$$u_C = K \cdot e^{-t/\tau}$$

5. Konstanten bestimmen

$$u_C = U_q \cdot e^{-t/\tau}$$

Entladevorgang bei Kapazitäten



DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

1.) DGL aufstellen: für $u_C(t)$ ($t \geq 0$)

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_C ausgedrückt:

Kirchhoff : Masche: $u_R + u_C = 0$

$$R \cdot i + u_C = 0$$

DGL : $RC \cdot \frac{d}{dt}u_C + u_C = 0$

Knoten: $i_R = i_C = i$

mit $u_R = R \cdot i_R = R \cdot i$

mit $i = i_C = C \cdot \frac{d}{dt}u_C$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig)

$$\text{DGL}_h : \quad RC \cdot \frac{d}{dt} u_{C,h} + u_{C,h} = 0$$

$$\text{Ansatz: } u_{C,h} = K \cdot e^{\lambda t}$$

$$\text{char. Polynom:} \quad \Rightarrow \quad RC \cdot \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}$$

$$\text{hom. Lsg. :} \quad u_{C,h} = K \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\text{mit } \tau = RC$$

3.) Part. Lsg., 4.) Überlagerung: (eingeschwungen Null)

$$\text{allg. Lsg.:} \quad u_C = u_{C,h} + \cancel{u_{C,p}} \quad \text{mit } u_{C,p} = 0$$

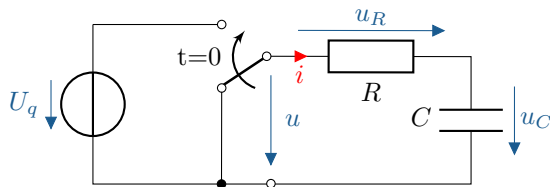
5.) Konstanten bestimmen: (AB einsetzen)

$$\text{Anfangsbed.} \quad u_C(0) = K \cdot e^0 \stackrel{!}{=} U_q \quad \Rightarrow \quad K = U_q$$

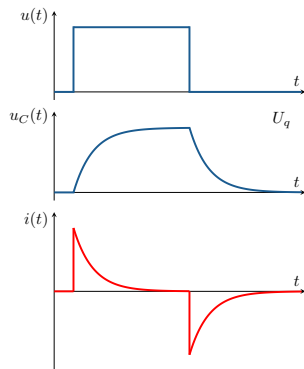
$$\text{spez. allg. Lsg.:} \quad u_C(t) = U_q \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\text{Strom:} \quad i_C = -\frac{U_q}{R} \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$$

Vergleich Lade- und Entladevorgang bei Kapazitäten



Rechenwege prinzipiell gleich für (DC)
Ladevorgang und Entladevorgang.

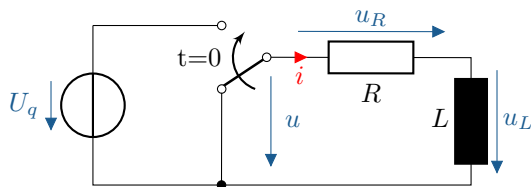


Spannung u_C nach Schaltzeitpunkt t_0 [Vgl. Skript]:

$$u_C(t - t_0) = \underbrace{u_C(t_0)}_{\text{Startwert}} + \underbrace{(u_{C,e} - u_C(t_0))}_{\text{Differenz}} \cdot \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)}_{\text{Exp. Annäherung}}$$

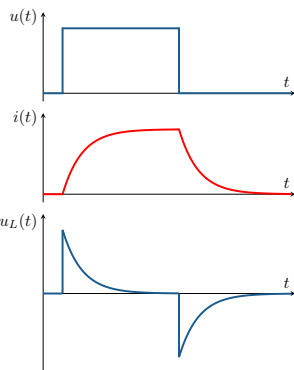
Unterschiede nur bei Störglied der DGL, Anfangsbedingung und Endwert.

Vergleich Lade- und Entladevorgang bei Induktivitäten



Rechenweg bei RL-Glied prinzipiell gleich wie bei RC-Glied. (DGL 1. Ordnung)

Achtung: i stetig, u_L sprunghaft.

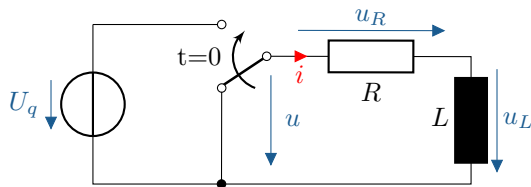


Vermutung: Strom u. Spannung „vertauscht“ gegenüber RC-Glied.

$$i(t - t_0) = \underbrace{i(t_0)}_{\text{Startwert}} + \underbrace{(i_e - i(t_0))}_{\text{Differenz}} \cdot \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)}_{\text{Exp. Annäherung}}$$

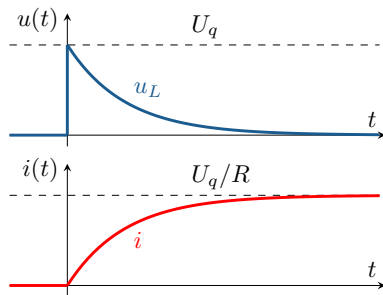
Laden: i zunehmend, u_L abnehmend. **Entladen:** vice versa.

Ladevorgang bei Induktivitäten



gegeben: $i(0)$, U_q , R , L

gesucht: $i(t)$



1. DGL

2. Homogene Lösung

3. Partikuläre Lösung

4. Inhomogene Lösung

5. Konstanten bestimmen

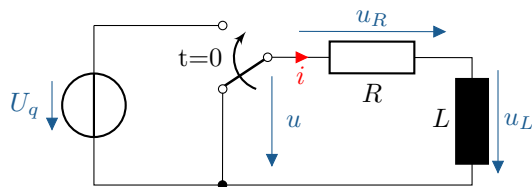
$$\frac{U_q}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i + i$$

$$i_h = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$i_p = \frac{U_q}{R}$$

$$i = K \cdot e^{-t/\tau} + \frac{U_q}{R}$$

$$i = \frac{U_q}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$



DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

1. DGL aufstellen: für $i(t)$ ($t \geq 0$)

Masche :

$$u_R + u_L = U_q$$

mit $u_R = R \cdot i$

$$R \cdot i + L \cdot \frac{d}{dt}i = U_q$$

mit $u_L = L \cdot \frac{d}{dt}i$

$$L \cdot \frac{d}{dt}i + R \cdot i = U_q$$

mit $u_L = L \cdot \frac{d}{dt}i$

DGL :

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt}i + i = \frac{U_q}{R}$$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

$$\text{DGL}_h : \quad \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i_h + i_h = 0$$

$$\text{char. Pol. :} \quad \frac{L}{R} \cdot \lambda + 1 = 0$$

$$\text{hom. Lsg. :} \quad i_h = K \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\text{Ansatz: } i_h = K \cdot e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$$

$$\text{mit } \tau = \frac{L}{R}$$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

$$\text{DGL}_h : \quad \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i_h + i_h = 0$$

$$\text{char. Pol. :} \quad \frac{L}{R} \cdot \lambda + 1 = 0$$

$$\text{hom. Lsg. :} \quad i_h = K \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\text{Ansatz: } i_h = K \cdot e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$$

$$\text{mit } \tau = \frac{L}{R}$$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen) mit $t \rightarrow \infty$

$$\text{DGL}_p : \quad \cancel{\frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt}} i_p + i_p = \frac{U_q}{R}$$

$$\text{part. Lsg. :} \quad i_p = \frac{U_q}{R}$$

$$\text{mit } i_p = \textit{konst.}$$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

allg. Lsg.:

$$i(t) = \underbrace{K \cdot e^{-t/\tau}}_{i_h} + \underbrace{\frac{U_q}{R}}_{i_p}$$

mit $i_h = i_f$, $i_p = i_e$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

allg. Lsg.:
$$i(t) = \underbrace{K \cdot e^{-t/\tau}}_{i_h} + \underbrace{\frac{U_q}{R}}_{i_p} \quad \text{mit } i_h = i_f, \quad i_p = i_e$$

5.) Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingungen einsetzen)

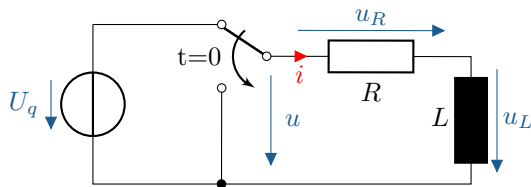
Anfangsbed.
$$i(0) = K \cdot \cancel{e^0} + \frac{U_q}{R} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{U_q}{R}$$

eindeut. Lsg.:
$$i(t) = \frac{U_q}{R} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Spannung u_L aus Strom i bestimmen:

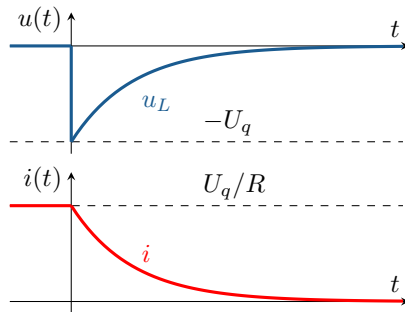
Spannung:
$$u_L = U_q \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit } u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i$$

Entladevorgang bei Induktivitäten



gegeben: $i(0)$, U_q , R , L

gesucht: $i(t)$



1. DGL

$$0 = \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i + i$$

2. Homogene Lösung

$$i_h = K \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

3. Partikuläre Lösung

$$i_p = 0$$

4. Inhomogene Lösung

$$i = K \cdot e^{-t/\tau}$$

5. Konstanten bestimmen

$$i = \frac{U_q}{R} \cdot e^{-t/\tau}$$

Schaltvorgänge bei AC-Anregung sind:

- ▶ frequenzabhängig (f, ω)
- ▶ schaltzeitpunktabhängig (t_0)

Schaltvorgänge bei AC-Anregung sind:

- ▶ frequenzabhängig (f, ω)
- ▶ schaltzeitpunktabhängig (t_0)

Berechnung analog zu DC zunächst für:

- ▶ eine Kapazität C
- ▶ eine Induktivität L

jeweils in Reihe mit einem Widerstand R .

Schaltvorgänge bei AC-Anregung sind:

- ▶ frequenzabhängig (f, ω)
- ▶ schaltzeitpunktabhängig (t_0)

Berechnung analog zu DC zunächst für:

- ▶ eine Kapazität C
- ▶ eine Induktivität L

jeweils in Reihe mit einem Widerstand R .

RC- oder RL-Glied $\implies$ **DGL** 1. Ordnung

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung

Schaltvorgänge bei AC-Anregung sind:

- ▶ frequenzabhängig (f, ω)
- ▶ schaltzeitpunktabhängig (t_0)

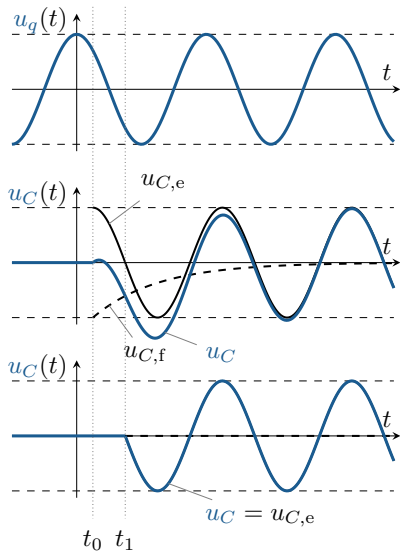
Berechnung analog zu DC zunächst für:

- ▶ eine Kapazität C
- ▶ eine Induktivität L

jeweils in Reihe mit einem Widerstand R .

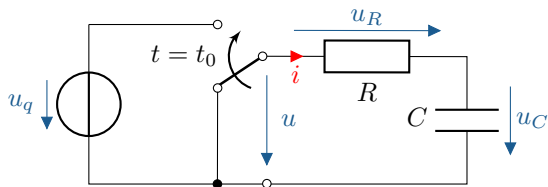
RC- oder RL-Glied $\Rightarrow$ **DGL** 1. Ordnung

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$



Vergleich: Schaltzeitpunkte t_0 und t_1

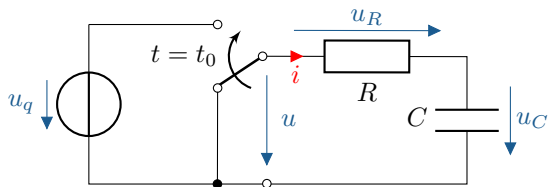
Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Kapazitäten



gegeben: $u_C(0)$, $u_q(t)$, R , C , ω

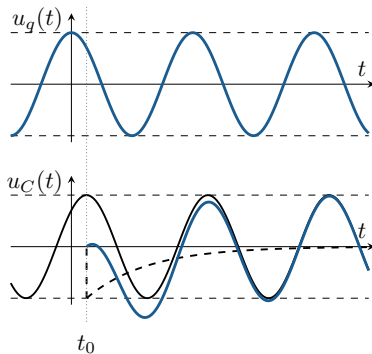
gesucht: $u_C(t)$

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Kapazitäten

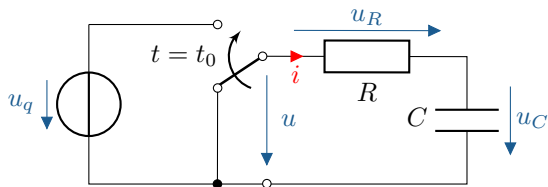


gegeben: $u_C(0)$, $u_q(t)$, R , C , ω

gesucht: $u_C(t)$

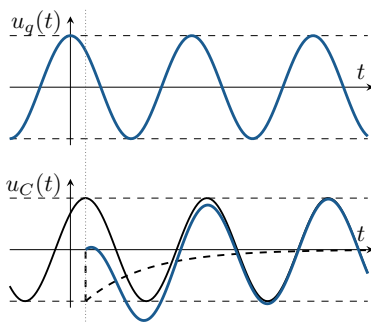


Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Kapazitäten



gegeben: $u_C(0)$, $u_q(t)$, R , C , ω

gesucht: $u_C(t)$



1. DGL

$$u_q = RC \cdot \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$$

2. Homogene Lösung

$$u_{C,h} = K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = RC$$

3. Partikuläre Lösung

$$u_{C,p} = \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,p})$$

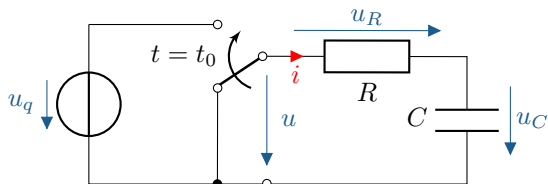
4. Inhomogene Lösung

$$u_C = K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,p})$$

5. Konstanten bestimmen

$$u_C = \hat{U}_{C,p} \cdot \left(-\cos(\omega t_0 + \varphi_{C,p}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \cos(\omega t + \varphi_{C,p}) \right)$$

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Kapazitäten



DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

1.) DGL aufstellen: für u_C ($t \geq t_0$)

$$RC \cdot \frac{d}{dt}u_C(t) + u_C(t) = u_q(t)$$

$$\text{mit } u_q(t) = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q) \quad (\text{Störterm})$$

2.) Homogene Lösung, allgemein (flüchtig) (ohne Störterm):

$$\begin{aligned} u_{C,h} &= K \cdot e^{-\frac{t'}{\tau}} \\ &= K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \end{aligned}$$

$$\text{mit } t' = t - t_0$$

$$\text{mit } \tau = RC$$

3.) Partikuläre Lösung (eingeschwungen) ($t \rightarrow \infty$): sinusförmig!

Anwendung komplexer Wechselstromrechnung:

$$\begin{aligned} u_{C,p} &= \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,p}) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \underline{\hat{U}}_{C,p} \cdot e^{j\omega t} \right\} \quad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_{C,p} = \hat{U}_{C,p} \cdot e^{j\varphi_{C,p}} \end{aligned}$$

Komplexer Amplitudenzeiger $\underline{\hat{U}}_{C,p}$ durch komplexen Spannungsteiler:

$$\underline{\hat{U}}_{C,p} = \underline{\hat{U}}_q \cdot \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \underline{\hat{U}}_q \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{\hat{U}}_q}{1 + j\omega RC} \quad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_q = \hat{U}_q \cdot e^{j\varphi_q}$$

Für die Amplitude $\hat{U}_{C,p}$ und den (Last-)Phasenwinkel $\varphi_{C,p}$ folgt:

$$\hat{U}_{C,p} = \frac{\hat{U}_q}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi_{C,p} = \varphi_q - \arctan(\omega RC)$$

4.) Inhomogene Lösung, allgemein (Überlagerung):

$$\begin{aligned}u_C &= u_{C,h} + u_{C,p} \\ &= K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,p})\end{aligned}$$

5.) Konstanten bestimmen (Anfangsbedingung):

$$\begin{aligned}u_C(t_0) &\stackrel{!}{=} 0 \\ K \cdot \cancel{e^0} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,p}) &= 0 \\ K &= -\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,p})\end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ergibt sich durch Einsetzen von K in die allgemeine Lösung:

$$u_C(t) = \underbrace{-\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,p}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{u_{C,h}} + \underbrace{\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,p})}_{u_{C,p}}$$

Bei sinusförmiger Anregung:

Bei hohen Zeitkonstanten sind
Überspannungen/-ströme möglich.

Bei sinusförmiger Anregung:

Bei hohen Zeitkonstanten sind
Überspannungen/-ströme möglich.

Erreichbar sind Überwerte bis zum
doppelten/dreifachen Scheitelwert.

Bei sinusförmiger Anregung:

Bei hohen Zeitkonstanten sind
Überspannungen/-ströme möglich.

Erreichbar sind Überwerte bis zum
doppelten/dreifachen Scheitelwert.

Durch geschicktes Schalten sind
Ausgleichsvorgänge vermeidbar.

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Kapazitäten

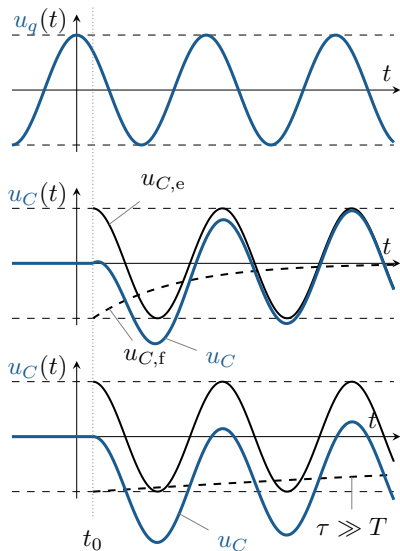
Bei sinusförmiger Anregung:

Bei hohen Zeitkonstanten sind
Überspannungen/-ströme möglich.

Erreichbar sind Überwerte bis zum
doppelten/dreifachen Scheitelwert.

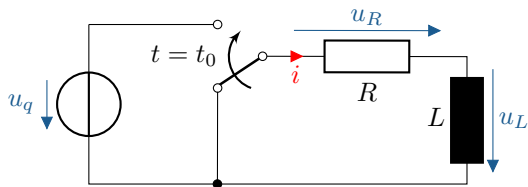
Durch geschicktes Schalten sind
Ausgleichsvorgänge vermeidbar.

Beispiel: Trennschalter im Netz



Vergleich: kleines und großes τ

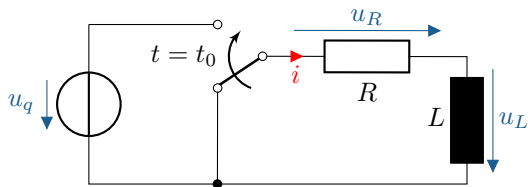
Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Induktivitäten



gegeben: $u_C(0)$, $u_q(t)$, R , C , ω

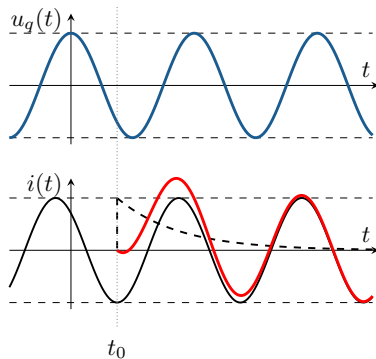
gesucht: $i(t)$

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Induktivitäten

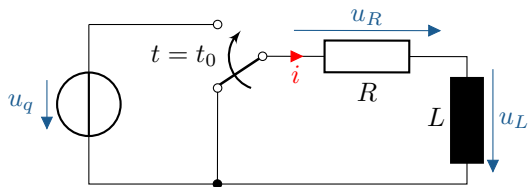


gegeben: $u_C(0)$, $u_q(t)$, R , C , ω

gesucht: $i(t)$

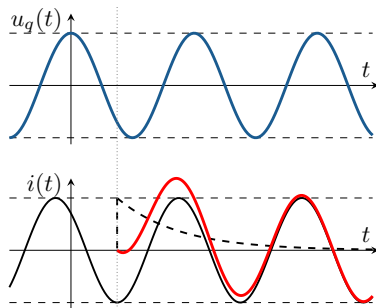


Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Induktivitäten



gegeben: $u_C(0)$, $u_q(t)$, R , C , ω

gesucht: $i(t)$



1. DGL

$$\frac{u_q}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} i + i = \frac{\hat{U}_q}{R} \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$$

2. Homogene Lösung

$$i_h = K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

3. Partikuläre Lösung

$$i_p = \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

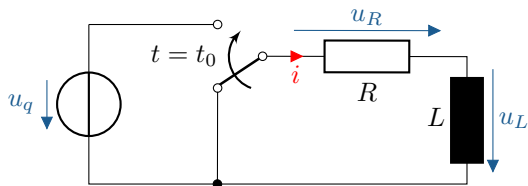
4. Inhomogene Lösung

$$i = K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

5. Konstanten bestimmen

$$i = \hat{I}_p \cdot \left(-\cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \cos(\omega t + \varphi_I) \right)$$

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Induktivitäten



DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

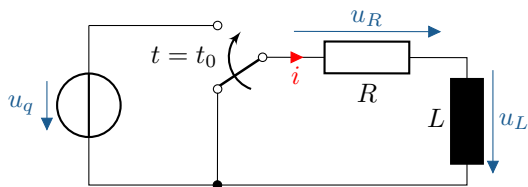
1.) DGL aufstellen: für i mit $t \geq t_0$

DGL :

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt}i + i = \frac{u_q}{R}$$

mit $u_q = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Induktivitäten



DGL 1. Ordnung:

$$a_1 \cdot \frac{d}{dt}y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

1.) DGL aufstellen: für i mit $t \geq t_0$

DGL :
$$\frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt}i + i = \frac{u_q}{R}$$

mit $u_q = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig, für Schaltzeitpunkt t_0)

hom. Lsg.:
$$i_h = K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$

mit $\tau = \frac{L}{R}$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen, mit $t \rightarrow \infty$)

DGL transf. : $\frac{L}{R} \cdot j\omega \hat{\underline{i}}_p + \hat{\underline{i}}_p = \frac{\hat{\underline{U}}_q}{R}$ mit $\hat{\underline{U}}_q = \hat{U}_q \cdot e^{j\varphi_q}$

Zeiger: $\hat{\underline{i}}_p = \frac{\hat{\underline{U}}_q}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot \frac{L}{R}}$ mit $\hat{\underline{i}}_p = \hat{I}_p \cdot e^{j\varphi_I}$

$$\hat{I}_p = \frac{\hat{U}_q}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \cdot \frac{L}{R}\right)^2}}$$

$$\varphi_I = \varphi_q - \arctan\left(\omega \cdot \frac{L}{R}\right)$$

part. Lsg. : $i_p = \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$ mit $i_p = \operatorname{Re}\left\{\hat{\underline{i}}_p \cdot e^{j\omega t}\right\}$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

allg. Lsg.:

$$i = \underbrace{K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{i_h} + \underbrace{\hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)}_{i_p}$$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

allg. Lsg.:

$$i = \underbrace{K \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{i_h} + \underbrace{\hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)}_{i_p}$$

5.) Konstanten bestimmen: (AB einsetzen)

Anf.bed.:

$$i(t_0) = K \cdot e^0 + \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow K = -\hat{I}_p \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I)$$

eind. Lsg.:

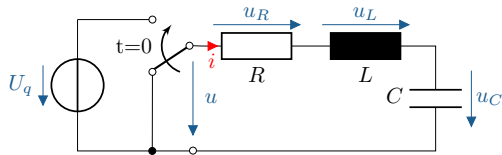
$$i(t) = -\hat{I}_p \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

Spannung u_L mit $u_L = L \cdot \frac{d}{dt}i$ berechnen:

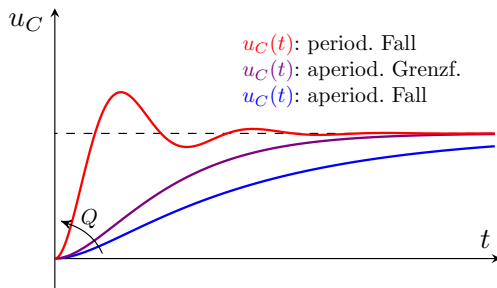
Spannung:

$$u_L(t) = R \cdot \hat{I}_p \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \omega L \cdot \hat{I}_p \cdot \sin(\omega t + \varphi_I)$$

bei RLC-Serienschwingkreisen



Wegen L und $C \Rightarrow$ Schwingkreis



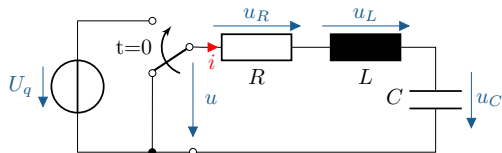
$u_C(t)$: period. Fall
 $u_C(t)$: aperiod. Grenzfall
 $u_C(t)$: aperiod. Fall

DGL (für u_C für $t \geq 0$):

$$LC \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_C + RC \cdot \frac{d}{dt} u_C + u_C = U_q$$

Fallunterscheidung	Dämpfung	Diskrimi.	Güte
aperiodischer Fall	stark	$D > 0$	$Q < 0,5$
aperiodischer Grenzfall	kritisch	$D = 0$	$Q = 0,5$
periodischer Fall	schwach	$D < 0$	$Q > 0,5$

bei RLC-Serienschwingkreisen



Ansatz: $u_{C,h} = K \cdot e^{\lambda t}$

1.) DGL: $u_L + u_R + u_C = u$

$$L \cdot \frac{d}{dt} i + R \cdot i + u_C = U_q$$

$$LC \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_C + RC \cdot \frac{d}{dt} u_C + u_C = U_q$$

homogene DGL:

$$LC \cdot \frac{d^2}{dt^2} u_{C,h} + RC \cdot \frac{d}{dt} u_{C,h} + u_{C,h} = 0$$

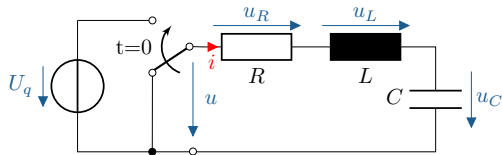
char. Polynom:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Eigenwerte:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

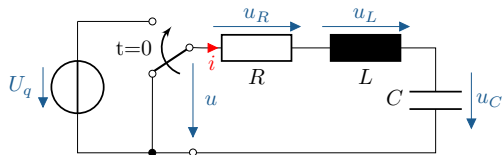
Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis



$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Achtung! Je nach Diskriminante D andere Eigenwerte $\lambda_{1/2}$.

Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis



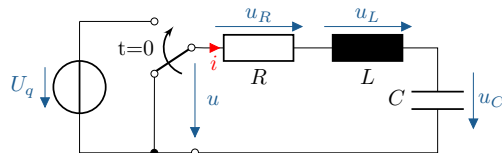
$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Achtung! Je nach Diskriminante D andere Eigenwerte $\lambda_{1/2}$.

2.) Homogene Lösung:

$$u_{C,h} = \begin{cases} K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} & \text{für } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} & \text{für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$$

Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis



$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

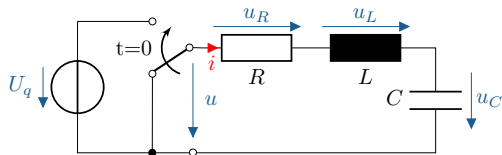
Achtung! Je nach Diskriminante D andere Eigenwerte $\lambda_{1/2}$.

2.) Homogene Lösung:

$$u_{C,h} = \begin{cases} K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} & \text{für } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} & \text{für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$$

Fallunterscheidung	Diskrimi.	Eigenwerte $\lambda_{1/2}$
aperiodischer Fall	$D > 0$	Zwei verschiedene, reale NST
aperiodischer Grenzfall	$D = 0$	Eine doppelte, reale NST
periodischer Fall	$D < 0$	Zwei konjugierte, komplexe NST

Aperiodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis



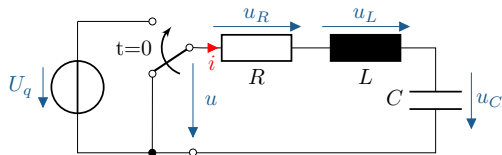
$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Aperiodischer Fall: (Kriechfall)

für $D > 0$ gilt

$$\frac{R}{2L} > \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ reelle EW}$$

Aperiodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis



$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Aperiodischer Fall: (Kriechfall)

für $D > 0$ gilt $\frac{R}{2L} > \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \Rightarrow 2 \text{ reelle EW}$

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,h} = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad \text{mit } \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda < 0$$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen, identisch für alle drei Fälle)

$$u_{C,p} = U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

$$u_C(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

$$u_C(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + U_q$$

5.) Konstanten bestimmen: (wie bekannt)

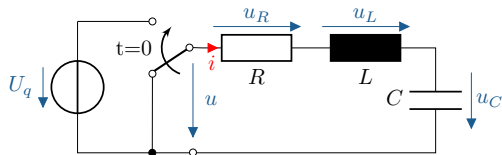
Anfangsbedingungen (AB): $u_C(0) = 0$ und $i(0) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} u_C(0) = 0$

$$1. \text{ AB: } u_C(0) = K_1 \cdot e^{\cancel{\lambda_1 0}} + K_2 \cdot e^{\cancel{\lambda_2 0}} + U_q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -K_2 - U_q$$

$$2. \text{ AB: } \frac{d}{dt} u_C(0) = K_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\cancel{\lambda_1 0}} + K_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\cancel{\lambda_2 0}} + \cancel{0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -K_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = \frac{U_q}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{U_q}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1}$$

Aperiodischer Grenzfall beim RLC-Serienschwingkreis

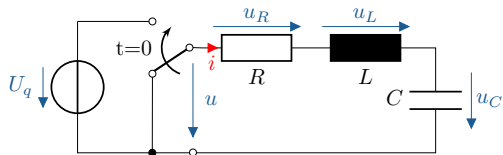


$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Aperiodischer Grenzfall:

für $D = 0$ gilt $\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{0} = \lambda \Rightarrow 1 \text{ reeller EW}$

Aperiodischer Grenzfall beim RLC-Serienschwingkreis



$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Aperiodischer Grenzfall:

für $D = 0$ gilt $\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \cancel{\sqrt{0}} = \lambda \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ reeller EW}$

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,h} = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} \quad \text{mit } \lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen)

$$u_{C,p} = U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

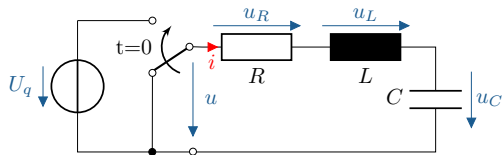
$$u_C(t) = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{\lambda t} + U_q$$

5.) Konstanten bestimmen: (wie bekannt)

Anfangsbedingungen (AB): $u_C(0) = 0$ und $i(0) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} u_C(0) = 0$

$$\begin{aligned} 1. \text{ AB: } & u_C(0) = (K_1 + \cancel{K_2 \cdot 0}) \cdot \cancel{e^{\lambda 0}} + U_q \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow & K_1 = -U_q \\ 2. \text{ AB: } & \frac{d}{dt} u_C(0) = (K_1 + \cancel{K_2 \cdot 0}) \cdot \lambda \cdot \cancel{e^{\lambda 0}} + K_2 \cdot \cancel{e^{\lambda 0}} \stackrel{!}{=} 0 & \Rightarrow & K_2 = -K_1 \cdot \lambda \\ \Rightarrow & K_1 = -U_q \quad \text{und} \quad K_2 = +U_q \cdot \lambda \end{aligned}$$

Periodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis



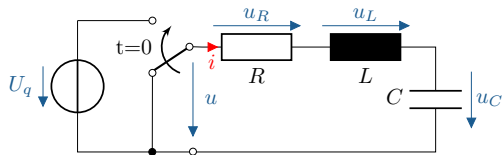
$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Periodischer Fall: (Schwingfall)

für $D < 0$ gilt

$$\lambda_{1/2} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d} \Rightarrow 2 \text{ kompl. EW}$$

Periodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis



$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Periodischer Fall: (Schwingfall)

für $D < 0$ gilt

$$\lambda_{1/2} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d} \Rightarrow 2 \text{ kompl. EW}$$

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \lambda_{1/2} = -\delta \pm j \omega_d$$

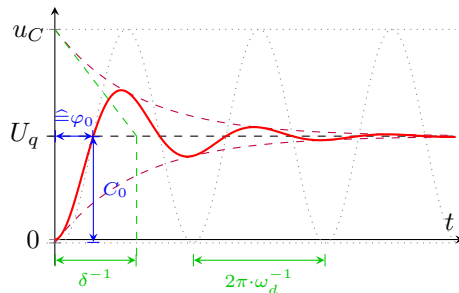
Herleitung für $u_{C,h}$ in Exkurs. Bestimmung der Konstanten C_0 und φ_0 wie bekannt.

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschw.)

$$u_{C,p} = U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

$$u_C(t) = e^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) + U_q$$



5.) Konstanten bestimmen: (wie bekannt)

1. AB: $u_C(0) = e^{-\cancel{\delta} \cdot 0} \cdot C_0 \cdot \sin(\cancel{\omega_d} \cdot 0 + \varphi_0) + U_q \stackrel{!}{=} 0$

2. AB: $\frac{d}{dt} u_C(0) = -\delta \cdot e^{-\cancel{\delta} \cdot 0} \cdot C_0 \cdot \sin(\varphi_0) + e^{-\cancel{\delta} \cdot 0} \cdot C_0 \cdot \omega_d \cdot \cos(\varphi_0) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow C_0 = -\frac{U_q}{\sin(\varphi_0)} \quad \text{und} \quad \varphi_0 = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right)$$

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot (K_1 \cdot e^{+j\omega_d t} + K_2 \cdot e^{-j\omega_d t})$$

K_1 und K_2 müssen komplex konjugiert sein, damit $u_{C,h}$ reell ist!

mit $K_1 = a + jb$ und $K_2 = a - jb$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot [(a + jb) \cdot e^{+j\omega_d t} + (a - jb) \cdot e^{-j\omega_d t}]$$

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot \left[a \cdot \underbrace{(e^{+j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t})}_{2 \cos(\omega_d t)} + jb \cdot \underbrace{(e^{+j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t})}_{2j \sin(\omega_d t)} \right]$$

mit $e^{+jx} + e^{-jx} = \cos(x) + \cancel{j \sin(x)} + \cos(x) - \cancel{j \sin(x)} = 2 \cos(x)$

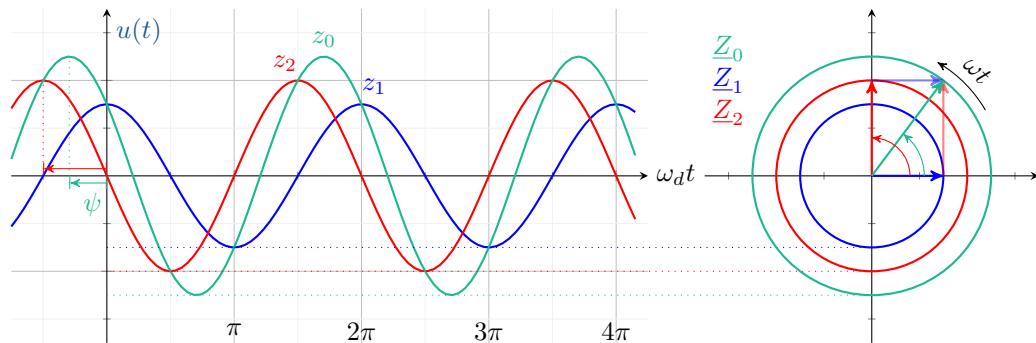
$$e^{+jx} - e^{-jx} = \cancel{\cos(x)} + j \sin(x) - \cancel{\cos(x)} + j \sin(x) = 2j \sin(x)$$

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot \left[\underbrace{2a}_{C_1} \cdot \cos(\omega_d t) - \underbrace{2b}_{C_2} \cdot \sin(\omega_d t) \right]$$

Exkurs: Herleitung der homogenen Lösung im periodischen Fall

Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Kreisfrequenz ω_d :

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot \left[\underbrace{2a}_{C_1} \cdot \cos(\omega_d t) - \underbrace{2b}_{C_2} \cdot \sin(\omega_d t) \right]$$



$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

$$\text{mit } \lambda_{1/2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d$$

Exkurs: Herleitung der homogenen Lösung im periodischen Fall

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot \left[\underbrace{2a}_{C_1} \cdot \cos(\omega_d t) - \underbrace{2b}_{C_2} \cdot \sin(\omega_d t) \right]$$

Zeitbereich

Polar.

Kart.

$$z_1(t) = +C_1 \cdot \cos(\omega_d t)$$

$$\Leftrightarrow \underline{z}_1 = C_1 \cdot e^{j0}$$

$$\underline{z}_1 = C_1$$

$$z_2(t) = -C_2 \cdot \sin(\omega_d t)$$

$$\Leftrightarrow \underline{z}_2 = C_2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{z}_2 = -j \cdot C_2$$

$$z_0(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

$$\Leftrightarrow \underline{z}_0 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$$

$$\underline{z}_0 = C_1 - j \cdot C_2$$

$$= C_0 \cdot \cos(\omega_d t + \psi)$$

$$\Leftrightarrow = C_0 \cdot e^{j\psi}$$

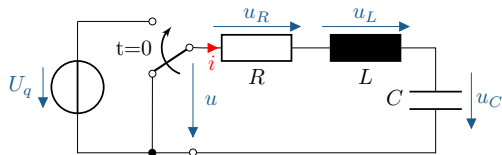
mit $C_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ und $\psi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right), \quad \varphi_0 = \psi + \frac{\pi}{2}$

$$z_0(t) = C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

$$u_{C,h} = e^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

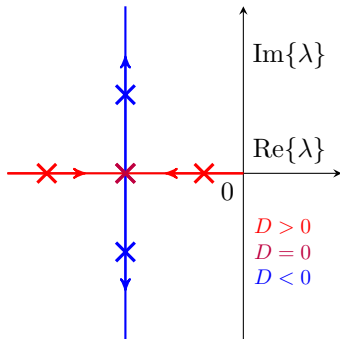
$$\text{mit } \lambda_{1/2} = -\delta \pm j \cdot \omega_d$$

Exkurs: Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis, Nullstellen



$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

Nullstellen im Ortskurvendigramm: $\lambda(D)$ für $\delta = \text{konst.}$



$\text{Re}\{\lambda\} < 0: \Rightarrow \text{stabil}$

$D > 0: \text{NST n\u00e4her an Im-Achse}$

$\Rightarrow \text{langsamer, dominant}$

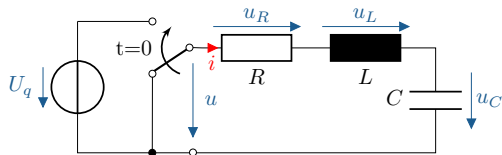
$D = 0: \text{NST weiter weg von Im-Achse}$

$\Rightarrow \text{schnellster aperiod. Fall}$

$D < 0: \text{NST konjugiert, komplex}$

$\Rightarrow \text{schwingungsf\u00e4hig}$

Exkurs: Abklingkonstante, Eigen- und Resonanzkreisfrequenz, Güte



$$\lambda_{1/2} = - \underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d}$$

Periodischer Fall: Zusammenhang von δ , ω_d , ω_0 und Q_S :

Resonanzkreisfreq.: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ mit $\text{Im}\{\underline{Z}(\omega_0)\} \stackrel{!}{=} 0$

ged. Eigenkreisfreq.: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ungedämpft gleich ω_0

Güte: $Q_S = \frac{X_{L,0}}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ Maß für Schwingungsfähigkeit

Vgl. homo. DGL: $0 = \ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y$ linear gedämpfte Schwingung