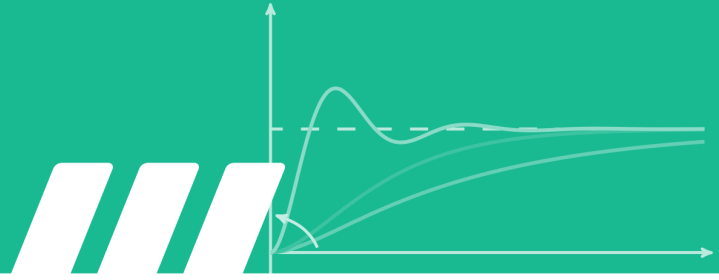
GET it digital

# Modul 12: Schaltvorgänge



Stand: 10. März 2026

# Lizenz

Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 12: Schaltvorgänge“ von M. Werle, T. Bache, R. Bechler, T. Wever Lizenz: CC BY 4.0.

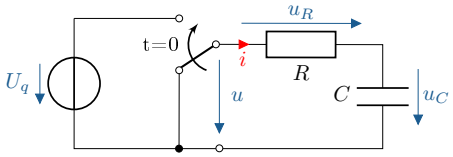
Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de
Das Werk ist online verfügbar unter:
https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-12-schaltvorgaenge

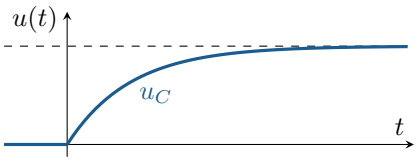
**Lernziele: Einführung**

Studierende lernen:

- Schaltvorgänge als nicht-stationäre Zustände nach Schaltaktionen kennen
- Schaltvorgänge im Kontext anderer Ausgleichsvorgänge zu verstehen
- Herausforderungen und Möglichkeiten bei Schaltvorgängen kennen
- das Schaltverhalten von idealen und realen Schaltern zu unterscheiden

# Ausgleichsvorgänge



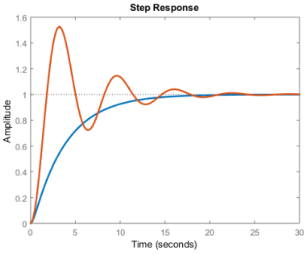

Analogie: Wasser erhitzen[1]

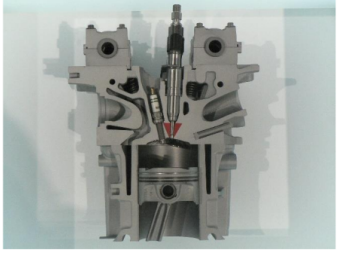
Ursachen für Ausgleichsvorgänge:

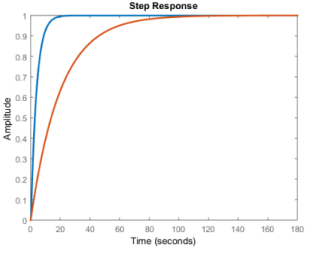
- Schalthandlungen
- DC: Änderung d. Spannung/Strom
- AC: Änderung d. Frequenz/Amplitude/Phase

[1] Bild: Bartolomeo Pinelli, Ausschnitt aus *A Peasant Family Cooking over a Campfire*, Lizenz CC0 1.0 `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81414513`

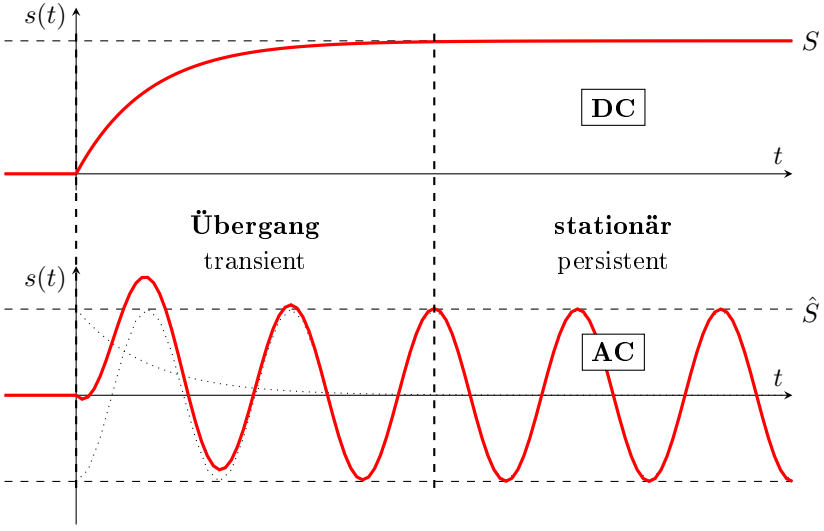
# Ausgleichsvorgänge- Beispiele



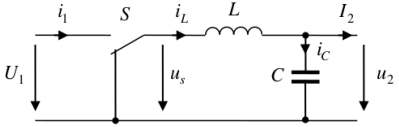




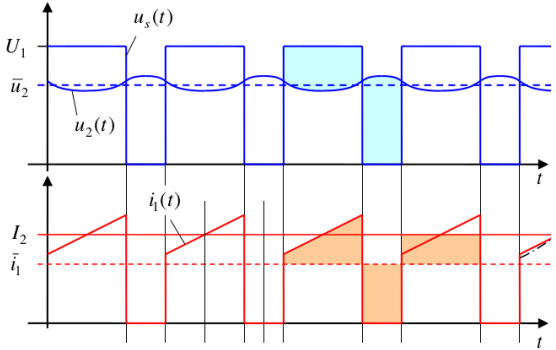
Beispiel Schaltvorgang bei Gleich- und Wechselspannung.



**Beispiel aus der Leistungselektronik:**




Tiefsetzsteller mit Glättungskondensator[2]

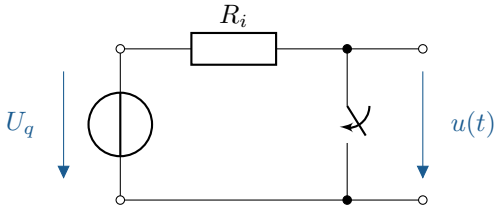



Stromrichter (engl. *power converter*) wandeln elektrische in elektrische Energie um Die Wandlung (z.B. Spannung, Strom, Frequenz) erfolgt durch getaktetes Schalten.

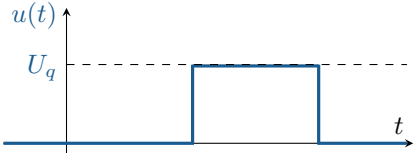
**Andere Beispiele:**
Ein-/Ausschalten, AD-/DA-Converter, Fahrradlicht mit Kondensator, ...

[2]Schaltbild und Zeitverlauf: Joachim Böcker, GET2, Universität Paderborn, modifiziert (gekürzt)

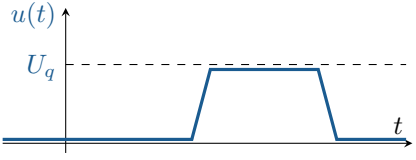
# Vergleich idealer und realer Schalter




Schalterspannung $u(t)$

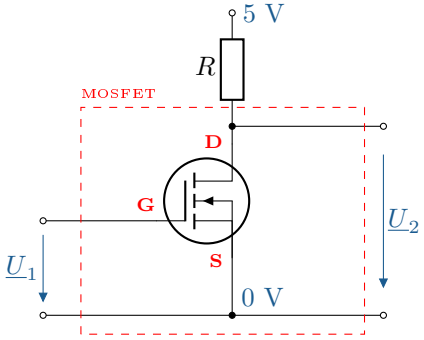



Ideal: verlustlos, instantan



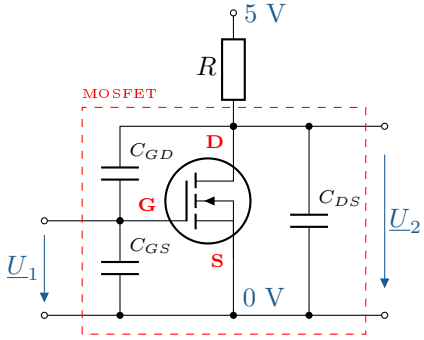

Real: Verluste, Latenzen

# Vergleich idealer und realer Schalter




Ideal:

keine parasitären Effekte




Real:

mit parasitären Kapazitäten

**Hier:** Ausgleichsvorgänge nach Schalten (Schaltvorgänge) im Fokus

**Real:** Ausgleichsvorgänge während Schalten

**Eingrenz.:** Annahme idealer Schalter

## Lernziele: Grundlagen

Studierende lernen:

- grundlegende Begriffe kennen und verstehen (Definitionen)
- Berechnungsmethoden im Zeit- und Bildbereich (Laplace) kennen
- DGLen für Schaltungsgrößen von LZI-Schaltungen aufzustellen
- DGL-Eigenschaften aus Schaltungseigenschaften abzuleiten
- Zeitverläufe bei Schaltvorgängen zu bestimmen (DGLen zu lösen)

# Definitionen

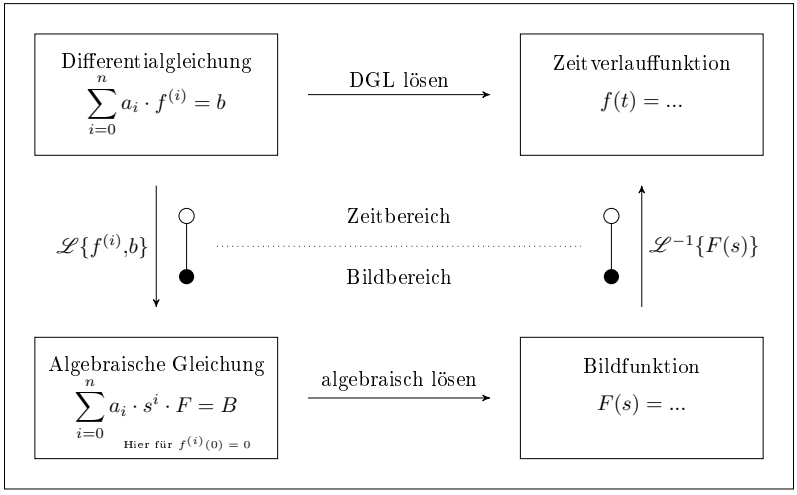
| G. | Begriffe | Definitionen |
|---|---|---|
| allg. | Schalten | „durch Betätigen eines Schalters in einen (Betriebs)zustand versetzen“[‡] |
| | Schalter | Komponente, hier zum öffnen oder schließen einer elektr. Verbindung |
| Eigenschaften | periodisch[1] | „in gleichen Abständen, regelmäßig [auftretend, wiederkehrend]“[‡] |
| | zeitinvariant[1] | invariant/unveränderlich über die Zeit |
| | gewöhnlich[2] | Ableitung(en) nach einer unabhängigen Variable (z.B. Zeit $t$), Vgl. partiell |
| | homogen[2] | Form gewöhnlich: $\sum a_i(t) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} f_i(y(t)) \stackrel{!}{=} 0$ mit Störfunktion $b = 0$ |
| | linear[2] | Form gewöhnlich: $\sum a_i(t) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = b(t)$ d.h. mit $\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t)$ linear |
| | Ordnung[2] | $n$ [1] d.h. höchstens Ableitung der Ordnung $n$ in DGL |
| Vorgänge | Ausgleichsvorg. | Vorgang in einem System, dass einen stationären Zustand anstrebt |
| | Einschwingvorg. | Ausgleichsvorgang, schwingend, endergon (nicht spontan) |
| | Schaltvorg. | nicht stationärer Zustand nach Schalten |
| | Transiente | Ausgleichsvorgang (synonym), Vgl. transient (adj.) |

[1] allgemein [2] bezogen auf DGL

‡ Duden online

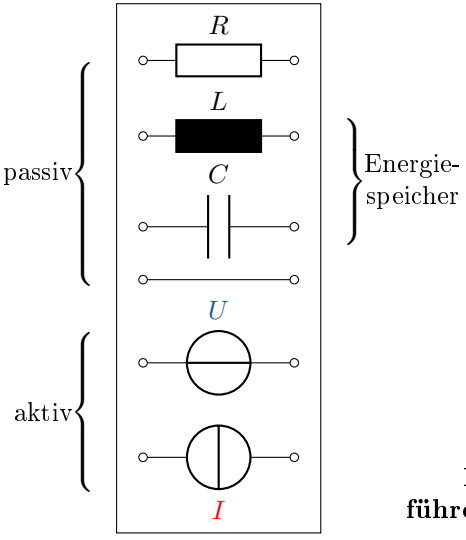
# Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge

Schaltvorgänge können im Zeit- und Bildbereich berechnet werden.




Beide Methoden basieren auf dem Lösen von Differentialgleichungen.

## Schaltung




## Gleichungen

Komponenten

| | |
|---|---|
| Widerstand | $u_R = R \cdot i_R$ |
| Induktivität | $u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot i_L$ |
| Kapazität | $i_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot u_C$ |

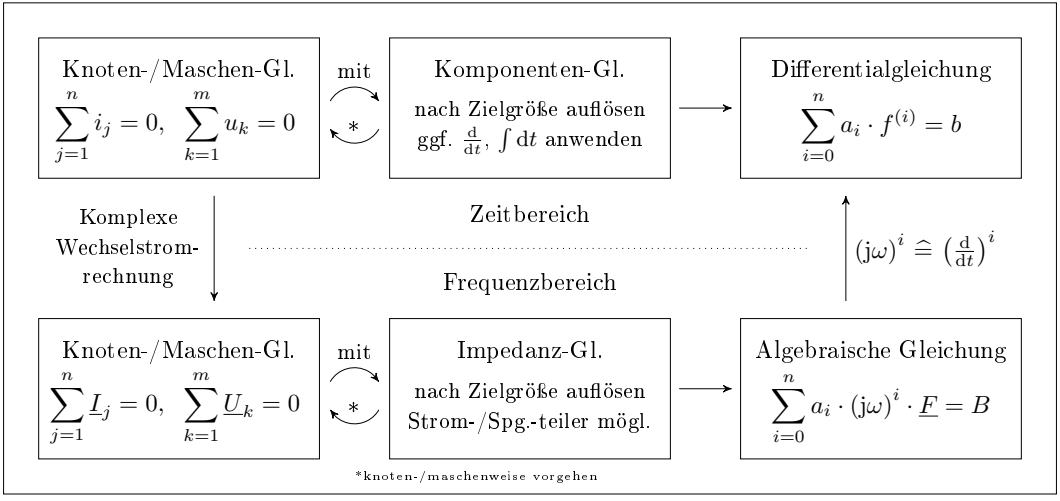
Energiespeicher

Kirchhoff

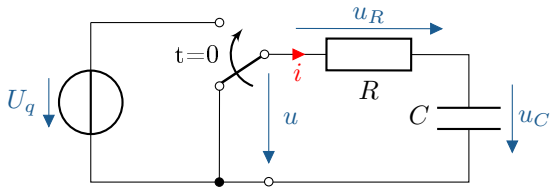
| | |
|---|---|
| Knoten: | $\sum i = 0$ |
| Maschen: | $\sum u = 0$ |

**Energiespeicher in Schaltungen führen zu Schaltvorgängen und DGLen.**

Mögliche Vorgehensweisen zum Aufstellen von Differentialgleichungen:



# Differentialgleichungenaufstellen, Beispiel



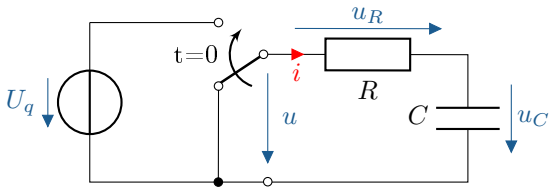

**Zeitbereich:** Gesucht sei $u_C(t \geq 0)$.

| $t \geq 0$ | **Kirchhoff:** | **Komponenten:** |
|---|---|---|
| Knoten: | $i_R = i_C = i$ | $i_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$ |
| Masche: | $u_R + u_C = u$ | $u_R = R \cdot i_R$ |

$$R \cdot i + u_C = U_q$$

**DGL:** $$RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_q$$ 1. Ord.

# Differentialgleichungenaufstellen, Beispiel




**Bildbereich:** Gesucht sei $u_C(t \geq 0)$.

$$\underline{U}_C = \underline{U}_q \cdot \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

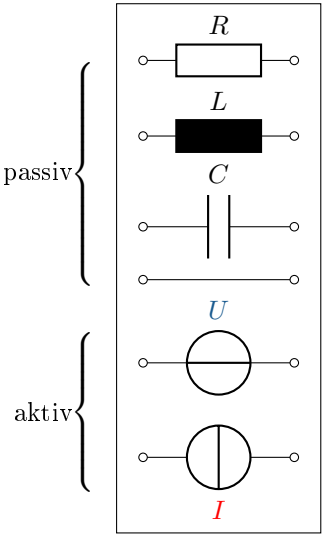
$$\left(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right) \cdot \underline{U}_C = \underline{U}_q \cdot \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

$$(\mathrm{j}\omega \cdot RC + 1) \cdot \underline{U}_C = \underline{U}_q$$

$$\textbf{DGL}: \quad RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_q$$

# Eigenschaften und allgemeine Form

## Schaltung




## Eigenschaften

System

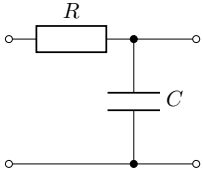
- Energie-speicher → DGL
- linear → linear
- zeit-invariant → Konstante Koeffizienten

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = b(t)$$

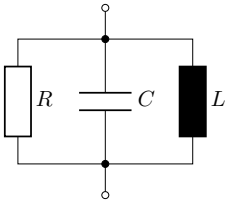
**DGL-Größen**

| | |
|---|---|
| $n$ : | Ordnung der DGL |
| $a_i$ : | Konst. Koeffizienten |
| $y(t)$ : | Schaltungsgröße |
| $b(t)$ : | Störgröße |

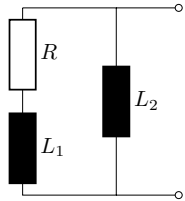
# Ordnung von Differentialgleichungen



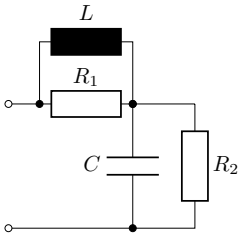

1 En.sp. $\rightarrow$ 1. Ord.




2 En.sp. $\rightarrow$ 2. Ord.




2 En.sp. $\rightarrow$ 2. Ord.




2 En.sp. $\rightarrow$ 2. Ord.

Anzahl Energiespeicher[§] = Ordnung der DGL

[§] nicht zusammenfassbar

Jede DGL hat unendlich viele Lösungen.

Eine eindeutige Lösung für DGL $n$-ter Ordnung braucht $n$ **Anfangsbedingungen**.

**Def. Anfangsbed.:** Wert beliebiger Schaltungsgröße $y(t)$ während Schaltvorgang.

---

Mit:

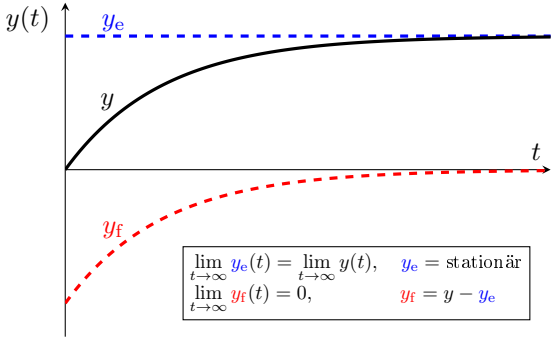
**Kapazität:** $E_{el} = \frac{1}{2} C \cdot u^2 \implies u = stetig$ (Speicher el. Energie)

**Induktivität:** $E_{mag} = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \implies i = stetig$ (Speicher mag. Energie)

gilt unmittelbar vor und nach einem Schaltzeitpunkt:

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} u_{C,t-} &= u_{C,t+} \\ \lim_{\pm\infty \to t} u_C(t) &= u_{C,t\pm} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i_{L,t-} &= i_{L,t+} \\ \lim_{\pm\infty \to t} i_L(t) &= i_{L,t\pm} \end{aligned}$$

Zerlegung der **Systemgröße** $y(t)$ in:
**eingeschwungener Zustand** $y_\mathrm{e}(t)$
und **flüchtiger Zustand** $y_\mathrm{f}(t)$.




Entspricht der Zerlegung von $y$ in:
eine **partikuläre Lösung** $y_\mathrm{p}$
und die **allg. homogene Lösung** $y_\mathrm{h}$

$$y(t) - \underbrace{y_\mathrm{e}(t)}_{y_\mathrm{p}(t)} = \underbrace{y_\mathrm{f}(t)}_{y_\mathrm{h}(t)}$$

mit

$$\sum a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\, y = b(t)$$

$$- \sum a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\, y_\mathrm{e} = b(t)$$

$$= \sum a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}\, y_\mathrm{f} = 0$$

# Berechnung der homogenen Lösung

**Homogene DGL:** $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y_\mathrm{h} = 0$ (gew., lin., konst. Koeff.)

Ansatz: $y_\mathrm{h}(t) = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ (Exponentialfkt.)

Char. Polynom: $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \lambda^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = ...$ (Eigenwerte: $\lambda$)

1. Lösungsansatz: $y_\mathrm{h}(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot \mathrm{e}^{\lambda_i t}$ für $\lambda_i \neq \lambda_{i-1} \; \forall \; i$

2. Lösungsansatz: $y_\mathrm{h}(t) = \sum_{j=1}^{m} K_j \cdot t^{j-1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ für $\lambda_j = \lambda \; \forall \; j$

**allg. hom. Lösung:** $y_\mathrm{h}(t) = \; ... \; = y_\mathrm{f}$ (Linearkombination)

# Beispiel: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:[5]

$$\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}t^5}y(t) + 7\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}y(t) + 26\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y(t) + 62\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + 8\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 75y(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^5 + 7 \cdot \lambda^4 + 26 \cdot \lambda^3 + 62 \cdot \lambda^2 + 85 \cdot \lambda + 75 = 0$$

besitzt eine einfache und zwei doppelte, konjugierte, komplexe Nullstellen:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1 + 2\mathrm{j}, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -1 - 2\mathrm{j}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y_\mathrm{h}(t) = K_1 \cdot \mathrm{e}^{-3t} + (K_2 + K_3 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-t}\sin(2t) + (K_4 + K_5 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)$$

[5] leicht verändert aus: Manfred Albach, *Elektrotechnik 2*, Pearson Deutschland GmbH 3. Auflage, 2020.

# Berechnung der Partikulären Lösung

Der **eingeschwungene Zustand** $y_\mathrm{e}$ entspricht der **partikulären Lösung** $y_\mathrm{p}$.

In LZI-Systemen gilt eingeschwungen:

| | | |
|---|---|---|
| DC-Anregung: | $y_\mathrm{p}(t) = \text{konst.}$ | (Gleichgröße) |
| AC-Anregung: | $y_\mathrm{p}(t) = \hat{Y} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ | (Wechselgröße) |

Dadurch sind die bekannten **Methoden der Netzwerkberechnung anwendbar**.

DC: Kapazitäten wie offene Schaltungen und Induktivitäten wie Kurzschlüsse

AC: Komplexe Wechselstromrechnung (Impedanzen, Admittanzen)

## Merke: Verfahren für DGL

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Differentialgleich. aufstellen | (lin., gew.) | $\sum a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i} = b$ |
| 2. | Flüchtiger Zustand | (homo. Lsg.) | $y_\mathrm{f} \overset{*}{=} \sum K_i' \cdot \mathrm{e}^{\lambda_i t}$ |
| 3. | Eingeschwung. Zustand | (part. Lsg.) | $y_\mathrm{e} = y(t \to \infty)$ |
| 4. | Überlagern | (allg. Lsg.) | $y = y_\mathrm{f} + y_\mathrm{e}$ |
| 5. | Konstante(n) bestimmen | (Anfangsbed.) | $i_L, u_C = stetig$ |

*mit $K_i' = \begin{cases} K_i & \text{für } \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall \; i,j \quad \text{(einfache NS)} \\ K_i \cdot t^k & \text{für } \lambda_i = \lambda_{i-k} \text{ mit } k \in [0,\ 1,\ \ldots,\ m-1] \quad (m\text{-fache NS, } k\text{-ter gleicher EW}) \end{cases}$

## Lernziele: Schaltvorgänge

Studierende lernen:

- Schaltvorgänge im Zeitbereich zu berechnen
- das Schaltverhalten von RC-, RL- und RLC-Gliedern kennen und verstehen
- die Möglichkeit kennen Schaltvorgänge bei AC-Anregung zu minimieren
- das Schwingverhalten von Schwingkreisen zu verstehen und zu analysieren

# Schaltvorgänge bei Gleichspannung

Schaltvorgänge bei Gleichspannung sind:

- Ladevorgänge,
- Entladevorgänge.

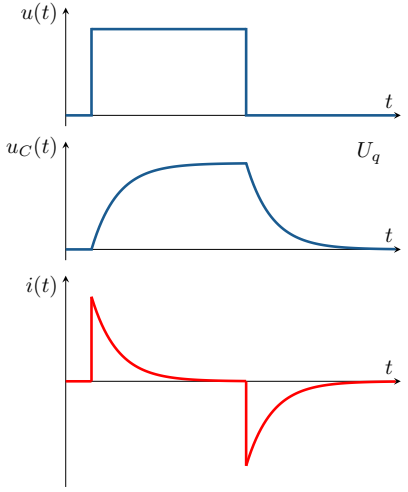
Berechnung zunächst für:

- eine Kapazität $C$
- eine Induktivität $L$

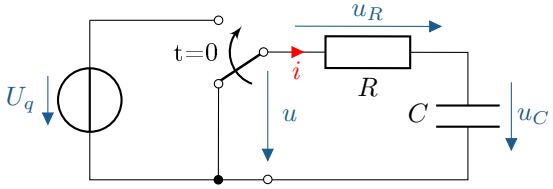
jeweils in Reihe mit einem Widerstand $R$.

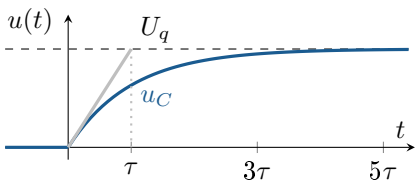
RC- oder RL-Glied $\Longrightarrow$ **DGL** 1. Ordnung

$$a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$




Schaltvorgänge bei RC-Glied (DC)




**DGL 1. Ordnung** $\Rightarrow$ Exponentialverlauf.

$$u_C(t) = U_q\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Die **Zeitkonstante** $\tau$, $[\tau] = 1\,\mathrm{s}$:

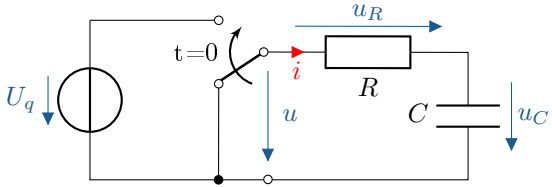
- bestimmt die Steilheit bei exponentiellen Verläufen.
- ist die Zeit nach der die Tangente den Endwert erreicht.
- ist beim RC-Glied $\tau = RC$.

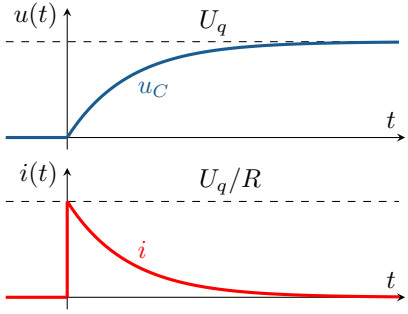
Typ. Werte Zeitkonstante $\tau$

| $t$ | $\tau$ | $3\,\tau$ | $5\,\tau$ |
|---|---|---|---|
| $1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}$ | 63,2% | 95,0% | 99,3% |
| $\mathrm{e}^{-t/\tau}$ | 36,8% | 5,0% | 0,7% |

Faustregel: „Eingeschwungen“ nach $5\,\tau$

# Ladevorgang bei Kapazitäten



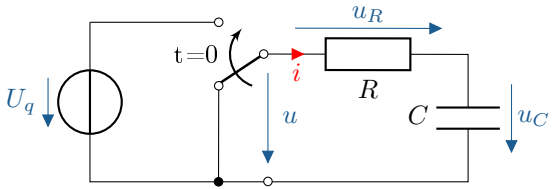




gegeben: $u_C(0)$, $U_q$, $R$, $C$

gesucht: $u_C(t)$

| | |
|---|---|
| **1. DGL** | $U_q = RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C$ |
| **2. Homogene Lösung** | $u_{C,h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = RC$ |
| **3. Partikulare Lösung** | $u_{C,p} = U_q$ |
| **4. Inhomogene Lösung** | $u_C = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + U_q$ |
| **5. Konstanten bestimmen** | $u_C = U_q \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ |

# Ladevorgang bei Kapazitäten




**DGL 1. Ordnung:**

$$a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

**1.) DGL aufstellen:** für $u_C(t)$ $(t \geq 0)$

Ausgehend von der Maschengleichung wird $u_R$ in Abhängigkeit von $u_C$ ausgedrückt:

Kirchhoff : Masche: $u_R + u_C = U_q$ Knoten: $i_R = i_C = i$

$R \cdot i + u_C = U_q$ mit $u_R = R \cdot i$

DGL : $R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_q$ mit $i = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$

**2.) Homogene Lösung, allg.:** (flüchtig) (ohne Störterm)

DGL$_h$ : $RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{C,h} + u_{C,h} = 0$ Ansatz: $u_{C,h} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

$K \cdot (RC \cdot \quad \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \; + \; \mathrm{e}^{\lambda t}) = 0$

char. Polynom: $\Rightarrow \quad RC \cdot \lambda + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}$

hom. Lsg. : $u_{C,h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = RC$

**3. Partikulare Lösung:** (eingeschwungen) (für $t \to \infty$)

DGL$_p$ : $RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{C,p} + u_{C,p} = U_q$ mit $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t\to\infty} = 0$

part. Lsg. : $u_{C,p} = U_q$

**4.) Inhomogene Lösung, allg.:** (Überlagerung)

$$u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t) \qquad = u_{C,f}(t) + u_{C,e}(t)$$

allg. Lsg.: $u_C(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + U_q$

**5. Konstanten bestimmen:** (Anfangsbedingung einsetzen)

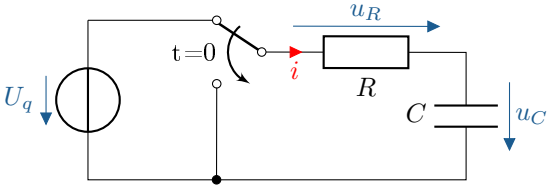
Anfangsbed. $u_C(0) = K + U_q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K = -U_q$

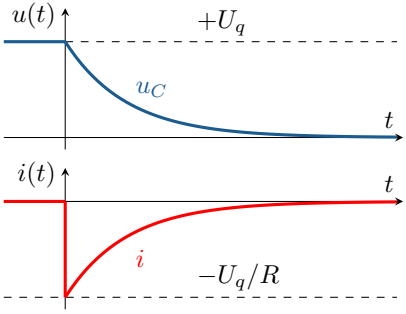
$$u_C(t) = -U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + U_q$$

spez. allg. Lsg.: $u_C(t) = U_q \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$

Strom: $i_C(t) = \dfrac{U_q}{R} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $i_C = C \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$

# Entladevorgang bei Kapazitäten



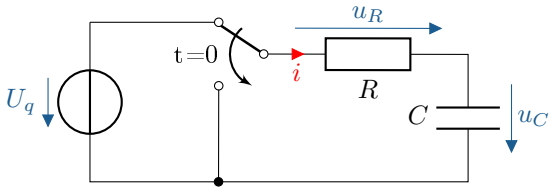




gegeben: $u_C(0)$, $U_q$, $R$, $C$

gesucht: $u_C(t)$

1. **DGL** $0 = RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C$
2. **Homogene Lösung** $u_{C,h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = RC$
3. **Partikulare Lösung** $u_{C,p} = 0$
4. **Inhomogene Lösung** $u_C = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$
5. **Konstanten bestimmen** $u_C = U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$

# Entladevorgang bei Kapazitäten




**DGL 1. Ordnung:**

$$a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

**1.) DGL aufstellen:** für $u_C(t)$ $(t \geq 0)$

Ausgehend von der Maschengleichung wird $u_R$ in Abhängigkeit von $u_C$ ausgedrückt:

Kirchhoff : Masche: $u_R + u_C = 0$ Knoten: $i_R = i_C = i$

$R \cdot i + u_C = 0$ mit $u_R = R \cdot i_R = R \cdot i$

DGL : $RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = 0$ mit $i = i_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$

# Entladevorgang bei Kapazitäten

**2.) Homogene Lösung, allg.:** (flüchtig)

DGL$_h$ : $RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{C,h} + u_{C,h} = 0$ Ansatz: $u_{C,h} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

char. Polynom: $\Rightarrow \quad RC \cdot \lambda + 1 = 0$ $\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{RC}$

hom. Lsg. : $u_{C,h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = RC$

**3.) Part. Lsg., 4.) Überlagerung:** (eingeschwungen Null)

allg. Lsg.: $u_C = u_{C,h} + \cancel{u_{C,p}}$ mit $u_{C,p} = 0$

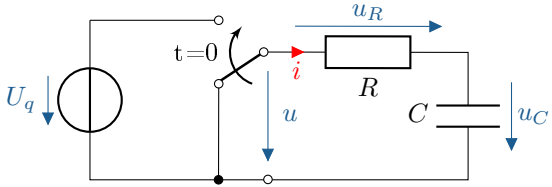
**5.) Konstanten bestimmen:** (AB einsetzen)

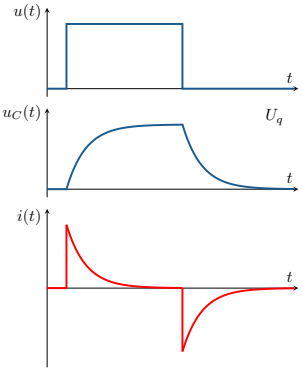
Anfangsbed. $u_C(0) = K \cdot \mathrm{e}^0 \stackrel{!}{=} U_q \quad \Rightarrow \quad K = U_q$

spez. allg. Lsg.: $u_C(t) = U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$

Strom: $i_C(t) = -\frac{U_q}{R} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $i_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$

# Vergleich Lade- und Entladevorgang bei Kapazitäten



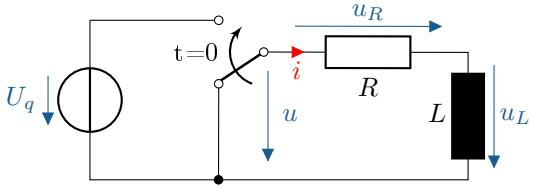

Rechenwege prinzipiell gleich für (DC) Ladevorgang und Entladevorgang.

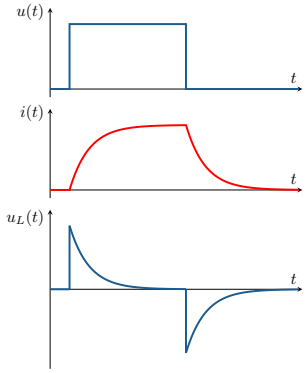
Spannung $u_C$ nach Schaltzeitpunkt $t_0$ [Vgl. Skript]:

$$u_C(t-t_0) = \underbrace{u_C(t_0)}_{\text{Startwert}} + \Big(\underbrace{u_{C,\infty} - u_C(t_0)}_{\text{Differenz}}\Big) \cdot \Big(\underbrace{1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{Exp. Annäherung}}\Big)$$

Unterschiede nur bei Störglied der DGL, Anfangsbedingung und Endwert.

# Vergleich Lade- und Entladevorgang bei Induktivitäten




Rechenweg bei RL-Glied prinzipiell gleich wie bei RC-Glied. (DGL 1. Ordnung)

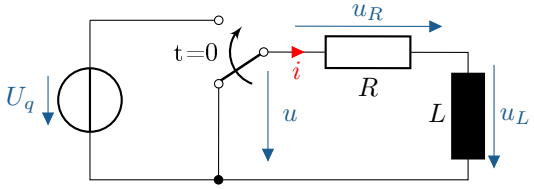
Achtung: $i$ stetig, $u_L$ sprunghaft.

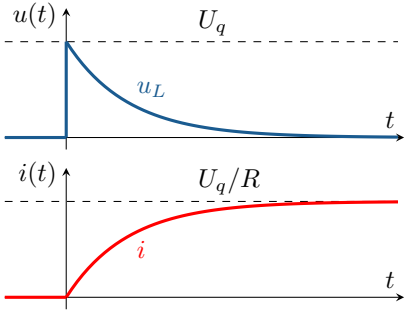
**Vermutung:** Strom u. Spannung „vertauscht“gegenüber RC-Glied.

$$i(t-t_0) = \underbrace{i(t_0)}_{\text{Startwert}} + \Big(\underbrace{i_\mathrm{e} - i(t_0)}_{\text{Differenz}}\Big) \cdot \Big(\underbrace{1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{Exp. Annäherung}}\Big)$$

**Laden:** $i$ zunehmend, $u_L$ abnehmend. **Entladen:** vice versa.

# Ladevorgang bei Induktivitäten




gegeben: $i(0)$, $U_q$, $R$, $L$

gesucht: $i(t)$

1. **DGL**

$$\frac{U_q}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i$$

2. **Homogene Lösung**

$$i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

3. **Partikulare Lösung**

$$i_\mathrm{p} = \frac{U_q}{R}$$

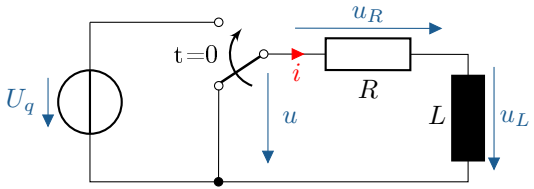
4. **Inhomogene Lösung**

$$i = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{U_q}{R}$$

5. **Konstanten bestimmen**

$$i = \frac{U_q}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

# Ladevorgang bei Induktivitäten




**DGL 1. Ordnung:**

$$a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

**1. DGL aufstellen:** für $i(t)$ $(t \geq 0)$

Masche :

$$u_R + u_L = U_q \qquad \text{mit} \quad u_R = R \cdot i$$

$$R \cdot i + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i = U_q \qquad \text{mit} \quad u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$$

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + R \cdot i = U_q \qquad \text{mit} \quad u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$$

DGL :

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = \frac{U_q}{R}$$

**2.) Homogene Lösung, allg.:** (flüchtig) (ohne Störterm)

DGL$_h$ : $\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_\mathrm{h} + i_\mathrm{h} = 0$ Ansatz: $i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

char. Pol. : $\frac{L}{R} \cdot \lambda + 1 = 0$ $\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$

hom. Lsg. : $i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = \frac{L}{R}$

**3.) Partikulare Lösung:** (eingeschwungen) mit $t \to \infty$

DGL$_p$ : $\cancel{\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_\mathrm{p}} + i_\mathrm{p} = \frac{U_q}{R}$ mit $i_\mathrm{p} = konst.$

part. Lsg. : $i_\mathrm{p} = \frac{U_q}{R}$

**4.) Inhomogene Lösung, allg.:** (Überlagerung)

allg. Lsg.: $$i(t) = \underbrace{K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}}_{i_\mathrm{h}} + \underbrace{\frac{U_q}{R}}_{i_\mathrm{p}} \qquad \text{mit} \quad i_\mathrm{h} = i_f, \quad i_\mathrm{p} = i_e$$

**5.) Konstanten bestimmen:** (Anfangsbedingungen einsetzen)

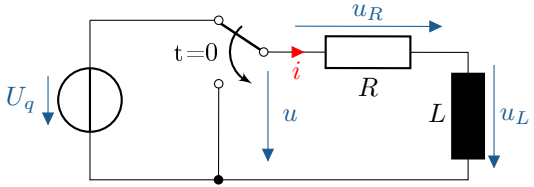
Anfangsbed. $$i(0) = K \cdot \cancel{\mathrm{e}^{0}} + \frac{U_q}{R} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \quad K = -\frac{U_q}{R}$$

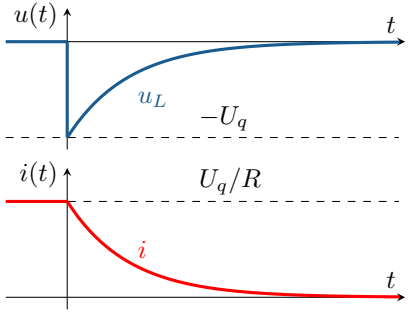
eindeut. Lsg.: $$i(t) = \frac{U_q}{R} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Spannung $u_L$ aus Strom $i$ bestimmen:

Spannung: $$u_L = U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{mit} \quad u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$$

# Entladevorgang bei Induktivitäten




gegeben: $i(0)$, $U_q$, $R$, $L$

gesucht: $i(t)$

**1. DGL**

$$0 = \frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i$$

**2. Homogene Lösung**

$$i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

**3. Partikulare Lösung**

$$i_\mathrm{p} = 0$$

**4. Inhomogene Lösung**

$$i = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

**5. Konstanten bestimmen**

$$i = \frac{U_q}{R} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Schaltvorgänge bei AC-Anregung sind:

- frequenzabhängig ($f$, $\omega$)
- schaltzeitpunktabhängig ($t_0$)

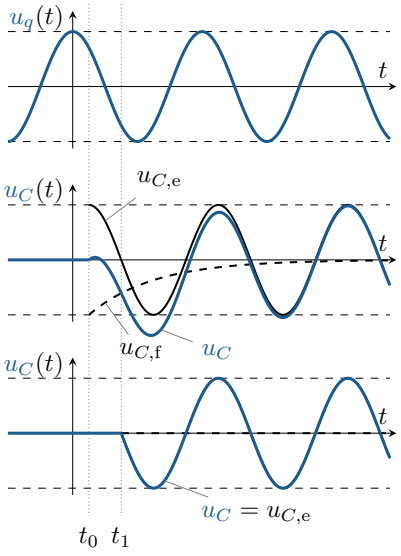
Berechnung analog zu DC zunächst für:

- eine Kapazität $C$
- eine Induktivität $L$

jeweils in Reihe mit einem Widerstand $R$.

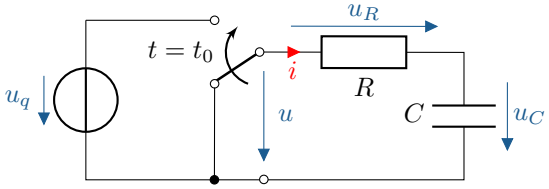
RC- oder RL-Glied $\Longrightarrow$ **DGL** 1. Ordnung

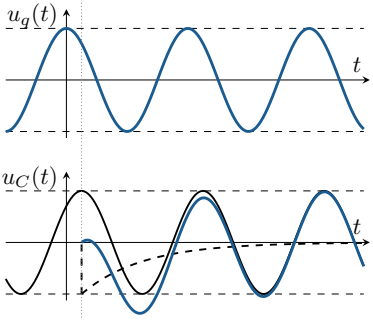
$$a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$




Vergleich: Schaltzeitpunkte $t_0$ und $t_1$

# Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Kapazitäten




gegeben: $u_C(t_0)$, $u_q(t)$, $R$, $C$, $\omega$

gesucht: $u_C(t)$ für $t \geq t_0$

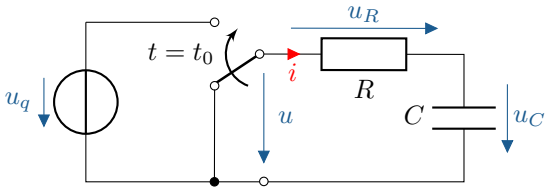
**1. DGL** $u_q = RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(t) + u_C(t) = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$

**2. Homogene Lösung** $u_{C,\mathrm{h}} = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$ mit $\tau = RC$

**3. Partikulare Lösung** $u_{C,\mathrm{p}} = \hat{U}_{C,\mathrm{p}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}})$

**4. Inhomogene Lösung** $u_C = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{U}_{C,\mathrm{p}} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}})$

**5. Konstanten bestimmen** $u_C = \hat{U}_{C,\mathrm{p}} \cdot \left( -\cos(\omega t_0 + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \cos(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \right)$




**DGL 1. Ordnung:**

$$a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

**1.) DGL aufstellen:** für $u_c$ $(t \geq t_0)$

$$RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(t) + u_C(t) = u_q(t)$$

mit $u_q(t) = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$ (Störterm)

**2.) Homogene Lösung, allgemein** (flüchtig) (ohne Störterm):

$$u_{C,\mathrm{h}} = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t'}{\tau}} \qquad \text{mit} \quad t' = t - t_0$$

$$= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t - t_0}{\tau}} \qquad \text{mit} \quad \tau = RC$$

**3.) Partikuläre Lösung** (eingeschwungen) ($t \to \infty$): sinusförmig!

Anwendung komplexer Wechselstromrechnung:

$$\begin{aligned} u_{C,p} &= \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \\ &= \mathrm{Re}\left\{ \underline{\hat{U}}_{C,p} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right\} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_{C,p} = \hat{U}_{C,p} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{C,\mathrm{p}}} \end{aligned}$$

Komplexer Amplitudenzeiger $\underline{\hat{U}}_{C,p}$ durch komplexen Spannungsteiler:

$$\underline{\hat{U}}_{C,p} = \underline{\hat{U}}_q \cdot \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \underline{\hat{U}}_q \cdot \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{\underline{\hat{U}}_q}{1 + \mathrm{j}\omega CR} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_q = \hat{U}_q \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_q}$$

Für die Amplitude $\hat{U}_{C,p}$ und den (Last-)Phasenwinkel $\varphi_{C,\mathrm{p}}$ folgt:

$$\hat{U}_{C,p} = \frac{\hat{U}_q}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \qquad \text{und} \qquad \varphi_{C,\mathrm{p}} = \varphi_q - \arctan(\omega CR)$$

**4.) Inhomogene Lösung, allgemein** (Überlagerung):

$$\begin{aligned} u_C &= u_{C,\mathrm{h}} + u_{C,p} \\ &= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \end{aligned}$$

**5.) Konstanten bestimmen** (Anfangsbedingung):

$$\begin{aligned} u_C(t_0) &\stackrel{!}{=} 0 \\ K \cdot \cancel{\mathrm{e}^{0}} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,\mathrm{p}}) &= 0 \\ K &= -\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ergibt sich durch Einsetzen von $K$ in die allgemeine Lösung:

$$u_C(t) = \underbrace{-\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{u_{C,\mathrm{h}}} + \underbrace{\hat{U}_{C,p} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}}\right)}_{u_{C,p}}$$

# Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Kapazitäten

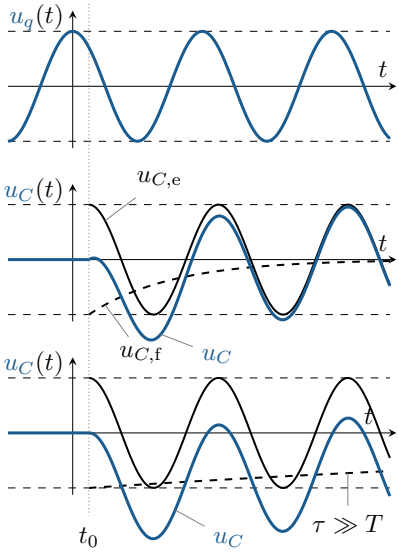
Bei sinusförmiger Anregung:

Bei großen Zeitkonstanten sind **Überspannungen/-ströme möglich**.

Erreichbar sind Überwerte bis zum doppelten/dreifachen Scheitelwert.

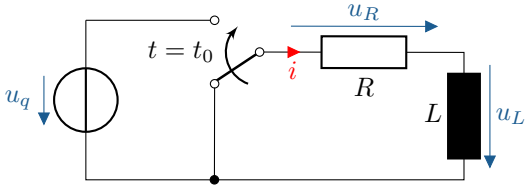
Durch geschicktes Schalten sind **Ausgleichsvorgänge vermeidbar**.

Beispiel: Trennschalter im Netz



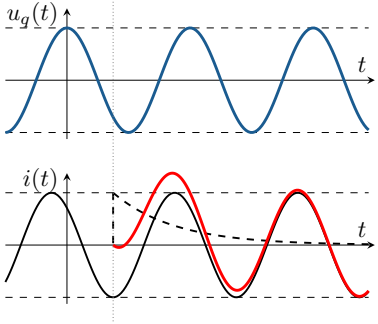

Vergleich: kleines und großes $\tau$

# Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung bei Induktivitäten




gegeben: $i(t_0)$, $u_q(t)$, $R$, $L$, $\omega$

gesucht: $i(t)$ für $t \geq t_0$




**1. DGL**

$$\frac{u_q}{R} = \frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = \frac{\hat{U}_q}{R} \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$$

**2. Homogene Lösung**

$$i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

**3. Partikulare Lösung**

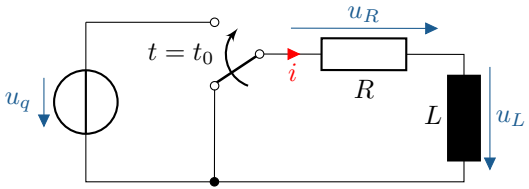
$$i_\mathrm{p} = \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

**4. Inhomogene Lösung**

$$i = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

**5. Konstanten bestimmen**

$$i = \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \left( -\cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \cos(\omega t + \varphi_I) \right)$$




**DGL 1. Ordnung:**

$$a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + a_0 \cdot y(t) = b$$

**1.) DGL aufstellen:** für $i$ mit $t \geq t_0$

DGL : $$\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = \frac{u_q}{R}$$ mit $u_q = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$

**2.) Homogene Lösung, allg.:** (flüchtig, für Schaltzeitpunkt $t_0$)

hom. Lsg.: $$i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$$ mit $\tau = \frac{L}{R}$

**3.) Partikulare Lösung:** (eingeschwungen, mit $t \to \infty$)

DGL transf. :
$$\frac{L}{R} \cdot \mathrm{j}\omega\, \underline{\hat{I}}_\mathrm{p} + \underline{\hat{I}}_\mathrm{p} = \frac{\underline{\hat{U}}_q}{R} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_q = \hat{U}_q \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_q}$$

Zeiger:
$$\underline{\hat{I}}_\mathrm{p} = \frac{\underline{\hat{U}}_q}{R} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega \cdot \frac{L}{R}} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{I}}_\mathrm{p} = \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I}$$

$$\hat{I}_\mathrm{p} = \frac{\underline{\hat{U}}_q}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \cdot \frac{L}{R}\right)^2}}$$

$$\varphi_I = \varphi_q - \arctan\left(\omega \cdot \frac{L}{R}\right)$$

part. Lsg. :
$$i_\mathrm{p} = \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) \qquad \text{mit} \quad i_\mathrm{p} = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{I}}_\mathrm{p} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

**4.) Inhomogene Lösung, allg.:** (Überlagerung)

allg. Lsg.:
$$i = \underbrace{K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{i_\mathrm{h}} + \underbrace{\hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)}_{i_\mathrm{p}}$$

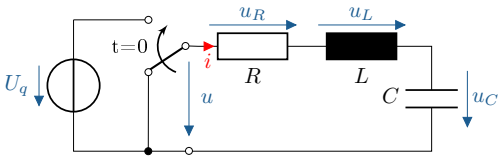
**5.) Konstanten bestimmen:** (AB einsetzen)

Anf.bed.:
$$i(t_0) = K \cdot \cancel{\mathrm{e}^{0}} + \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad K = -\hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I)$$

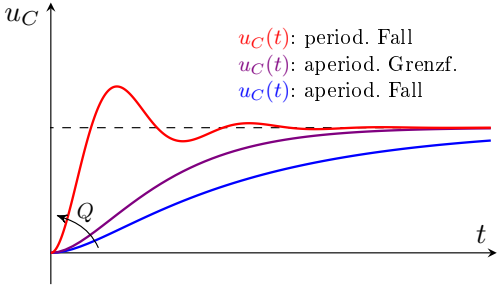
eind. Lsg.:
$$i(t) = -\hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

Spannung $u_L$ mit $u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$ berechnen:

Spannung:
$$u_L(t) = R \cdot \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \omega L \cdot \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \sin(\omega t + \varphi_I)$$



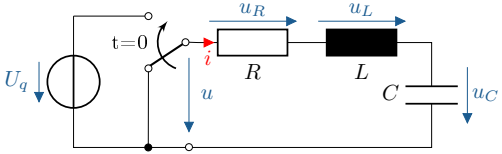

Wegen $L$ und $C \Rightarrow$ Schwingkreis




**DGL** (für $u_C$ für $t \geq 0$):

$$LC \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_C + RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_q$$

| Fallunterscheidung | Dämpfung | Diskrimi. | Güte |
|---|---|---|---|
| aperiodischer Fall | stark | $D > 0$ | $Q < 0{,}5$ |
| aperiodischer Grenzfall | kritisch | $D = 0$ | $Q = 0{,}5$ |
| periodischer Fall | schwach | $D < 0$ | $Q > 0{,}5$ |




Ansatz: $u_{C,\mathrm{h}} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

**1.) DGL:** $u_L + u_R + u_C = u$

$$L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + R \cdot i + u_C = U_q$$

$$LC \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_C + RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_q$$

**homogene DGL:**

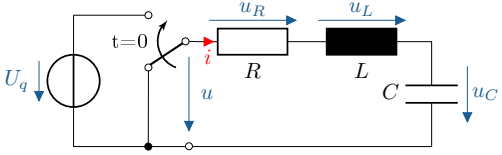
$$LC \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_{C,\mathrm{h}} + RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{C,\mathrm{h}} + u_{C,\mathrm{h}} = 0$$

char. Polynom:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

**Eigenwerte:**

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$




$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

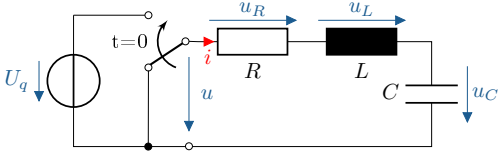
**Achtung!** Je nach Diskriminante $D$ andere Eigenwerte $\lambda_{1/2}$.

**2.) Homogene Lösung:**

$$u_{C,\mathrm{h}} = \begin{cases} K_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \text{für} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} & \text{für} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases}$$

| **Fallunterscheidung** | **Diskrimi.** | **Eigenwerte $\lambda_{1/2}$** |
|---|---|---|
| aperiodischer Fall | $D > 0$ | Zwei verschiedene, reale NST |
| aperiodischer Grenzfall | $D = 0$ | Eine doppelte, reale NST |
| periodischer Fall | $D < 0$ | Zwei konjugierte, komplexe NST |

# Aperiodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis




$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

**Aperiodischer Fall:** (Kriechfall)

für $D > 0$ gilt $\quad \frac{R}{2L} \overset{!}{>} \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow$ 2 reelle EW

**2.) Homogene Lösung:** (flüchtig)

$$u_{C,\mathrm{h}} = K_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \qquad \text{mit} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda < 0$$

**3.) Partikuläre Lösung:** (eingeschwungen, identisch für alle drei Fälle)

$$u_{C,\mathrm{p}} = U_q$$

**4.) Allgemeine Lösung:** (Überlagerung)

$$u_C(t) = K_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + U_q$$

**5.) Konstanten bestimmen:** (wie bekannt)

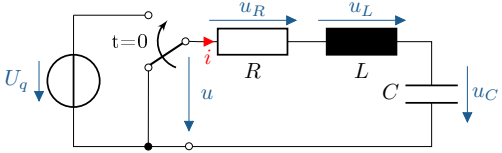
Anfangsbedingungen (AB): $u_C(0) = 0$ und $i(0) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = 0$

1. AB: $u_C(0) = K_1 \cdot \cancel{\mathrm{e}^{\lambda_1 0}} + K_2 \cdot \cancel{\mathrm{e}^{\lambda_2 0}} + U_q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -K_2 - U_q$

2. AB: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = K_1 \cdot \lambda_1 \cdot \cancel{\mathrm{e}^{\lambda_1 0}} + K_2 \cdot \lambda_2 \cdot \cancel{\mathrm{e}^{\lambda_2 0}} + \cancel{0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -K_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

$\Longrightarrow$ $K_1 = \frac{U_q}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1}$ und $K_2 = \frac{U_q}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1}$

# Aperiodischer Grenzfall beim RLC-Serienschwingkreis




$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

**Aperiodischer Grenzfall:**

für $D = 0$ gilt $\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \cancel{\sqrt{0}} = \lambda$ $\Rightarrow$ 1 reeller EW

**2.) Homogene Lösung:** (flüchtig)

$$u_{C,\mathrm{h}} = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \text{mit} \quad \lambda_1 = \lambda_2 < 0$$

**3.) Partikuläre Lösung:** (eingeschwungen)

$$u_{C,\mathrm{p}} = U_q$$

**4.) Allgemeine Lösung:** (Überlagerung)

$$u_C(t) = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + U_q$$

**5.) Konstanten bestimmen:** (wie bekannt)

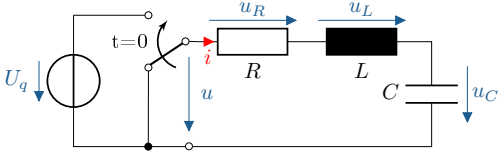
Anfangsbedingungen (AB): $u_C(0) = 0$ und $i(0) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = 0$

1. AB: $u_C(0) = (K_1 + \cancel{K_2 \cdot 0}) \cdot \cancel{\mathrm{e}^{\lambda 0}} + U_q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -U_q$

2. AB: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = (K_1 + \cancel{K_2 \cdot 0}) \cdot \lambda \cdot \cancel{\mathrm{e}^{\lambda 0}} + K_2 \cdot \cancel{\mathrm{e}^{\lambda 0}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = -K_1 \cdot \lambda$

$\Longrightarrow \quad K_1 = -U_q \quad$ und $\quad K_2 = +U_q \cdot \lambda$

# Periodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis




$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

**Periodischer Fall:** (Schwingfall)

für $D < 0$ gilt $\quad \lambda_{1/2} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm \mathrm{j} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d} \quad \Rightarrow$ 2 kompl. EW

**2.) Homogene Lösung:** (flüchtig)

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \qquad \text{mit} \quad \lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{j}\,\omega_d$$

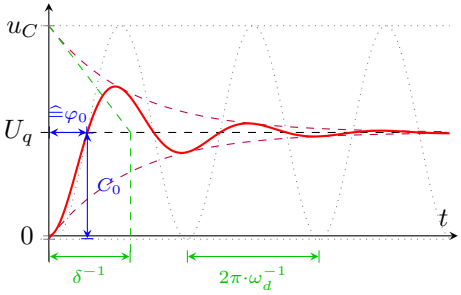
Herleitung für $u_{C,\mathrm{h}}$ in Exkurs. Bestimmung der Konstanten $C_0$ und $\varphi_0$ wie bekannt.

**3.) Partikuläre Lösung:** (eingeschw.)

$$u_{C,\mathrm{p}} = U_q$$

**4.) Allgemeine Lösung:** (Überlagerung)

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) + U_q$$




**5.) Konstanten bestimmen:** (wie bekannt)

1. AB: $u_C(0) = \cancel{\mathrm{e}^{-\delta 0}} \cdot C_0 \cdot \sin(\cancel{\omega_d t} + \varphi_0) + U_q \stackrel{!}{=} 0$

2. AB: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = -\delta \cdot \cancel{\mathrm{e}^{-\delta 0}} \cdot C_0 \cdot \sin(\varphi_0) + \cancel{\mathrm{e}^{-\delta 0}} \cdot C_0 \cdot \omega_d \cdot \cos(\varphi_0) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Longrightarrow \qquad C_0 = -\frac{U_q}{\sin(\varphi_0)} \quad \text{und} \quad \varphi_0 = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right)$$

# Exkurs: Herleitung der homogenen Lösung im periodischen Fall

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \left(K_1 \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_d t} + K_2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\right)$$

$K_1$ und $K_2$ müssen komplex konjugiert sein, damit $u_{C,\mathrm{h}}$ reell ist!

mit $\quad K_1 = a + \mathrm{j}b \quad$ und $\quad K_2 = a - \mathrm{j}b \quad$ mit $\quad a,b \in \mathbb{R}$

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \left[(a + \mathrm{j}b) \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_d t} + (a - \mathrm{j}b) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\right]$$

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \left[a \cdot \underbrace{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_d t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\right)}_{2\cos(\omega_d t)} + \mathrm{j}b \cdot \underbrace{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_d t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\right)}_{2\mathrm{j}\sin(\omega_d t)}\right]$$

mit $\quad \mathrm{e}^{+\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} = \cos(x) + \mathrm{j}\cancel{\sin(x)} + \cos(x) - \mathrm{j}\cancel{\sin(x)} = 2\cos(x)$

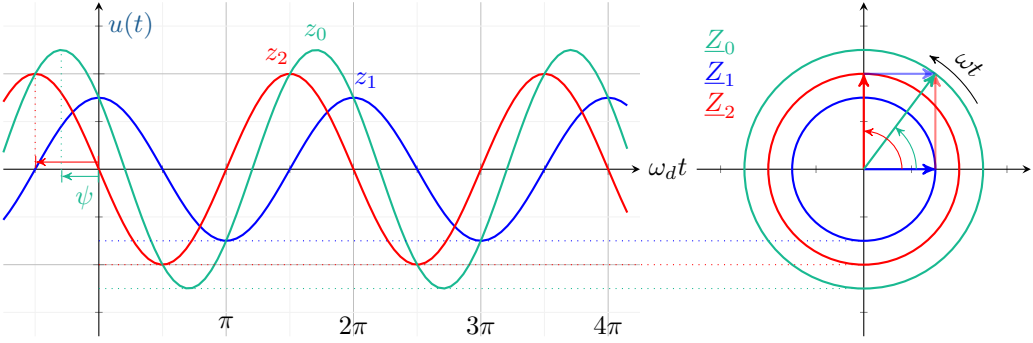
$$\mathrm{e}^{+\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} = \cancel{\cos(x)} + \mathrm{j}\sin(x) - \cancel{\cos(x)} + \mathrm{j}\sin(x) = 2\mathrm{j}\sin(x)$$

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \left[\underbrace{2a}_{C_1} \cdot \cos(\omega_d t) - \underbrace{2b}_{C_2} \cdot \sin(\omega_d t)\right]$$

# Exkurs: Herleitung der homogenen Lösung im periodischen Fall

Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Kreisfrequenz $\omega_d$:

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \Big[ \underbrace{2a}_{C_1} \cdot \cos(\omega_d t) - \underbrace{2b}_{C_2} \cdot \sin(\omega_d t) \Big]$$




$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \qquad \text{mit} \quad \lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{j} \cdot \omega_d$$

# Exkurs: Herleitung der homogenen Lösung im periodischen Fall

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \Big[ \underbrace{2a}_{C_1} \cdot \cos(\omega_d t) - \underbrace{2b}_{C_2} \cdot \sin(\omega_d t) \Big]$$

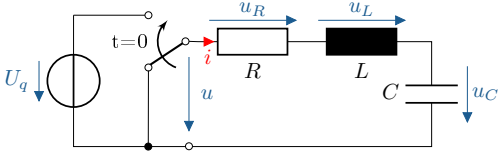
| *Zeitbereich* | | *Polar.* | *Kart.* |
|---|---|---|---|
| $z_1(t) = +C_1 \cdot \cos(\omega_d t)$ | $\Leftrightarrow$ | $\underline{z}_1 = C_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}$ | $\underline{z}_1 = C_1$ |
| $z_2(t) = -C_2 \cdot \sin(\omega_d t)$ | $\Leftrightarrow$ | $\underline{z}_2 = C_2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$ | $\underline{z}_2 = -\mathrm{j} \cdot C_2$ |
| $z_0(t) = z_1(t) + z_2(t)$ | $\Leftrightarrow$ | $\underline{z}_0 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$ | $\underline{z}_0 = C_1 - \mathrm{j} \cdot C_2$ |
| $= C_0 \cdot \cos(\omega_d t + \psi)$ | $\Leftrightarrow$ | $= C_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$ | |

mit $C_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ und $\psi = \arctan\left(-\dfrac{C_2}{C_1}\right), \quad \varphi_0 = \psi + \dfrac{\pi}{2}$

$$z_0(t) = C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0)$$

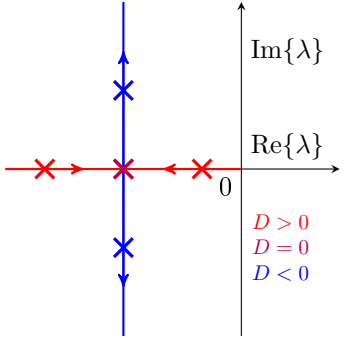
$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \qquad \text{mit} \quad \lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{j} \cdot \omega_d$$

# Exkurs: Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis, Nullstellen




$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}}$$

**Nullstellen im Ortskurvendiagramm:** $\lambda(D)$ für $\delta = \frac{R}{2L} = konst.$




$\mathrm{Re}\{\lambda\} < 0$: $\Rightarrow$ stabil

$D > 0$: NST näher an Im-Achse

$\Rightarrow$ langsamer, dominant

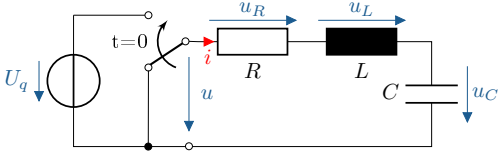
$D = 0$: NST weiter weg von Im-Achse

$\Rightarrow$ schnellster aperiod. Fall

$D < 0$: NST konjugiert, komplex

$\Rightarrow$ schwinungsfähig

# Exkurs: Abklingkonstante, Eigen- und Resonanzkreisfrequenz, Güte




$$\lambda_{1/2} = \underbrace{-\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm \mathrm{j} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d}$$

**Periodischer Fall:** Zusammenhang von $\delta$, $\omega_d$, $\omega_0$ und $Q_\mathrm{S}$:

| | | |
|---|---|---|
| Resonanzkreisfreq.: | $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ | mit $\mathrm{Im}\{\underline{Z}(\omega_0)\} \stackrel{!}{=} 0$ |
| ged. Eigenkreisfreq.: | $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ | ungedämpft gleich $\omega_0$ |
| Güte: | $Q_\mathrm{S} = \frac{X_{L,0}}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ | Maß für Schwingungsfähigkeit |
| Vgl. homo. DGL: | $0 = \ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y$ | linear gedämpfte Schwingung |