FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

Fachhochschule
Südwestfalen
University of Applied Sciences

HRW HOCHSCHULE RUHR WEST
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachhochschule
Dortmund
University of Applied Sciences and Arts

Hochschule Bochum
TECHNIK WIRTSCHAFT GESUNDHEIT

GET it digital

Modul 12:

Schaltvorgänge

Matthias Werle
Tom Bache
Raphael Bechler
Timon Wever

Ein Kooperationsvorhaben
empfohlen durch die

gefördert durch

Ministerium für
Kultur und Wissenschaft
des Landes Nordrhein-Westfalen

Stand: 10. März 2026

Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 12: Schaltvorgänge“ von M. Werle, T. Bache, R. Bechler, T. Wever Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de
Das Werk ist online verfügbar unter:
https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-12-schaltvorgaenge
Projekthomepage:
https://getitdigital.uni-wuppertal.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Ausgleichsvorgänge . . . 1
1.2 Schaltvorgänge . . . 2
1.3 Beispiele für Schaltvorgänge . . . 2
1.4 Vergleich idealer und realer Schalter . . . 3

2 Grundlagen **4**
2.1 Definitionen . . . 5
2.1.1 Erläuterungen . . . 5
2.1.2 Diskussion und Abgrenzung . . . 6
2.2 Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge . . . 7
2.3 Differentialgleichungen . . . 8
2.3.1 Eigenschaften und allgemeine Form . . . 10
2.3.2 Ordnung von Differentialgleichungen . . . 10
2.4 Berechnungsverfahren im Zeitbereich . . . 12
2.4.1 Zerlegung von Ausgleichsvorgängen und Lösung der inhomogenen DGL . . . 12
2.4.2 Berechnung der homogenen Lösung . . . 13
2.4.3 Berechnung der Partikulären Lösung . . . 15
2.4.4 Zusammenfassung . . . 16

3 Berechnung im Zeitbereich **16**
3.1 bei Gleichspannung . . . 16
3.1.1 bei Kapazitäten . . . 17
3.1.2 bei Induktivitäten . . . 20
3.2 bei sinusförmiger Anregung . . . 24
3.2.1 bei Kapazitäten . . . 24
3.2.2 bei Induktivitäten . . . 27
3.3 bei RLC-Serienschwingkreisen . . . 29
3.3.1 Fallunterscheidung . . . 30
3.3.2 Aperiodischer Fall . . . 30
3.3.3 Aperiodischer Grenzfall . . . 31
3.3.4 Periodischer Fall . . . 31
3.4 Exkurse zu Serienschwingkreisen . . . 32
3.4.1 Herleitung der homogenen Lösung im periodischen Fall . . . 33
3.4.2 Ortskurvendiagramm, Nullstellen . . . 34
3.4.3 Abklingkonstante, Eigen- und Resonanzkreisfrequenz, Güte . . . 35

A Übungsaufgaben **37**
A.1 Einschaltverhalten eines RC-Übertragungsgliedes . . . 37
A.2 Einschaltverhalten (DC) eines verlustbehafteten Kondensators . . . 37
A.3 Schaltverhalten einer RL-Serienschaltung . . . 38
A.4 Einschaltverhalten einer RL-Serienschaltung . . . 38
A.5 ET3 Ü8 Schaltverhalten eines RC-Netzwerks . . . 39
A.6 Schaltvorgang bei Wechselspannung . . . 39

B Lösungen zu den Übungsaufgaben **39**
B.1 Einschaltverhalten eines RC-Übertragungsgliedes . . . 39
B.2 Einschaltverhalten (DC) eines verlustbehafteten Kondensators . . . 41
B.3 Schaltverhalten einer RL-Serienschaltung . . . 42
B.4 Einschaltverhalten einer RL-Serienschaltung . . . 43
B.5 ET3 Ü8 Schaltverhalten eines RC-Netzwerks . . . 44
B.6 Schaltvorgang bei Wechselspannung . . . 45

Literaturverzeichnis **47**

Index **48**

1 Einführung in Schaltvorgänge

Schaltvorgänge sind Ausgleichsvorgänge, welche unmittelbar nach dem Schalten in elektrischen Netzwerken auftreten. Wie der Begriff „elektrische Schaltung“ im Deutschen vermuten lässt, spielt das Schalten eine große Rolle in der Elektrotechnik. Selbst elektrische Netzwerke, in denen nicht geschalten wird, werden gemeinhin als Schaltungen bezeichnet.

Schalter finden vielfältig Anwendung unter anderem in der Leistungselektronik, der Informations-, der Kommunikations- und der Regelungstechnik. Dabei kommt es nach jedem effektiven Schalten zu Ausgleichsvorgängen, die mitunter erwünschte oder unerwünschte Effekte hervorrufen können.

In diesem Modul liegt der Fokus auf der Untersuchung dieser Ausgleichsvorgänge.

Lernziele: Einführung

Studierende lernen:

- Schaltvorgänge als nicht-stationäre Zustände nach Schaltaktionen kennen
- Schaltvorgänge im Kontext anderer Ausgleichsvorgänge zu verstehen
- Herausforderungen und Möglichkeiten bei Schaltvorgängen kennen
- das Schaltverhalten von idealen und realen Schaltern zu unterscheiden

1.1 Ausgleichsvorgänge

Ausgleichsvorgänge sind allgemein Vorgänge, in denen ein System nach einer Störung einem Gleichgewichtszustand zustrebt.

Ein Blick in die Physik zeigt, dass Ausgleichsvorgänge auf mannigfaltige Art und Weise in vielen Bereichen vorkommen. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik strebt ein System stets einem Gleichgewichtszustand zu. Demnach kann jeder Vorgang bei entsprechenden Systemgrenzen als Ausgleichsvorgang betrachtet werden. Ein Stückweit lassen sich Schaltvorgänge mittels Analogien zu anderen Ausgleichsvorgängen beschreiben.

Beispiele für Ausgleichsvorgänge sind das Erhitzen einer Flüssigkeit, das Ausschwingen eines Pendels oder der Regelvorgang eines Regelkreises.

Abbildung 12.1: Erhitzen einer Flüssigkeit[1]

[1] Bartolomeo Pinelli, Ausschnitt aus *A Peasant Family Cooking over a Campfire*, Lizenz CC0 1.0 https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81414513

1.2 Schaltvorgänge

Als Schaltvorgänge werden Ausgleichsvorgänge unmittelbar nach dem Schalten bezeichnet. Diese sind Hauptgegenstand des Moduls, wobei hierfür stehts von idealen Schaltern ausgegangen wird.

Abbildung 12.2 zeigt exemplarisch den Zeitverlauf einer Systemgröße $s(t)$ (z.B. Strom oder Spannung) während eines Schaltvorgangs. Zum Vergleich sind für das Zuschalten einer Anregung zwei Fälle dargestellt: einmal für eine Gleichgröße (DC) und einmal für eine Wechselgröße (AC).

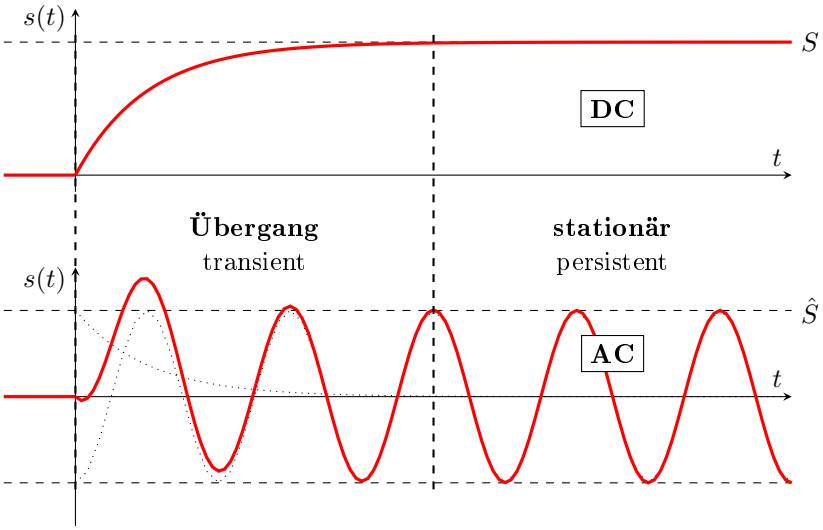


Abbildung 12.2: Vergleich: Ausgleichsvorgang DC, AC

Der dargestellte Schaltvorgang beginnt mit dem Schalten bei $t = 0$ (gestrichelte Grenze, links) und endet mit Erreichen eines stationären Zustands (persistent) (gestrichelte Grenze, mittig). Der stationäre Zustand von $s(t)$ entspricht bei Anregung mit Gleichgröße (DC) ebenfalls einer Gleichgröße (konstant) und bei Anregung mit Wechselgröße (AC) ebenfalls einer Wechselgröße (periodisch).

Der in Abb. 12.2 dargestellte Vorgang beim Übergang (transient) von Schalten bis Erreichen eines stationären Zustands kann hier auch als Ausgleichsvorgang (allgemein), Schaltvorgang (speziell) oder Einschwingvorgang (speziell) bezeichnet werden.

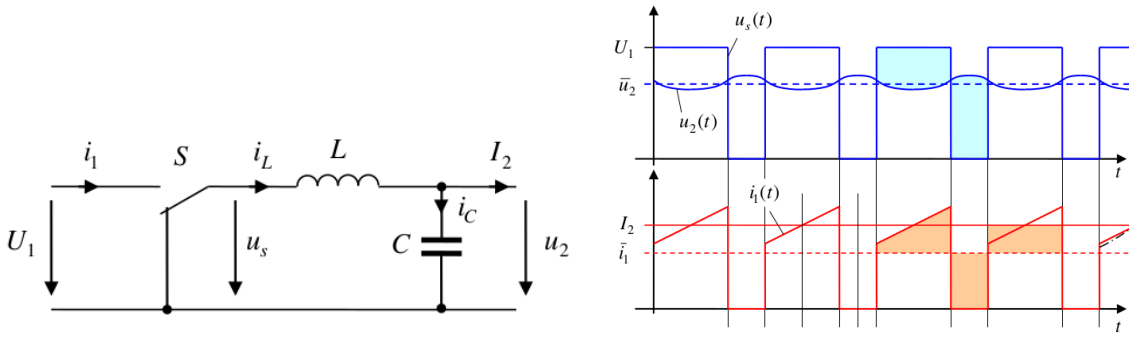
Ausgleichsvorgänge während dem Schalten, wie sie bei realen Schaltern auftreten, werden nicht als Schaltvorgänge bezeichnet und in diesem Modul nicht näher untersucht. Eine kurze Erläuterung findet sich jedoch vollständigkeitshalber in Abschnitt 1.4 beim Vergleich idealer und realer Schalter.

1.3 Beispiele für Schaltvorgänge

Prinzipiell kommt es bei jedem Schalten in elektrischen Netzwerken zu Schaltvorgängen.

Typische Beispiele sind Umrichter (engl. *power converter*) in der Leistungselektronik, welche elektrische Energie in eine andere Form elektrischer Energie umwandeln. Durch gezieltes Schalten von Halbleiterbauelementen (z.B. Transistoren, Thyristoren) kann die Spannung, der Strom oder die Frequenz verändert werden. In jedem Taktzyklus werden Kapazitäten und Indukivitäten abwechselnd geladen und entladen.

Abbildung 12.3a zeigt beispielhaft eine Tiefsetzsteller (Buck-Converter) mit Glättungskondensator. Dieser wandelt eine Gleichspannung U_1 in eine niedrigere Gleichspannung U_2 um. Daneben sind in Abbildung 12.3b die zeitlichen Verläufe von Spannungen und Strömen jeweils am Eingang und am Ausgang des Tiefsetzstellers dargestellt.



(a) Schaltbild eines Tiefsetzstellers (Buck-Converter) (b) Zeitverlauf von $u(t)$ und $i(t)$ am Tiefsetzsteller

Abbildung 12.3: Beispiel: Schaltvorgänge am Tiefsetzsteller[2]

Ohne nähere Rechnung ist erkennbar, dass die Ausgangsspannung auch im stationären Betrieb nicht konstant ist. Die Ausgangsspannung über dem Glättungskondensator schwankt, da sich die Kapazität in jeder Schaltperiode etwas entlädt und wieder auflädt.

Mithilfe der Methoden aus diesem Modul lassen sich solche Schaltvorgänge berechnen und analysieren. Zum besseren Verständnis werden in Kapitel 3 jedoch einfachere Beispiele von Schaltvorgänge ohne periodisches Schalten betrachtet.

Andere Beispiele für Schaltvorgänge sind das Ein- und Ausschalten von Geräten, Analog-Digital- und Digital-Analog-Wandlung, das Aufladen eines Kondensators durch ein Fahrradlicht.

1.4 Vergleich idealer und realer Schalter

Zur Vereinfachung wird in diesem Modul stets von idealen Schaltern ausgegangen. Um die Grenzen dieser Annahme zu verstehen, wird im Folgenden der Unterschied zwischen idealen und realen Schaltern erläutert. Hierfür wird wie im Schaltbild in Abbildung 12.4 gezeigt ist, die Schalterspannung über einem Schalter betrachtet. Der Schalter ist hierfür an eine lineare Gleichspannungsquelle mit Spannung U_q angeschlossen.

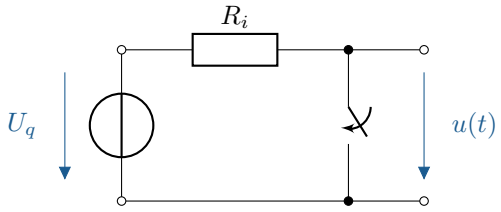


Abbildung 12.4: Schaltbild, Schalterspannung

Abbildung 12.5 zeigt die Schalterspannung im Durchlass- und im Sperrbetrieb und in den Übergangsphasen beim Öffnen oder Schließen des Schalters. Links ist der Spannungsverlauf für einen idealen Schalter dargestellt, rechts für einen realen Schalter.

[2] Quelle: Schaltbild und Zeitverlauf (modifiziert, gekürzt): Joachim Böcker, GET2, Universität Paderborn

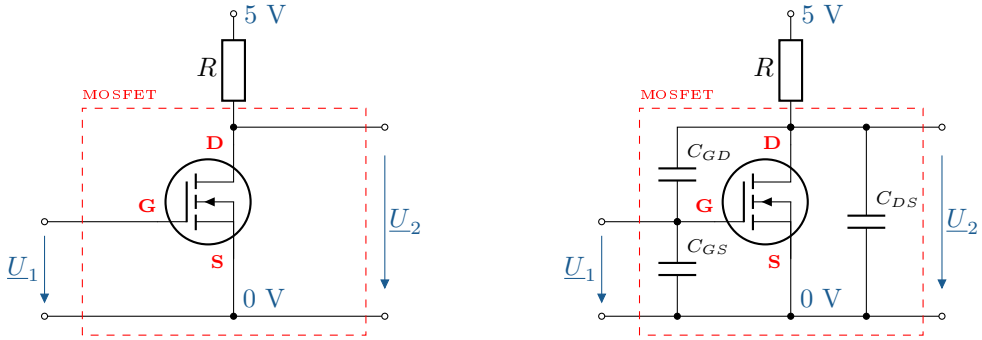
(a) Spannung bei idealem Schalter (b) Spannung bei realem Schalter

Abbildung 12.5: Vergleich: Schaltverläufe bei idealem und realem Schalter

Ein idealer Schalter wechselt beim Schalten instantan und verlustlos von einem leitenden Zustand ($R = 0$) zu einem sperrenden Zustand ($G = 0$) oder umgekehrt wie in Abbildung 12.5a dargestellt ist. Ein realer Schalter hingegen leitet oder sperrt nicht instantan wie in Abb. 12.5b vereinfacht dargestellt ist. Stattdessen treten Latenzen und Verluste auf. Im Durchlassbetrieb liegt immernoch eine kleine Spannung an (Durchlasswiderstand $R > 0$) und im Sperrbetrieb fließt immernoch ein kleiner Strom (Sperrleitwert $G > 0$). Dadurch kommt es zu Verlusten im Schalter, insbesondere während der Übergangsphasen, wenn sowohl Spannung als auch Strom anliegen.

Die Latenzen und Verluste realer Schalter resultieren aus deren resistiven, induktiven und kapazitiven Eigenschaften. Aufgrund dieser Eigenschaften ist Schalten real betrachtet - schalterintern - immer mit Ausgleichsvorgängen verbunden. In der Praxis werden solche Effekte, wenn unerwünscht, als parasitär bezeichnet.

Abbildung 12.6 zeigt exemplarisch einen MOSFET als Schalter zur Veranschaulichung. Zum Vergleich ist der MOSFET einmal ideale (ohne) und einmal real (mit kapazitiven Effekten) dargestellt.



(a) MOSFET, ohne Kapazitäten (ideal) (b) MOSFET, inkl. Kapazitäten (real)

Abbildung 12.6: Vergleich: Schaltung mit MOSFET, ohne (ideal) und mit kapazitiver Effekte (real)

Die kapazitiven Effekte zwischen den Anschlüssen des MOSFETs führen zu einer Verzögerung beim Schalten, da die jeweiligen Kapazitäten während des Schaltens erst geladen beziehungsweise entladen werden müssen. Das MOSFET-Beispiel dient lediglich zur Veranschaulichung der Unterschiede zwischen idealen und realen Schaltern. Ausgleichsvorgänge während Schaltaktionen werden in diesem Modul nicht weiter betrachtet. Mit Schaltvorgängen sind immer die Ausgleichsvorgänge nach dem Schalten gemeint.

2 Grundlagen der Berechnung von Schaltvorgängen

Grundlage der Berechnung von Schaltvorgängen sind Differentialgleichungen (DGL).

Die Aufstellung der Kirchhoffschen Regeln bei Schaltungen mit Energiespeichern führt zu DGL von Spannungen an beziehungsweise Strömen in den jeweiligen Komponenten. Das bedeutet, dass die

jeweiligen Momentanwerte von Spannungen und Strömen nicht ausreichen, um den Zustand des Systems zu beschreiben.

Die Zeitverläufe von Spannungen und Strömen während Schaltvorgängen lassen sich durch Lösung ihrer jeweiligen DGL bestimmen.

Lernziele: Grundlagen

Studierende lernen:

- grundlegende Begriffe kennen und verstehen (Definitionen)
- Berechnungsmethoden im Zeit- und Bildbereich (Laplace) kennen
- DGLen für Schaltungsgrößen von LZI-Schaltungen aufzustellen
- DGL-Eigenschaften aus Schaltungseigenschaften abzuleiten
- Zeitverläufe bei Schaltvorgängen zu bestimmen (DGLen zu lösen)

2.1 Definitionen

Tabelle 12.1 zeigt eine Übersicht wichtiger Begriffe mit Kurzform der hier verwendeten Definitionen. Bestimmte Begriffe werden in den folgenden Abschnitten genauer erläutert und diskutiert.

Speziell die hier verwendeten Definitionen für Transienten, Ausgleichs-, Einschwing- und Schaltvorgänge werden in Abschnitt 2.1.2 in Abgrenzung zur Definition in anderen Quellen erläutert und die Wahl der hier getroffenen Definition begründet.

Die Tabelle dient als Referenz für die Verwendung der Begriffe in diesem Modul und kann nach Art eines Glossars verwendet werden.

2.1.1 Erläuterungen

ZUSTÄNDE:

ausgeglichen: Beschreibt einen stationären Zustand nach einem Ausgleichsvorgang.

eingeschwungen: Beschreibt einen statiönären Zustand direkt nach einem Einschwingvorgang. Der Begriff wird in der Regel auch für stationäre Zustände nach Ausgleichsvorgängen verwendet, bei denen keine Schwingung auftritt, und zudem unabhängig von der Energieflussrichtung.

stationär: Zustandsbeschreibung für zeitlich konstante Größen (z.B. bei Gleichspannungsversorgung) oder zeitlich periodische Größen (z.B. bei Wechselspannungspannungs) [2, S. 362]

GRÖSSEN:

Die Größen **Abklingkonstante**, **Dämpfungskonstante**, **Eigenfrequenz**, **Resonanzfrequenz** und **Zeitkonstante** sind wichtige Kenngrößen für die Beschreibung des Schwingverhaltens von Systemen. Sie sind in Kapitel 3.3 am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises genauer erläutert.

FÄLLE:

Die Fallunterscheidung von **aperiodischem Fall**, **aperiodischem Grenzfall**, **periodischem Fall** bei linearen, zeitinvarainten, schwingungsfähigen Systemen ist in Kapitel 3.3.1 am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises erläutert.

Tabelle 12.1: Gruppierte Begriffe mit Definitionen in Kurzform

G.	Begriffe	Definitionen
allg.	Schalten	„durch Betätigen eines Schalters in einen (Betriebs)zustand versetzen“[1]
	Schalter	Komponente, hier zum öffnen oder schließen einer elektr. Verbindung
Eigenschaften	harmonisch[1]	sinusförmig, beschreibt Schwingung der Form: $y(t) = \hat{X} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
	periodisch[1]	„in gleichen Abständen, regelmäßig [auftretend, wiederkehrend]“[1]
	zeitinvariant[1]	invariant/unveränderlich über die Zeit
	gewöhnlich[2]	Ableitung(en) nach einer unabhängigen Variable (z.B. Zeit t), Vgl. partiell
	homogen[2]	Form gewöhnlich: $\sum a_i(t) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} f_i(y(t)) \stackrel{!}{=} 0$ mit Störfunktion $b = 0$
	linear[2]	Form gewöhnlich: $\sum a_i(t) \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t) = b(t)$ d.h. mit $\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y(t)$ linear
	Ordnung[2]	n [1] d.h. höchstens Ableitung der Ordnung n in DGL
Größen	Abklingkonst.	δ [s^{-1}] Maß für die Dämpfung linear gedämpfter Schwingungssysteme
	Dämpfungskonst.	δ [s^{-1}] synonym zu Abklingkonstante
	Eigenfreq.	$f_{0/d}$ [Hz] Freq. mit der ein System (un/)gedämpft selbst schwingen kann
	Resonanzfreq.	f_0 [Hz] Freq. bei der ein System in Resonanz tritt, gleich unged. Eigenfreq.
	Zeitkonstante	τ [s] Maß für Steilheit von Exponentialverläufen der Form $\mathrm{e}^{-t/\tau}$
Vorgänge	Ausgleichsvorg.	Vorgang in einem System, dass einen stationären Zustand anstrebt
	Ausschwingvorg.	Ausgleichsvorgang, schwingend, exergon (spontan)
	Einschwingvorg.	Ausgleichsvorgang, schwingend, endergon (nicht spontan)
	Schaltvorg.	nicht stationärer Zustand nach Schalten
	Transiente	Ausgleichsvorgang (synonym), Vgl. transient (adj.)
Zustände	eingeschwungen	stationär nach Einschwingvorgang
	persistent	stationär von Lat. *persistere*, Dt. verharren, Ggt. von transient
	stationär	zeitlich konstante/periodische Größen (z.B. bei DC/AC) [2, S. 362]
	transient	übergangsweise von Lat. *transire*, Dt. (hin)übergehen, Ggt. von persistent

[1] allgemein [2] bezogen auf DGL

2.1.2 Diskussion und Abgrenzung

Dieser Abschnitt ist für das Verständnis der Modulinhalte nicht zwingend erforderlich und als Ergänzung zu verstehen. Da einige der in Tabelle 12.1 aufgeführten Begriffe in der Literatur unterschiedlich verwendet werden, ist die Wahl der Definitionen hier begründet und abgegrenzt.

Verlinkung deutsch- und englischsprachiger Wikipediaartikel [Stand 15.11.2024]:

- dt. Ausgleichsvorgang ↔ engl. transient state
- dt. Einschwingvorgang → engl. transient response → dt. Transiente
- dt. Transiente ↔ engl. transient response

VORGÄNGE:

Ausgleichsvorgang, m.

- Weißgerber: Vorgang von stationärer Zustand nach Eingriff bis stationärer Zustand
- Hagmann: Vorgang ab Veränderung bis stationär
- hier, angelehnt an Hagemann: Vorgang wenn bestimmter stationärer Zustand angestrebt wird

Wie Hagmann, nur dass quasi „unterbrochene“ Ausgleichsvorgänge ebenfalls als Ausgleichsvorgänge bezeichnet werden. Diese Definition schließt Anwendungsfälle in der Leistungselektronik wie bei Hoch- und Tiefsetzstellern unter der Annahme von realen Bauteilen ($R > 0$) mit ein.

Schaltvorgang, m.

- Weißgerber: Ausgleichsvorgang nach Schalten[3, S. 1]
- Hagmann: Synonym Ausgleichsvorgang, Unmittelbar nach Schaltungsänderung[sic!], geht über in stationären Zustand[2, S. 362]
- hier: Ausgleichsvorgang ausgelöst durch Schalten (angelehnt an Hagmann)

In diesem Modul bezieht sich der Begriff Schaltvorgang nur den Vorgang nach(!) dem Schalten, welche durch dieses ausgelöst werden. Mit der hier verwendeten Definition lassen sich vom Schalten unabhängige Ausgleichsvorgänge ausschließen.

Ausschwingvorgang, m.

Bezeichnet hier exergone Ausgleichsvorgänge, das heißt Ausgleichsvorgänge, die sich bei positiver Netto-Energieabfuhr vollziehen. Entsprechend Wortbedeutung im wörtlichen Sinn, ist ein Ausschwingvorgang das Gegenstück zum Einschwingvorgang.

Einschwingvorgang, m.

Bezeichnet hier im engeren Sinn endergone Ausgleichsvorgänge, das heißt Ausgleichsvorgänge, die sich bei positiver Netto-Energiezufuhr vollziehen. Wird üblicherweise wie hier im weiteren Sinn synonym für alle Ausgleichsvorgänge verwendet. Bezieht sich hier wie üblich sowohl auf Abläufe, die schwingend als auch nicht schwingend verlaufen. [Vgl. der Worte schwingen, Schwung] Die Definition ist gewählt, um eine feinere Klassifizierung möglicher Ausgleichsvorgänge zu erleichtern.

Transiente, w.

Hier synonym zu Ausgleichsvorgang betrachtet, frei übersetzbar mit „Übergang“aus dem Lateinischen. Vergleich transient (adj.) von Lat. *transire* Dt. (hin-)über(/durch)-gehen, Gegenteil von persistent (adj.) von Lat. *persistere* Dt. verharren.

2.2 Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge

Zur Berechnung von Schaltvorgängen stehen prinzipiell zwei Methoden zur Verfügung. Beide Methoden basieren auf der Lösung der Differentialgleichung (DGL) einer Schaltung.

Die Lösung der DGL erfolgt:

- im Zeitbereich (durch Zerlegung in flüchtigen und eingeschwungenen Zustand) **oder**
- im Bildbereich (mit Laplace-Transformation).

Abbildung 12.7 stellt den Ablauf zur Berechnung im Zeit- und im Bildbereich zum Vergleich als Flussdiagramm gegenüber.

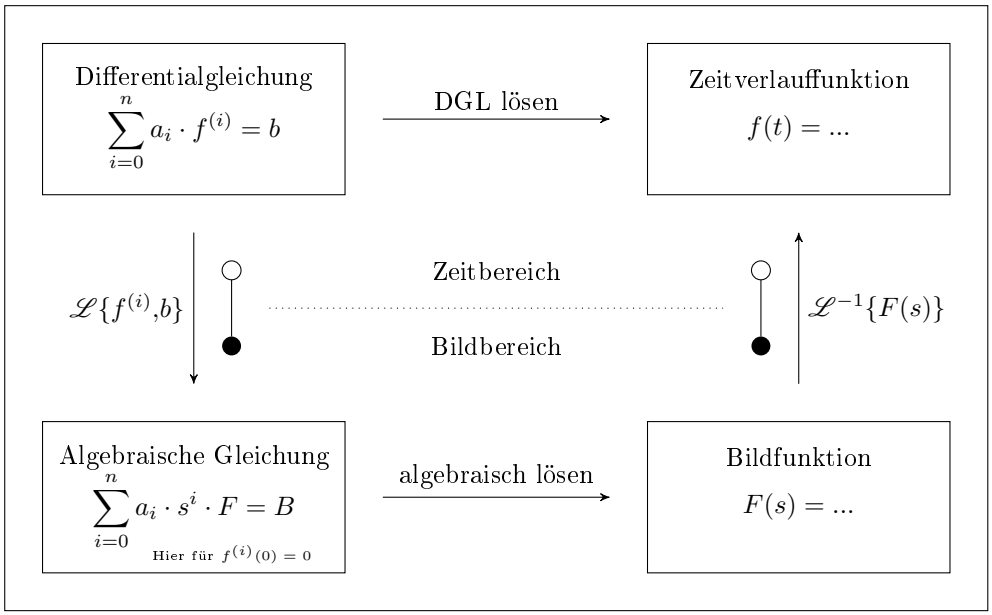


Abbildung 12.7: Flussdiagramm, Berechnungsmethoden für Schaltvorgänge

Die Benennung und Darstellung beider Methoden sind angelehnt an [3, S. 51], finden sich jedoch in ähnlicher Form auch in anderen Lehrbüchern zur Elektrotechnik, Regelungstechnik und Systemtheorie.

Die Lösung der DGL im Zeitbereich ist die allgemein anwendbare Methode und wird in diesem Modul ausführlich behandelt. Der Rechenaufwand kann je nach Komplexität der DGL stark variieren. Die Methode basiert auf der Zerlegung in einen flüchtigen und einen eingeschwungenen Zustand.

Die Lösung der DGL im Bildbereich mithilfe der Laplace-Transformation ist eine spezielle Methode, die bei linearen, zeitinvarianten Systemen mit Energiespeichern angewendet werden kann. Sie bietet sich bei verschwindenden Anfangsbedingungen (Vgl. Kapitel 2.4) an. In einigen Fällen kann die Methoden den Rechenaufwand reduzieren, da die transformierte DGL algebraisch gelöst werden kann. Die Methode wird in diesem Modul nicht weiter behandelt.

Die Idee in den Bildbereich zu wechseln findet sich wieder in Abschnitt 2.3 bei der Aufstellung einer DGL und in Abschnitt 2.4.3 bei der Anwendung komplexer Wechselstromrechnung (Vgl. Modul 7) zur Bestimmung eingeschwungener Zustände.

2.3 Differentialgleichungen

Zu Beginn der Berechnung von Schaltvorgängen steht die Aufstellung der Differentialgleichungen (DGL). Die DGL für Spannungen und Ströme basieren basieren prinzipiell auf den Kirchhoffschen Regeln:

$$\text{Knotenregel:} \quad \sum_{j=1}^{n} i_j = 0 \qquad \text{mit } n \text{ Stromzweigen im Knoten} \tag{12.1}$$

$$\text{Maschenregel:} \quad \sum_{k=1}^{m} u_k = 0 \qquad \text{mit } m \text{ Teilspannungen in Masche} \tag{12.2}$$

und den folgenden Strom-Spannungs-Beziehungen (Komponenten-Gl.) für R, L und C.:

$$\text{Widerstand:} \qquad u_R(t) = R \cdot i_R(t) \tag{12.3}$$

$$\text{Induktivität:} \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) \tag{12.4}$$

$$\text{Kapazität:} \qquad i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(t) \tag{12.5}$$

In welcher Reihenfolge die Gleichungen am geschicktesten aufgestellt, umgeformt und ineinander eingesetzt werden ist abhängig von der jeweiligen Schaltungstopologie und der Zielgröße.

Ähnlich wie beim Lösen von DGLen (Vgl. Kap. 2.2 und Abb. 12.7 zu Berechnungsmethoden) kann auch beim Aufstellen der DGLen sowohl im Zeitbereich als auch im Bildbereich vorgegangen werden. Die Methode im Zeitbereich ist die in diesem Modul ausführlicher behandelte Methode. Abbildung 12.8 zeigt schematisch beide Vorgehensweisen im Vergleich.

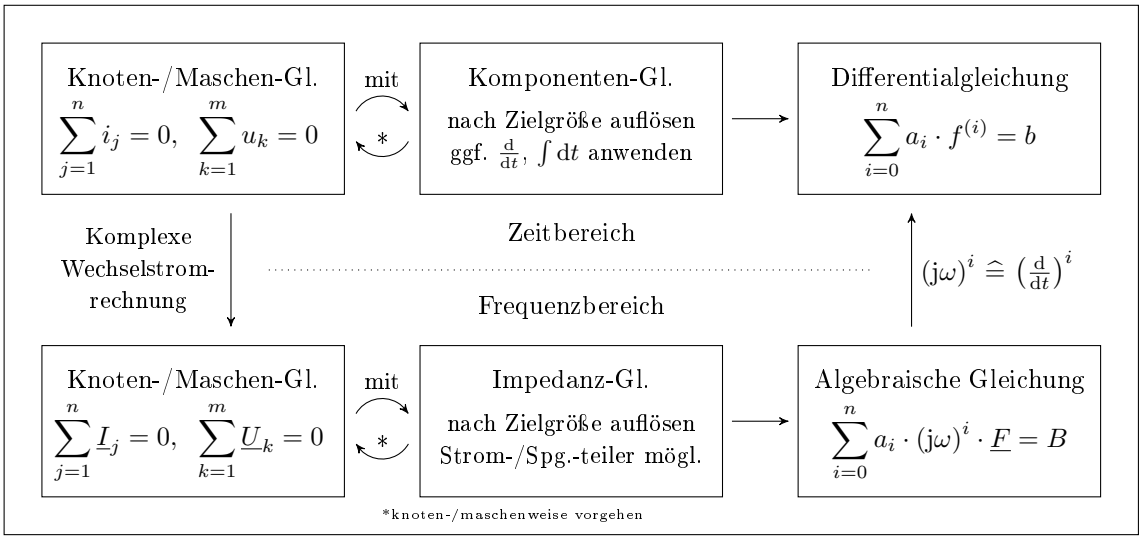


Abbildung 12.8: Flussdiagramm, Aufstellungsmethoden für Differentialgleichungen

Bei einfachen Schaltungen mit einer einzelnen Masche (reine Reihenschaltung) oder zwei einzelnen Knoten (reine Parallelschaltung) lassen sich die Differentialgleichungen direkt aus den Kirchhoffschen Regeln und den Bauteilgleichungen aufstellen (Zeitbereich). Gegebenenfalls muss die aufgestellte Gleichung noch differenziert werden, um die benötigten Ableitungen zu erhalten (beziehungsweise um Integrale zu entfernen). Bei komplexeren Netzwerken ist der Rechenaufwand deutlich größer.

Eine Möglichkeit den Rechenaufwand zu minimieren, ist mit Methoden der komplexen Wechselstromrechnung zu arbeiten (Bildbereich). Der Ansatz funktioniert ebenso für DC-Schaltungen, da nicht wirklich mit Frequenzen gerechnet wird. Sinn und Zweck ist die Aufstellung der DGL durch algebraische Umformung der komplexen Kirchhoffschen Regeln. Hierbei werden die Schaltungselemente durch Impedanzen respektive Admittanzen ersetzt und die zu untersuchende Größe beispielsweise durch einen komplexen Spannungsteilers bestimmt. Die Umformung zur DGL geschieht durch Rücktransformation der komplexen Größen in den Zeitbereich. $\mathrm{j}\omega$ wird dabei durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ersetzt.

Der Vorteil des Ansatzes im Bildbereich ist, dass komplexe Spannungs- und Stromteiler anwendbar sind. Dadurch bietet sich der Ansatz vor allem bei gemischten Reihen- und Parallelschaltungen an.

Ein ähnlicher Ansatz wäre das Maschenstromverfahren in Matrixform mit komplexen Größen. [Vgl. Modul 7] Dieses wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter betrachtet.

2.3.1 Eigenschaften und allgemeine Form

In allen hier untersuchten Schaltungen kommen ausschließlich folgende Komponenten zum Einsatz: Kapazitäten, Induktivitäten, ohmsche Widerstände, ideale Spannungsquellen, ideale Stromquellen, ideale elektrische Leiter und ideale Schalter. In den Schaltungen kommen keine weiteren Bauteile wie z.B. Transistoren, Dioden oder Operationsverstärker vor.

Zur Berechnung von Schaltvorgängen wird in diesem Modul stets von idealen Bauteilen in isothermen, homogenen, isotropen Medien ausgegangen. Weitere Einflüsse wie Temperaturabhängigkeiten, nichtlineare Effekte oder Ähnliches werden nicht betrachtet.

Die aufgezählten Komponenten sind alle **linear** und **zeitinvariant**. Die gleichen Eigenschaften gelten auch für Schaltungen, die sich nur diesen Komponenten zusammen setzen. Das heißt, es handelt sich um lineare, zeitinvariante Systeme (LZI-Systeme). Die Zeitinvarianz für Schalter gilt dabei eingeschränkt (abschnittsweise) für alle Zeiträume außerhalb von Schaltzeitpunkten und uneingeschränkt für alle anderen Komponenten.

Aus den Eigenschaften der Schaltungen lassen sich folgende für Eigenschaften der DGLs ableiten:

- **gewöhnlich** (nur abhängig von einer Variable, hier der Zeit)
- **linear** (Linearität der Schaltungselemente)
- **konst. Koeffizienten** $a_i = konst.$ (Zeitinvarianz der Schaltungselemente)
- **inhomogen** $b(t) \neq 0$ (bei Anregung durch Spannungs- oder Stromquellen)
- **homogen** $b(t) = 0$ (ohne Anregung durch Spannungs- oder Stromquellen)

Für eine betrachtete Schaltungsgröße y in Abhängigkeit der Zeit t ergibt sich daraus die folgende Form für gewöhnliche, inhomogene, lineare DGLs mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} = b(t) \tag{12.6}$$

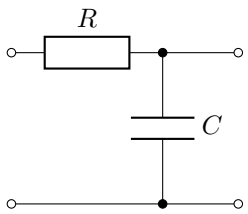
$$\text{mit} \quad a_i, b(t) \in \mathbb{R}; \quad i, n \in \mathbb{N}$$

Mit der **Ordnung** n, der **Störfunktion** $b(t)$ und den **konstanten Koeffizienten** a_i.

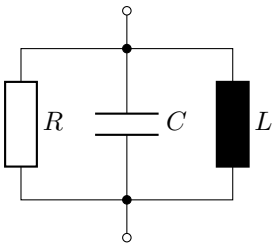
2.3.2 Ordnung von Differentialgleichungen

Der Aufbau einer Schaltung bestimmt die Form der Differentialgleichungen (DGLs) zur Beschreibung ihrer Systemgrößen (Ströme, Spannungen). Die Ordnung der DGL entspricht direkt der Anzahl an Energiespeichern, welche nicht zu einem Energiespeicher zusammengefasst werden können.[3, S. 4]

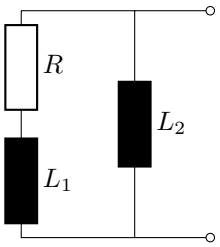
Abbildung 12.9 zeigt exemplarisch mehrere Schaltungen und die Ordnung der zugehörigen DGL.



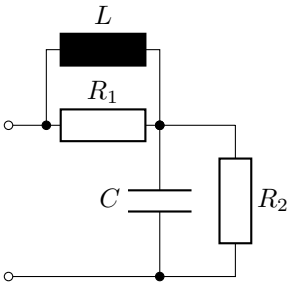
1 Energiespeicher → DGL 1. Ord.



2 Energiespeicher → DGL 2. Ord.



2 Energiespeicher → DGL 2. Ord.



2 Energiespeicher → DGL 2. Ord.

Abbildung 12.9: Beispiel Schaltungen und Ordnung der Differentialgleichung

Die Ordnung der DGL bestimmt die Anzahl der Konstanten in der allgemeinen Lösung der DGL.

2.4 Berechnungsverfahren im Zeitbereich

Die Berechnung von Schaltvorgängen im Zeitbereich basiert auf der Lösung der Differentialgleichungen (DGLs) für die Schaltungsgrößen. Allgemein exestieren für DGLs unendlich viele Lösungen.

Wichtig für die Eingrenzung der allgemeinen Lösung ist die Kenntnis der **Anfangsbedingungen** (AB). Die AB sind Werte von Schaltungsgrößen zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 während des Beobachtungszeitraums (Schaltvorgang). Dabei handelt es sich beiselsweise um Spannungen oder Ströme einzelner Bauteile oder um deren Ableitungen.

Für DGL n-ter Ordnung sind n AB notwendig, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Sind die AB nicht explizit gegeben, können diese gegebenenfalls durch die Schaltungstopologie und den Zustand unmittelbar vor dem Schalten hergeleitet werden. Dabei ist zu unterscheiden, welche Schaltungsgrößen springen können und welche stetig sind.

Da es sich bei Induktivitäten und Kapazitäten um Energiespeicher handelt, ist deren Verhalten zu einem Zeitpunkt t abhängig von der bis dahin zu-/abgeführten Energie.

In kurzer Gegenüberstellung gilt mit $E = \int p(t)\,\mathrm{d}t = \int u(t) \cdot i(t)\,\mathrm{d}t$ und den Gl. 12.4 und 12.5:

$$\textbf{Kapazität:} \qquad E_{el} = \frac{1}{2} C \cdot u^2 \qquad \Rightarrow \qquad u = stetig \qquad \text{(Speicher el. Energie)} \tag{12.7}$$

$$\textbf{Induktivität:} \qquad E_{mag} = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \qquad \Rightarrow \qquad i = stetig \qquad \text{(Speicher mag. Energie)} \tag{12.8}$$

Da Energie sich nur mit endlicher Geschwindigkeit bewegen kann, gilt **Stetigkeit** für u_C und i_L:

$$u_{C,t-} = u_{C,t+} \qquad\qquad i_{L,t-} = i_{L,t+} \tag{12.9}$$

$$\text{mit} \quad \lim_{\pm\infty \to t} u_C(t) = u_{C,t\pm} \qquad\qquad \lim_{\pm\infty \to t} i_L(t) = i_{L,t\pm} \tag{12.10}$$

Das bedeutet, dass die Spannung einer Kapazität ebenso wie der Strom einer Induktivität unmittelbar vor dem Schalten gleich groß ist wie zu Beginn des folgenden Schaltvorganges.

2.4.1 Zerlegung von Ausgleichsvorgängen und Lösung der inhomogenen DGL

Der sich ergebende Zeitverlauf einer Größe $y(t)$ kann während eines Ausgleichsvorgangs zerlegt werden in einen **flüchtigen Zustand** y_f und in einen **eingeschwungenen Zustand** y_e.

$$y(t) := y_\mathrm{f}(t) + y_\mathrm{e}(t) \tag{12.11}$$

Der eingeschwungene Zustand y_e beschreibt den stationäre Zustand, den die Größe y anstrebt. Der flüchtige Zustand y_f, auch freier Zustand genannt, repräsentiert den abklingenden Teil von y:

$$\lim_{t\to\infty} y_\mathrm{e}(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) \qquad\qquad y_\mathrm{e} = \text{stationär} \tag{12.12}$$

$$\lim_{t\to\infty} y_\mathrm{f}(t) = 0 \qquad\qquad y_\mathrm{f} = y - y_\mathrm{e} \tag{12.13}$$

Abbildung 12.10 zeigt exemplarisch einen Ausgleichsvorgang mit Zerlegung einer Größe $y(t)$ in einen flüchtigen und eingeschwungenen Zustand. Die Darstellung entspricht dem Spannungsverlauf einer Kapazität beim Laden mit Gleichspannung über einen ohmschen Widerstand wie in Beispiel 12.2.

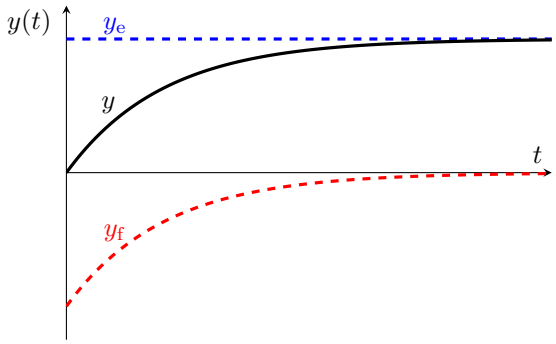


Abbildung 12.10: Ausgleichsvorgang zerlegt in eingeschwungenen und flüchtigen Zustand

Da die Größe $y(t)$ nach Gleichung 12.12 für $t \to \infty$ in $y_e(t)$ übergeht, muss $y_e(t)$ ebenfalls die DGL aus Gleichung 12.6 inklusive Störterm b erfüllen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i(t)}{\mathrm{d}t^i} y_\mathrm{e} = b(t) \tag{12.14}$$

Ziehen wir die DGL für y_e aus Gl. 12.14 von der allgemeinen inhomogenen DGL aus Gl. 12.6 ab, erhalten wir mit der Zerlegung nach Gl. 12.11 die homogene DGL für den flüchtigen Zustand:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i(t)}{\mathrm{d}t^i} y_\mathrm{f} = 0 \tag{12.15}$$

Mathematisch entspricht die Zerlegung des Zeitverlaufs $y(t)$ in einen flüchtigen und eingeschwungenen Zustand der Zerlegung der **Lösung der inhomogenen DGL** y in die **Lösung der homogenen DGL** y_h (ohne Störterm) und in eine **partikuläre Lösung** y_p der inhomogenen DGL mit:

homogene Lösung	$y_\mathrm{h} = y_\mathrm{f}$	flüchtiger Zustand	(12.16)
partikuläre Lösung	$y_\mathrm{p} = y_\mathrm{e}$	eingeschw. Zustand	(12.17)

Die Zerlegung von Ausgleichsvorgängen in einen eingeschwungenen und einen flüchtigen Zustand findet sich in ähnlicher Form in den Lehrbüchern von Albach[4], Hagmann[2] und Weißgerber[3].

2.4.2 Berechnung der homogenen Lösung

Für die Lösung von gewöhnlicher, linearer, homogener DGLen mit konstanten Koeffizienten der Form:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} y_\mathrm{h} = 0 \tag{12.18}$$

wird in der Regel der Ansatz einer Exponentialfunktion verwendet:

$$y_\mathrm{h}(t) = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{12.19}$$

Dabei ist K eine Konstante und λ die Lösung des charakteristischen Polynoms und wird auch als **Eigenwert** bezeichnet. Durch Einsetzen des Exponential-Ansatzes in 12.18, Differenzieren und Aus-

klammern:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \\ \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \lambda^i\right) K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} &= 0\end{aligned} \tag{12.20}$$

kann das **charakteristische Polynom** aufgestellt werden:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \lambda^i = 0 \tag{12.21}$$

Die maximale Anzahl an Eigenwerten ist gegeben durch die Ordnung einer DGL. Da die Koeffizienten a_i reell sind, müssen die Eigenwerte λ_i ebenfalls reell sein, oder paarweise komplex konjugiert.

Bedingung: Um die homogene Differentialgleichung in Gleichung 12.18 zu erfüllen, muss der Realteil aller Eigenwerte negativ sein $\mathrm{Re}\{\underline{\lambda}_i\} < 0$. Nur dann konvergieren die Exponentialterme aus dem Ansatz in Gleichung 12.19 für $t \to \infty$.

Die **allgemeine homogene Lösung** y_h einer DGL n-ter Ordnung ist die Linearkombination von n linear unabhängigen Lösungen der homogenen DGL.

Die Form der Lösung hängt davon ab, ob es sich um unterschiedliche Eigenwerte, gleiche Eigenwerte (Mehrfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms) oder paarweise komplex konjugierte Eigenwerte handelt.

Sind alle Eigenwerte λ_i verschieden, ergibt sich die homogene Lösung zu:

$$y_\mathrm{h}(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot \mathrm{e}^{\lambda_i t} \qquad \text{für} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \;\forall\; i,j \tag{12.22}$$

Bei paarweise komplex konjugierten Eigenwerten kann diese Lösung umformuliert werden. [Herleitung in Abschnitt 3.4.1.] Für $\lambda_1 = \lambda_2^* = a + \mathrm{j}b \in \mathbb{C}$ ergibt sich für die homogene Lösung:

$$\begin{aligned}y_\mathrm{h}(t) &= K_1 \cdot \mathrm{e}^{a \cdot t} \cdot \cos(b \cdot t) + K_2 \cdot \mathrm{e}^{a \cdot t} \cdot \sin(b \cdot t) \\ &= C_0 \cdot \mathrm{e}^{a \cdot t} \cdot \cos(b \cdot t + \varphi_0)\end{aligned} \tag{12.23}$$

Sind alle Eigenwerte λ_i gleich ergibt sich die homogene Lösung zu:

$$y_\mathrm{h}(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot t^{i-1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \text{für} \quad \lambda = \lambda_i \;\forall\; i \tag{12.24}$$

Bei gemischten Nullstellen ergibt sich die Lösung aus einer Kombination der obigen Lösungen wie in Beispiel 12.1 gezeigt ist.

Beispiel 12.1: Linear unabhängige Lösungen einer DGL

Dieses Beispiel ist nahezu unverändert übernommen aus [4, S. 241]. Gesucht ist die allgemeine Lösung der folgenden homogenen DGL 5. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}t^5} y(t) + 7\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} y(t) + 26\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} y(t) + 62\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y(t) + 8\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) + 75 y(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^5 + 7 \cdot \lambda^4 + 26 \cdot \lambda^3 + 62 \cdot \lambda^2 + 85 \cdot \lambda + 75 = 0$$

besitzt eine einfache und zwei doppelte, konjugierte, komplexe Nullstellen:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -1 + 2\mathrm{j}, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -1 - 2\mathrm{j}$$

Mit den Ansätzen aus Gl. 12.22, 12.23 und 12.24 ergibt sich die allgemeine Lösung zu:

$$y_\mathrm{h}(t) = K_1 \cdot \mathrm{e}^{-3t} + (K_2 + K_3 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-t} \sin(2t) + (K_4 + K_5 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{-t} \cos(2t)$$

2.4.3 Berechnung der Partikulären Lösung

Für die Berechnung einer partikulären Lösung y_p einer inhomogenen DGL können verschiedene Methoden gewählt werden. Eine Möglichkeit ist einen Lösungsansatz ähnlich der Anregung zu wählen.

Speziell für Schaltvorgänge gilt, dass y_p dem eingeschwungenen Zustand entspricht wie in Abs. 2.4.1 hergeleitet wurde. Daraus folgt für lineare, zeitinvariante Schaltelementen:

- Bei DC-Anregung (Gleichgrößen) ist die partikuläre Lösung ebenfalls eine Gleichgröße
- Bei AC-Anregung (Wechselgrößen) ist die partikuläre Lösung ebenfalls eine Wechselgröße

Die Bestimmung kann durch Methoden der statischen Netzwerkberechnung erfolgen. Hierfür reichen die Kirchhoffschen Regeln, die Gleichungen für die Bauelemente R, L und C und den daraus resultierenden Strom- und Spannungsteilerregeln. Für Wechselgrößen werden die komplexen Wechselstrom-Äquivalente der aufgezählten Methoden verwendet.

Transformation von DGLen sinusförmiger Größen in den komplexen Zahlenraum:

Da bei AC-Anregung die DGL 12.14 für den eingeschwungenen Zustand für Wechselgrößen gilt, kann die DGL in den komplexen Zahlenraum transformiert werden. Das Vorgehen entspricht der Transformation der differentiellen Strom- und Spannungsbeziehungen für R, L und C zu deren komplexen Strom- und Spannungsbeziehungen anhand deren jeweiligen Impedanz $\underline{Z}$ respektive Admittanz $\underline{Y}$.

Eine sinusförmige Größe $y(t)$ mit Amplitude $\hat{Y}$ und einem Nullphasenwinkel φ lässt sich mit komplexem Amplitudenzeiger (Phasor) $\underline{\hat{Y}}$ wie folgt beschreiben [Vgl. Modul 7]:

$$y(t) = \hat{Y} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{Y}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\hat{Y}} = \hat{Y} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Ableitungen nach der Zeit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ werden im komplexen Zahlenraum durch $\mathrm{j}\omega$ ersetzt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = \hat{Y} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{j}\omega \cdot \underline{\hat{Y}} = \hat{Y} \cdot \omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Der Faktor $\mathrm{j}\omega$ entspricht rücktransformiert dem Vorfaktor ω und einer Phasenverschiebung von $\pi/2$. Dadurch gilt allgemein bei DGLen sinusförmiger Größen (Index ac) der Form in Gleichung 12.6:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^i y_{ac} = b_{ac} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (\mathrm{j}\omega)^i \cdot \underline{\hat{Y}} = \underline{\hat{B}} \tag{12.25}$$

Alternativ kann auch der Imaginärteil komplexer Amplitudenzeiger zur Darstellung von sinusförmiger Wechselgrößen verwendet werden. [Vergleich Modul 7 - Periodische Größen]

2.4.4 Zusammenfassung

Das Berechnen von Ausgleichsvorgängen im Zeitbereich besteht zum einen im Aufstellen einer passenden DGL und zum anderen auf dem Lösen der aufgestellten DGL. Merkbox 22 fasst die die Berechnung von Ausgleichsvorgängen im Zeitbereich zu fünf Schritten zusammen. Die Schritte sind stark angelehnt die Vorgehensweise von Weißgerber [3, S. 6].

Merke: Verfahren für DGL

1.	Differentialgleich. aufstellen	(lin., gew.)	$\sum a_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i} = b$
2.	Flüchtiger Zustand	(homo. Lsg.)	$y_\mathrm{f} \overset{*}{=} \sum K_i' \cdot \mathrm{e}^{\lambda_i t}$
3.	Eingeschwung. Zustand	(part. Lsg.)	$y_\mathrm{e} = y(t \to \infty)$
4.	Überlagern	(allg. Lsg.)	$y = y_\mathrm{f} + y_\mathrm{e}$
5.	Konstante(n) bestimmen	(Anfangsbed.)	$i_L, u_C = stetig$

$$^*\text{mit} \quad K_i' = \begin{cases} K_i & \text{für} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall \quad i,j \qquad \text{(einfache NS)} \\ K_i \cdot t^k & \text{für} \quad \lambda_i = \lambda_{i-k} \quad \text{mit} \quad k \in [0,\ 1,\ \ldots,\ m-1] \qquad (m\text{-fache NS, } k\text{-ter gleicher EW}) \end{cases}$$

Die Reihenfolge der Schritte 2. und 3. ist prinzipiell beliebig. In der Mathematik ist die gezeigte Reihenfolge üblicher mit der Bestimmung der allgemeinen homogenen Lösung vor der Lösung der partikulären Lösung(en). Aus elektrotechnischer Sicht kann es sich anbieten zunächst die den eingeschwungenen Zustand (partikuläre Lösung) zu bestimmen.

3 Schaltvorgänge im Zeitbereich berechnen

In diesem Kapitel werden Schaltvorgänge in elektrischen Schaltungen im Zeitbereich betrachtet. Es wird zwischen Schaltvorgängen bei Gleichspannung und Wechselspannung unterschieden. Die Betrachtung erfolgt für RC- und RL-Glieder, sowie RLC-Glieder.

Lernziele: Schaltvorgänge

Studierende lernen:

- Schaltvorgänge im Zeitbereich zu berechnen
- das Schaltverhalten von RC-, RL- und RLC-Gliedern kennen und verstehen
- die Möglichkeit kennen Schaltvorgänge bei AC-Anregung zu minimieren
- das Schwingverhalten von Schwingkreisen zu verstehen und zu analysieren

3.1 bei Gleichspannung

In diesem Kapitel werden Lade- und Entladevorgänge von Kapazitäten und Induktivitäten jeweils in Reihe mit einem Widerstand bei Gleichspannung berechnet und dargestellt.

Schaltvorgänge bei sinusförmiger Anregung folgen in Kapitel 3.2.

3.1.1 bei Kapazitäten

Beispiel 12.2 zeigt den Rechenweg zur Bestimmung des Spannungsverlaufs $u_C(t)$ einer zu Beginn entladenen Kapazität C beim Laden mit Gleichspannung für $t \geq 0$ über einen Widerstand R und den Zeitverlauf des Ladestroms $i(t)$. Die angewandte Berechnungsmethode entspricht dem Verfahren für DGL im Zeitbereich nach Merksatz 22.

Aus den Ergebnissen ablesen lässt sich die exponentielle Annäherung von $u_C(t)$ an die Anregung U_q:

$$u_C(t) = U_q \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \tag{12.26}$$

und der exponentielle Abfall von $i(t)$ respektive $u_R(t)$ ab deren Maximalwerten U_q/R und U_q:

$$i(t) = \frac{U_q}{R} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{12.27}$$

$$u_R(t) = U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{12.28}$$

bis die Kapazität geladen ist. Die **Zeitkonstante** τ bestimmt die Steilheit der exponentiellen Verläufe. Für das RC-Glied ergibt sich $\tau = RC$. Die Einheit für τ ist gleich jener der Zeit.

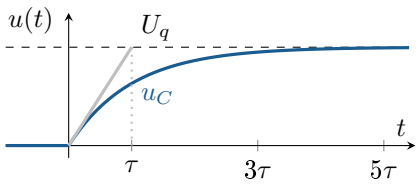


Abbildung 12.11: Exp. Annäherung und τ

Tabelle 12.2: Typ. Werte Zeitkonstante τ

t	τ	$3\,\tau$	$5\,\tau$
$1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}$	63,2%	95,0%	99,3%
$\mathrm{e}^{-t/\tau}$	36,8%	5,0%	0,7%

Faustregel: „Eingeschwungen“ nach $5\,\tau$

Wie in Abbildung 12.11 dargestellt, schneidet die Tangente von u_C im Punkt $u_C(t = 0)$ den Endwert U_q zum Zeitpunkt $t = \tau$. Allgemein gilt in jedem Punkt exponentieller Annäherungen/Abfälle, dass die Tangete den Endwert nach τ erreicht.

Tabelle 12.2 zeigt typische Werte für exponentielle Annäherungen/Abfälle nach Vielfachen von τ. Die Werte sind relativ zum Maximalwert (Start- oder angestrebter Grenzwert). Als „eingeschwungen“ gilt ein solcher Verlauf nach $5\,\tau$.

Beispiel 12.3 zeigt den Rechenweg zur Bestimmung des Spannungsverlaufs $u_C(t)$ einer Kapazität C beim Entladen über einen Widerstand R und zugehörige Zeitverläufe. Hierbei ergeben sich analog zum Ladevorgang exponentielle Verläufe mit gleicher Zeitkonstante, jedoch mit unterschiedlichen Start- und Endwerten.

Der Rechenweg in den Beispielen 12.2 und 12.3 ist prinzipiell identisch. Beim Lade- und Entladevorgang unterscheiden sich lediglich die Anfangsbedingung $u_C(0)$ (bei Schaltzeitpuntk $t = 0$) und die Randbedingung $u_{C,\mathrm{e}}$ (für $t \to \infty$). Dadurch ergeben sich unterschiedliche partikuläre Lösungen und andere Konstanten K in der allgemeinen Lösung.

Verallgemeinert lässt sich der Spannungsverlauf u_C einer Kapazität C beim Laden/Entladen mit Gleichspannung über einen Widerstand R ab einem Schaltzeitpunkt t_0 beschreiben durch:

$$u_C(t - t_0) = \underbrace{u_{C,\mathrm{e}}}_{u_{C,\mathrm{p}}} + \underbrace{\left(u_C(t_0) - u_{C,\mathrm{e}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{u_{C,\mathrm{h}}} \tag{12.29}$$

Etwas umgeschrieben lässt sich der Spannungsverlauf auch recht anschaulich wie folgt formulieren:

$$u_C(t-t_0) = \underbrace{u_C(t_0)}_{\text{Startwert}} + \Big(\underbrace{u_{C,\mathrm{e}} - u_C(t_0)}_{\text{Differenz}}\Big) \cdot \Bigg(\underbrace{1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{\text{Exp. Annäherung}}\Bigg) \tag{12.30}$$

Die allgemeine Lösung in Gleichung 12.29 beziehungsweise 12.30 gilt nur für Anregungen mit Gleichgröße. Die Lösung ist typisch für verlustbehaftete, lineare Systeme erster Ordnung (mit einem Energiespeicher), weshalb sie in ähnlicher Form auch bei RL-Gliedern auftritt.

Exkurs: DGL 1. Ordnung und Zeitkonstante τ

Die Exponentialform ist typisch für lineare Systeme erster Ordnung mit Energiespeicher und ergibt sich aus der Lösung der linearen, gewöhnlichen DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Durch Umformung ($a_0 = 1$) lässt sich die Zeitkonstante τ direkt aus der DGL ablesen ($a_1 = \tau$).:

$$\tau \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) + y(t) = b(t) \tag{12.31}$$

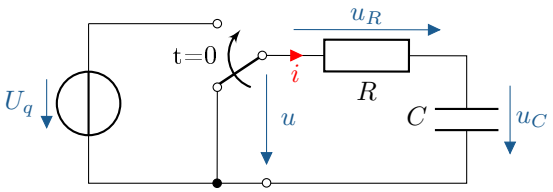
Dadurch lässt sich die homogene Lösung direkt angeben mit.:

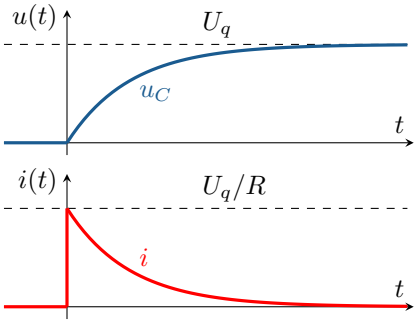
$$y_{\mathrm{h}}(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \tag{12.32}$$

Die Zeitkonstante ist ein Maß für die Schnelligkeit, mit der ein System auf eine Änderung reagiert.

Beispiel 12.2: RC-Glied DC-Ladevorgang

Bestimmung von Spannung u_C und Ladestrom i der Kapazität C beim Laden über Widerstand R mit Gleichspannung U_q für $t \geq 0$. Die Kapazität ist zu Beginn entladen.





gegeben: $i(0)$, U_q, R, C
gesucht: $i(t), u_L(t)$

1.) DGL aufstellen: von $u_C(t)$ für $t > 0$

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_C ausgedrückt:

Masche : $u_R + u_C = U_q$ mit $u_R = R \cdot i$

$R \cdot i + u_C = U_q$ mit $i = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$

DGL : $R \cdot C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_q$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

DGL$_h$: $RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{C,\mathrm{h}} + u_{C,\mathrm{h}} = 0$ Ansatz: $u_{C,\mathrm{h}} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

$K \cdot (RC \cdot \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} + \mathrm{e}^{\lambda t}) = 0$

char. Pol.: $RC \cdot \lambda + 1 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{RC}$

hom. Lsg. : $u_{C,\mathrm{h}} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = RC$

3.) Partikulare Lösung: (eingeschwungen) (für $t \to \infty$)

DGL$_p$: ~~$RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{C,p}$~~ $+ u_{C,p} = U_q$ mit $u_{C,p} = konst.$

part. Lsg. : $u_{C,p} = U_q$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

$u_C(t) = u_{C,\mathrm{h}}(t) + u_{C,p}(t)$ $u_C(t) = u_{C,f}(t) + u_{C,e}(t)$

allg. Lsg.: $u_C(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + U_q$

5.) Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingungen einsetzen)

Anfangsbed. $u_C(0) = K + U_q \stackrel{!}{=} \frac{0}{1}$ $\Rightarrow$ $K = -U_q$

$u_C(t) = -U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + U_q$

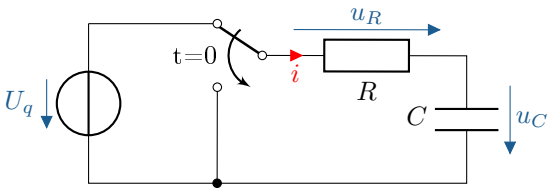
spez. allg. Lsg.: $u_C(t) = U_q \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$

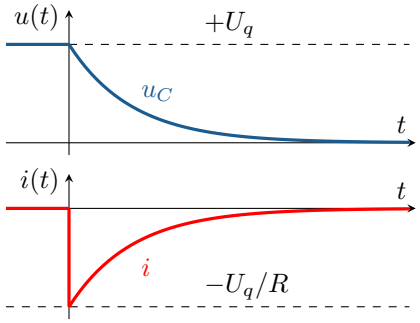
Strom i aus Spannung u_C bestimmen:

Strom: $i = \frac{U_q}{R} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $i = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$

Beispiel 12.3: RC-Glied Entladevorgang

Bestimmung von Spannung u_C und Strom i_C einer Kapazität C beim Entladen über einen Widerstand R für $t \geq 0$. Die Kapazität ist zu Beginn geladen auf U_q.





gegeben: $u_C(0)$, U_q, R, C
gesucht: $u_C(t)$

1.) DGL aufstellen: von $u_C(t)$ für $t > 0$, analog zu Beispiel 12.2

Masche : $u_R + u_C = 0$ mit $u_R = R \cdot i$

DGL : $RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = 0$ mit $i = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) Identisch zu Beispiel 12.2

hom. Lsg. : $u_{C,\mathrm{h}} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = RC$

Die partiklare Lösung $u_{C,p}$ entfällt, da u_C eingeschwungen ($t \to \infty$) null wird.

3. Part. Lsg.: (eingeschwungen) und **4. Überlagerung:**

allg. Lsg.: $u_C = u_{C,\mathrm{h}} + \cancel{u_{C,p}}$ mit $u_{C,p} = 0$

5.) Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingungen einsetzen)

Anfangsbed. $u_C(0) = K \cdot \mathrm{e}^0 \stackrel{!}{=} U_q$ $\Rightarrow$ $K = U_q$

spez. allg. Lsg.: $u_C(t) = U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$

Strom i aus Spannung u_C bestimmen:

Strom: $i = -\frac{U_q}{R} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $i = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C$

3.1.2 bei Induktivitäten

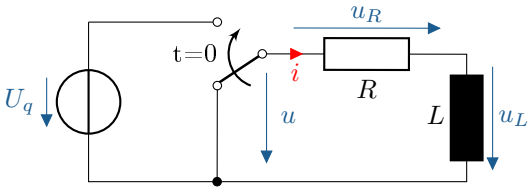
Der Rechenweg zur Bestimmung des Strom- oder Spannungsverlaufs bei Induktivitäten bei Anregung mit Gleichspannung ist identisch zu der Berechnung bei Kapazitäten in Kapitel 3.1.1. Das sich einstellende Zeitverhalten mit Exponentialverläufen und Zeitkonstanten ist analog zu dem dort beschriebenen.

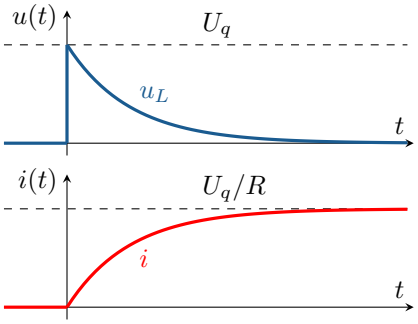
Exemplarisch ist in Beispiel 12.4 und 12.5 der Ladestrom $i(t)$ und die Induktivitätsspannung $u_L(t)$ einer Induktivität L beim Laden über einen Widerstand R mit Gleichspannung U_q für $t \geq 0$ berechnet und dargestellt.

Die Beispiele unterscheiden sich lediglich im Rechenweg. In Beispiel 12.4 wird die DGL für $i(t)$ und in Beispiel 12.5 für $u_L(t)$ aufgestellt und gelöst.

Beispiel 12.4: RL-Glied DC-Ladevorgang - Über DGL von i

Bestimmung von Ladestrom i und Spannung u_L der Induktivität L beim Laden über Widerstand R mit Gleichspannung U_q ab Schalzeitpunkt $t = 0$. Zuvor fließt kein Strom.





gegeben: $i(0)$, U_q, R, L
gesucht: $u_L(t)$, $i(t)$

1.) DGL aufstellen: von $i(t)$ für $t \geq 0$

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R und u_L nach i umgeschrieben:

Masche : $u_R + u_L = U_q$ mit $u_R = R \cdot i$

$R \cdot i + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i = U_q$ mit $u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$

DGL : $\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = \frac{U_q}{R}$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

DGL_h : $\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_\mathrm{h} + i_\mathrm{h} = 0$ Ansatz: $i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

char. Pol.: $\frac{L}{R} \cdot \lambda + 1 = 0$ $\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$

hom. Lsg. : $i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = \frac{L}{R}$

3.) Partikulare Lösung: (eingeschwungen) mit $t \to \infty$

DGL_p : $\frac{L}{R} \cdot \cancel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_\mathrm{p}} + i_\mathrm{p} = \frac{U_q}{R}$ mit $i_\mathrm{p} = konst.$

part. Lsg. : $i_\mathrm{p} = \frac{U_q}{R}$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

allg. Lsg.: $i(t) = \underbrace{K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}}_{i_\mathrm{h}} + \underbrace{\frac{U_q}{R}}_{i_\mathrm{p}}$ mit $i_\mathrm{h} = i_f, \quad i_\mathrm{p} = i_e$

5.) Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingungen einsetzen)

Anfangsbed. $i(0) = K \cdot \cancel{\mathrm{e}^0} + \frac{U_q}{R} \stackrel{!}{=} 0$ $\Rightarrow \quad K = -\frac{U_q}{R}$

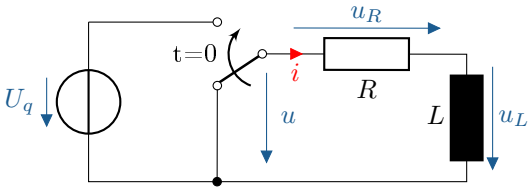
eindeut. Lsg.: $i(t) = \frac{U_q}{R} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$

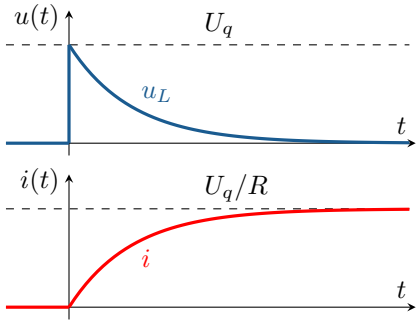
Spannung u_L aus Strom i bestimmen:

Spannung: $u_L = U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$

Beispiel 12.5: RL-Glied DC-Ladevorgang - Über DGL von u_L

Bestimmung von Spannung u_L und Ladestrom i der Induktivität L beim Laden über Widerstand R mit Gleichspannung U_q für $t \geq 0$. Der Stromkreis ist vor $t = 0$ unterbrochen.





gegeben: $i(0)$, U_q, R, L
gesucht: $u_L(t)$, $i(t)$

1.) DGL aufstellen: von $u_L(t)$ für $t \geq 0$

Ausgehend von der Maschengleichung wird u_R in Abhängigkeit von u_L ausgedrückt:

Masche : $u_R + u_L = U_q$ mit $u_R = R \cdot i$

$$R \cdot i + u_L = U_q \quad \Big| \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$R \cdot \frac{u_L}{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U_q \quad \text{mit} \quad u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$$

DGL : $$\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_L + u_L = 0$$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

DGL$_h$: $\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{L,h} + u_{L,h} = 0$ Ansatz: $u_{L,h} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

char. Pol.: $\frac{L}{R} \cdot \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{\tau} = -\frac{R}{L}$

hom. Lsg. : $u_{L,h} = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$ mit $\tau = \frac{L}{R}$

3.) Partikulare Lösung: (eingeschwungen) mit $t \to \infty$

DGL$_p$: $\cancel{\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{L,p}} + u_{L,p} = 0$ mit $u_{L,p} = konst.$

part. Lsg. : $u_{L,p} = 0$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

$u_L(t) = u_{L,h}(t) + \cancel{u_{L,p}(t)}$ $\quad u_L(t) = u_{L,f}(t) + \cancel{u_{L,e}(t)}$

allg. Lsg.: $u_L(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$

5.) Konstanten bestimmen: (Anfangsbedingungen einsetzen)

Anfangsbed. $i(0) = \frac{u_R(0)}{R} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u_L(0) = U_q - \cancel{u_R(0)}$

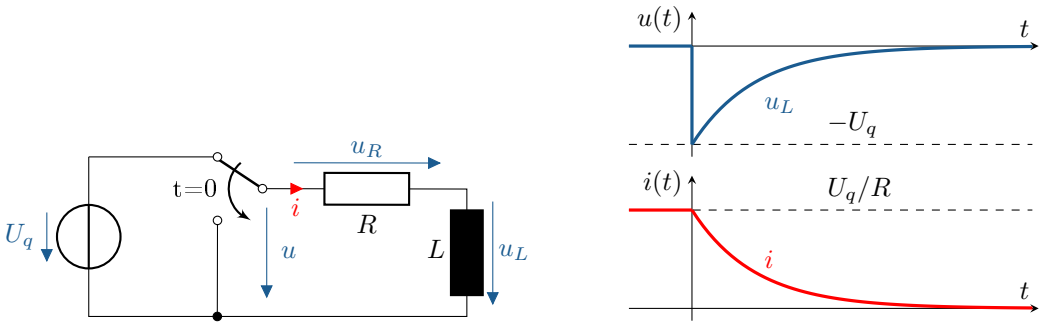
$u_L(0) = K \cdot \mathrm{e}^{-0} \stackrel{!}{=} U_q \quad \Rightarrow \quad K = U_q$

eindeut. Lsg.: $u_L(t) = U_q \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$

Strom i aus Spannung u_L bestimmen:

Strom: $i = \frac{U_q}{R} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ mit $i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_q - u_L}{R}$

Der Entladevorgang einer Induktivität L über einen Widerstand R ist ähnlich zum Ladevorgang über einen Widerstand R mit Gleichspannung U_q. Der Kurzschluss über R entspricht einer Spannungsquelle mit $U_q = 0$ V. Entladevorgang und Ladevorgang unterscheiden sich lediglich in den Anfangsbedingungen und dem Störterm der jeweiligen DGL. Die Zeitkonstante τ ist identisch für den Lade- und Entladevorgang. Auf eine detaillierte Berechnung wird daher an dieser Stelle verzichtet.

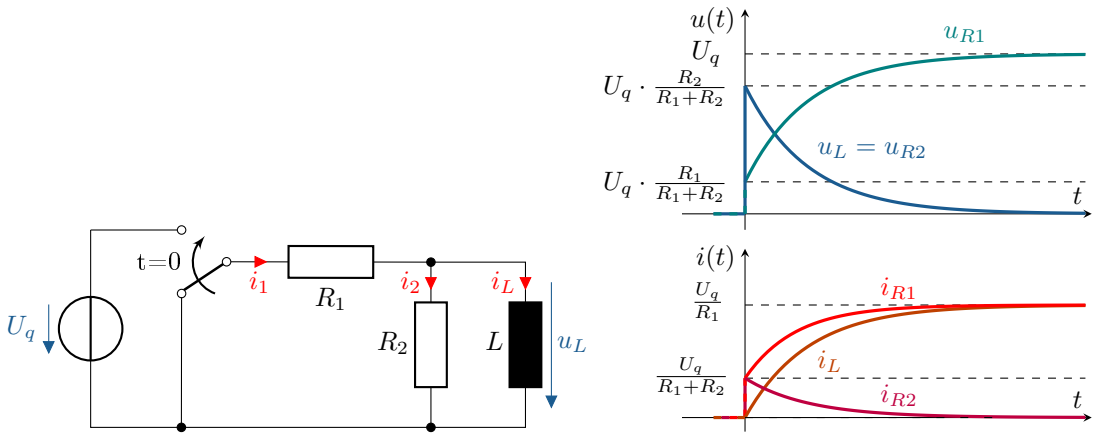


(a) Schaltbild (b) Spannungs- und Stromverlauf

Abbildung 12.12: RL-Glied, Entladevorgang

Abbildung 12.12 zeigt das Schaltbild (a) und den Spannungs- und Stromverlauf (b) der Induktivität L beim Entladen über einen Widerstand R ab Schaltzeitpunkt $t = 0$. Die Induktivität ist vor dem Schalten in Reihe mit dem Widerstand R an eine Gleichspannungsquelle U_q angeschlossen. Zum Schaltzeitpunkt ist die Induktivität vollständig geladen(stationärer Zustand) und führt vor dem Schalten den Konstantstrom U_q/R.

Reale Induktivitäten lassen sich durch eine Reihenschaltung aus einer idealen Induktivität L und einem ohmschen Widerstand R_{Cu} modellieren, der den Kupferverlusten entspricht. Durch Parallelschaltung eines ohmschen Widerstandes R_{Fe} unmittelbar zur Induktivität L lassen sich zudem Eisenverluste modellieren.



(a) Schaltbild (b) Spannungs- und Stromverlauf

Abbildung 12.13: RL-Glied, realer Induktivität, Ladevorgang an idealer Spannungsquelle

Abbildung 12.13 zeigt das Schaltbild (a) einer realen Spule mit Induktivität L in Serie zu einem Widerstand R_{Cu} (hier R_1). Unmittelbar parallel zur Induktivität befindet sich der ohmsche Widerstand R_{Fe} (entspricht R_2). Die Induktivität wird ab $t = 0$ über eine ideale Konstantspannungsquelle U_q geladen und ist vorher vollständig entladen. Daneben abgebildet sind die zugehörigen den Spannungs-

und Stromverläufe (b).

Im Vergleich zum Ladevorgang eines reine RL-Serienschaltung in Beispiel 12.5 springt die Spannung über der Induktivität nicht auf die ganze Quellenspannung sondern auf einen geringeren Wert begrenzt durch den Spannungsteiler $\frac{R_2}{R_1+R_2}$. Der Eingangsstrom macht bedingt durch die Eisenverluste einen Sprung zum Schaltzeitpunkt und nähert sich dann exponentiell dem Strom $\frac{U_q}{R_1}$. Der Strom durch R_2 springt beim Schalten auf den Wert $\frac{U_q}{R_1+R_2}$ und fällt dann exponentiell ab. Der Strom durch die Induktivität nähert sich exponentiell dem Strom $\frac{U_q}{R_1}$ an. Die Zeitkonstante beträgt $\tau = \frac{L}{R_1||R_2}$.

3.2 bei sinusförmiger Anregung

Die Vorgehensweise zur Berechnung von Schaltvorgängen bei sinusförmiger Anregung ist prinzipiell gleich zur Vorgehensweise bei gleichförmiger Anregung. Deshalb wird in diesem Kapitel nur auf die Besonderheiten bei sinusförmiger Anregung eingegangen und die Berechnung anhand eines Beispiels erläutert.

Die Differentialgleichungen bei Schaltungen mit Wechselspannungs- oder stromquellen unterscheiden sich gegenüber den Gleichspannungs- oder -stromfällen lediglich durch die rechte Seite der DGL, dem Störterm. Der Störterm ergibt sich aus der Anregung und ist bei sinusförmiger Anregung linearer, zeitinvarianter Systeme ebenfalls sinusförmig.

Aufgrund der Zeitabhängigkeit sinusförmiger Anregungen, ist der exakte Schaltzeitpunkt entscheiden für das Verhalten des Systems. Präziser formuliert ist die Phasenlage der Anregung zum Schaltzeitpunkt entscheidend.

Am Beispiel eines RC-Gliedes wird in Kapitel 3.2.1 die Berechnung des Schaltvorgangs bei sinusförmiger Anregung gezeigt. Dabei wird die Abhängigkeit des Schaltvorgangs vom Schaltzeitpunkt und die Möglichkeit transienter Spitzenströme und -spannungen näher erläutert.

Exemplarisch ist in Beispiel 12.6 die Berechnung eines Schaltvorganges für ein RL-Glied bei Anregung mit Wechselspannung zusammenfassend präsentiert.

3.2.1 bei Kapazitäten

Zur Erläuterung der Besonderheiten von Schaltvorgängen bei sinusförmiger Anregung wird das Beispiel eines RC-Gliedes betrachtet. Die Berechnung erfolgt wie in Beispiel 12.2 nach Merksatz 22.

Eine Kapazität C wird über einen Widerstand R ab dem Schaltzeitpunkt $t = t_0$ an eine ideale Wechselspannungsquelle mit Spannung $u_q(t) = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$ angeschlossen. Die Kapazität C ist zu Beginn vollständig entladen. Abbildung 12.14 zeigt das Schaltbild dieser Anordnung.

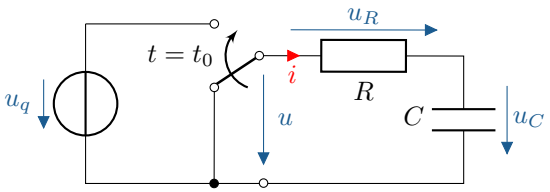


Abbildung 12.14: Schaltbild, RC-Glied (Reihe) nach Schalten an idealer Wechselspannungsquelle

1.) Differentialgleichung aufstellen:

Die inhomogene DGL von u_C für $t \geq t_0$ ergibt sich analog zu Beispiel 12.2 zu:

$$RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(t) + u_C(t) = u_q(t) \tag{12.33}$$

$$\text{mit} \quad u_q(t) = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q) \tag{12.34}$$

Gegenüber Beispiel 12.2 ist lediglich der Störterm verändert. Der Gleichspannungsterm U_q ist hier durch den Wechselspannungsterm u_q ersetzt.

2.) Homogene Lösung, allgemein (flüchtiger Zustand):

Die homogene Lösung $u_{C,h}$ ist unabhängig vom Störterm und damit von der Anregung. Die Lösung ist aus Beispiel 12.2 übernommen mit Berücksichtigung des variablen Schaltzeitpunktes t_0:

$$\begin{aligned} u_{C,\mathrm{h}} &= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t'}{\tau}} \qquad \text{mit} \quad t' = t - t_0 \\ &= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \qquad \text{mit} \quad \tau = RC \end{aligned} \tag{12.35}$$

Da der Exponentialansatz erst ab Schaltzeitpunkt t_0 gilt, wird dieser von der Zeit t subtrahiert.

3.) Partikuläre Lösung (eingeschwungener Zustand):

Die partikuläre Lösung $u_{C,p}$ entspricht bei sinusförmiger Anregung ebenfalls einer sinusförmigen Größe mit gleicher Frequenz wie die Anregung wie in in Kapitel 2.4.3 beschrieben ist. Der eingeschwungene Zustand lässt sich mittels komplexem Amplitudenzeiger $\underline{\hat{U}}_{C,p}$ wie folgt beschreiben:

$$u_{C,p} = \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \tag{12.36}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{U}}_{C,p} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_{C,p} = \hat{U}_{C,p} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{C,\mathrm{p}}} \tag{12.37}$$

Die Amplitude $\hat{U}_{C,p}$ und der (Last-)Phasenwinkel $\varphi_{C,\mathrm{p}}$ lassen sich gemäß komplexen Spannungsteiler bestimmen.

$$\begin{aligned} \underline{\hat{U}}_{C,p} &= \underline{\hat{U}}_q \cdot \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \underline{\hat{U}}_q \cdot \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} \\ &= \frac{\underline{\hat{U}}_q}{1 + \mathrm{j}\omega RC} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_q = \hat{U}_q \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_q} \end{aligned} \tag{12.38}$$

Für die Amplitude $\hat{U}_{C,p}$ und die Phase $\varphi_{C,\mathrm{p}}$ folgt aus Gl. 12.38:

$$\hat{U}_{C,p} = \frac{\hat{U}_q}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \qquad \text{und} \qquad \varphi_{C,\mathrm{p}} = \varphi_q - \arctan(\omega RC) \tag{12.39}$$

4.) Inhomogene Lösung, allgemein (Überlagerung):

Aus der Überlagerung von Gl. 12.35 und 12.36 folgt die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$\begin{aligned} u_C &= u_{C,\mathrm{h}} + u_{C,p} \\ &= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \end{aligned} \tag{12.40}$$

5.) Konstanten bestimmen (Anfangsbedingung):

Aus der Anfangsbedingung, dass die Kapazität zu Beginn entladen ist, folgt für die Konstante K:

$$u_C(t_0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$K \cdot \cancel{\mathrm{e}^{0}} + \hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,\mathrm{p}}) = 0$$

$$K = -\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \tag{12.41}$$

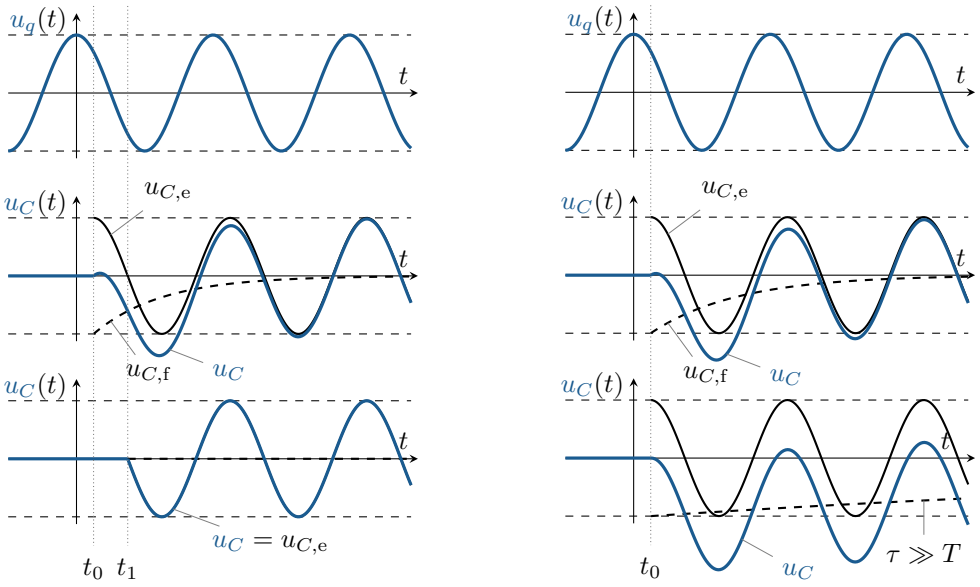
Mit Gl. 12.41 eingesetzt in 12.40 ergibt sich die eindeutige Lösung für $u_C(t)$:

$$u_C(t) = \underbrace{-\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_{C,\mathrm{p}}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{u_{C,\mathrm{h}}} + \underbrace{\hat{U}_{C,p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{C,\mathrm{p}})}_{u_{C,p}} \tag{12.42}$$

An Gleichung 12.42 ist erkennbar, dass der flüchtige Zustand $u_{C,f} = u_{C,h}$ ab t_0 exponentiell gegen null strebt. Im Gegensatz zum DC-Fall (Beispiel 12.2) ist der Startwert der Exponentialkurve K aus Gleichung 12.41 abhängig von t_0, da der eingeschwungene Zustand $u_{C,e} = u_{C,p}$ zeitabhängig ist.

Verhalten bei Variation des Schaltzeitpunktes/der Zeitkonstante:

Abbildung 12.15a zeigt den Spannungsverlauf der Anregung u_q bei einem Nullphasenwinkel φ_q von Null und den Spannungsverlauf der Kapazität u_C. Zum Vergleich ist u_C für zwei verschiedenen Schaltzeitpunkten t_0 gezeigt. Das ist einmal beim negativen Scheitelwert und einmal beim Nulldurchgang von $u_{C,p}$. u_C ist als Überlagerung des flüchtigen Zustandes $u_{C,h}$ (schwarz, gestrichelt) und des eingeschwungenen Zustandes $u_{C,p}$ (schwarz) dargestellt.



(a) Verschiedene Schaltzeitpunkte t_0

(b) Verschiedene Zeitkonstanten τ

Abbildung 12.15: Spannungsverlauf u_C bei RC-Glied nach Schalten an Wechselspannungsquelle u_q

Wie zu erkennen ist, ist der Ausgleichsvorgang maximal ($|K| = max.$), wenn die Differenz $|u_{C,p}(t_0) - u_C(t_0)|$ maximal ist. Erfüllt die $u_{C,p}$ bereits die Anfangsbedingung mit $u_{C,p}(t_0) \stackrel{!}{=} u_C(t_0)$, entfällt der flüchtige Zustand vollständig $K = 0 \Rightarrow u_{C,h} = 0$ und es kommt zu keinem Ausgleichsvorgang.

In Abbildung 12.15b wird der Spannungsverlauf u_C für verschiedenen Zeitkonstanten τ gezeigt. Einmal beträgt $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$, einmal $\tau = \frac{20\pi}{\omega}$. In beiden Fällen ist t_0 so gewählt, dass der Ausgleichsvorgang maximal wird.

Bei großen Zeitkonstanten klingt der flüchtige Zustand langsamer ab, dadurch kann es bei ungünstigen Schaltzeitpunkten zu Überspannungen/-strömen kommen. Ist u_C wie im Beispiel nach Anfangsbedingung zu Beginn entladen ($u_C(t_0) = 0$), kann u_C bis zum doppelten Scheitelwert von $u_{C,p}$ ansteigen. Ist u_C hingegen zu Beginnn bereits bis zum negativen/positiven Scheitelwert von $u_{C,p}$ geladen, kann u_C sogar bis zum dreifachen Scheitelwert von $u_{C,p}$ ansteigen.

Merke: Ausgleichsvorgänge bei AC-Anregung

Durch geschicktes Schalten können Ausgleichsvorgänge bei AC-Anregung vermieden werden.

Bei großen Zeitkonstanten sind Überwerte bis zum doppelten/dreifachen Scheitelwert möglich.

3.2.2 bei Induktivitäten

Beispiel 12.6 zeigt exemplarisch die Berechnung eines Schaltvorgangs für ein RL-Glied bei Anregung mit Wechselspannung nach Merksatz 22.

Die Berechnung von Schaltvorgängen bei sinusförmiger Anregung für Induktivitäten erfolgt analog zu der Berechnung für Kapazitäten in Kapitel 3.2.1. Es gelten die gleichen Besonderheiten bezüglich Schaltzeitpunkten und möglicher transienter Spitzenströme und -spannungen wie bei Kapazitäten.

Im Beispiel ist die DGL der partikulären Lösung nach Gleichung 12.25 transformiert:

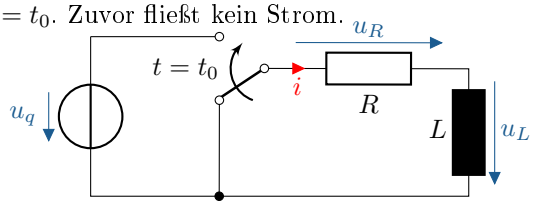
$$\text{DGL}_\text{p}: \qquad \frac{L}{R}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_\text{p}+i_\text{p}=\frac{u_q}{R} \qquad \text{mit} \quad u_q=\text{Re}\left\{\underline{\hat{U}}_q\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

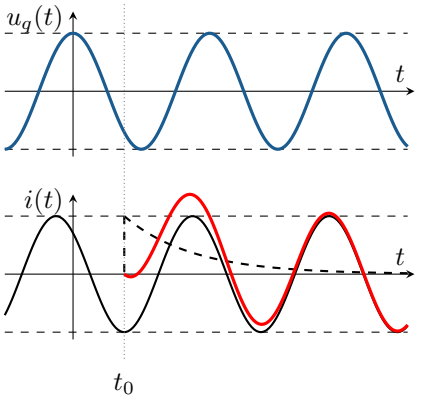
$$\text{transformiert:} \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{L}{R}\cdot\mathrm{j}\omega\,\underline{\hat{I}}_\text{p}+\underline{\hat{I}}_\text{p}=\frac{\underline{\hat{U}}_q}{R} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_q=\hat{U}_q\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_q}$$

Der Ansatz bietet eine einfache Umstellung nach dem komplexen Amplitudenzeiger der partikulären Lösung und ist prinzipiell gleichwertig mit der Herleitung über komplexe Spannungsteiler wie sie in Gleichung 12.38 am Beispiel des RC-Gliedes gezeigt ist.

Beispiel 12.6: RL-Glied, Schaltvorgang mit Wechselspannungsquelle

Bestimmung des Strom i durch die Induktivität L in Reihe mit dem ohmschen Widerstand R bei Zuschalten der idealen Wechselspannungsquelle $u_q = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$ ab Schaltzeitpunkt $t = t_0$. Zuvor fließt kein Strom.





gegeben: $i(t_0)$, u_q, R, L
gesucht: $i(t)$, $u_L(t)$

1.) DGL aufstellen: von i für $t \geq t_0$, Lösung aus Bsp. 12.4

DGL : $$\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = \frac{u_q}{R} \qquad \text{mit} \quad u_q = \hat{U}_q \cdot \cos(\omega t + \varphi_q)$$

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig), Lösung aus Bsp. 12.6 für Schaltzeitpunkt t_0

hom. Lsg.: $$i_\mathrm{h} = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \qquad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

3.) Partikulare Lösung: (eingeschwungen) mit $t \to \infty$, kompl. Wechselstromrechnung

transf. : $$\frac{L}{R} \cdot \mathrm{j}\omega \underline{\hat{I}}_\mathrm{p} + \underline{\hat{I}}_\mathrm{p} = \frac{\underline{\hat{U}}_q}{R} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{U}}_q = \hat{U}_q \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_q}$$

Zeiger: $$\underline{\hat{I}}_\mathrm{p} = \frac{\underline{\hat{U}}_q}{R} \cdot \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega \frac{L}{R}} \qquad \text{mit} \quad \underline{\hat{I}}_\mathrm{p} = \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I}$$

$$\hat{I}_\mathrm{p} = \frac{\hat{U}_q / R}{\sqrt{1 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}} \qquad \varphi_I = \varphi_q - \arctan\left(\omega \frac{L}{R}\right)$$

part. Lsg. : $$i_\mathrm{p} = \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I) \qquad \text{mit} \quad i_\mathrm{p} = \mathrm{Re}\left\{\underline{\hat{I}}_\mathrm{p} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

4.) Inhomogene Lösung, allg.: (Überlagerung)

allg. Lsg.: $$i = \underbrace{K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}_{i_\mathrm{h}} + \underbrace{\hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)}_{i_\mathrm{p}}$$

5.) Konstanten bestimmen: (AB einsetzen)

Anfangsbed.: $$i(t_0) = K \cdot \cancel{\mathrm{e}^{0}} + \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad K = -\hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I)$$

eindeut. Lsg.: $$i(t) = -\hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t + \varphi_I)$$

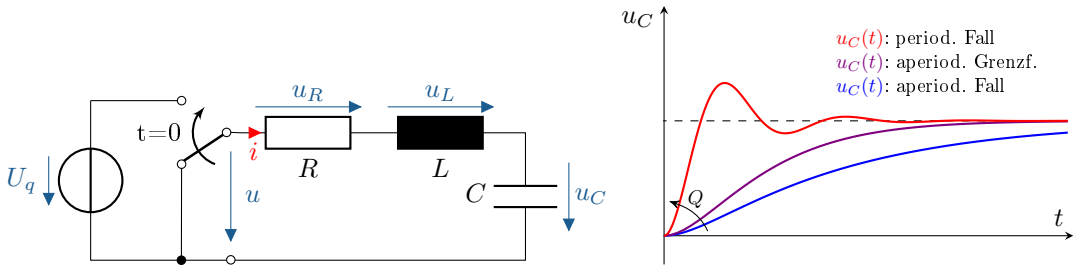
Spannung u_L über der Induktivität L über $u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$ berechnen.

Spannung: $$u_L(t) = R \cdot \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi_I) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t-t_0}{\tau}} - \omega L \cdot \hat{I}_\mathrm{p} \cdot \sin(\omega t + \varphi_I)$$

3.3 bei RLC-Serienschwingkreisen

Systeme mit zwei unterschiedlichen Energiespeichern (Induktivität L und Kapazität C) sind prinzipiell schwingungsfähig. Daher werden RLC-Glieder auch als Schwingkreise oder Resonanzkreise bezeichnet. Die Schwingungsfähigkeit lässt sich anhand der Eigenwerte bestimmen und beschreiben. Ein anderer Ansatz ist die Betrachtung der (Schwingkreis-)Güte Q. [Vgl. Modul 8]

Abbildung 12.16 zeigt das Schaltbild eines RLC-Gliedes beim Laden mit konstanter Gleichspannung U_q. Daneben sind die Zeitverläufe der Kondensatorspannung für die drei möglichen Fälle dargestellt. Das sind der **aperiodischen Fall**, der **aperiodischen Grenzfall** und der **periodischen Fall** die in Kapitel 3.3.1 näher beschrieben sind.



(a) Schaltbild (b) Spannungsverlauf, Fallunterscheidung

Abbildung 12.16: RLC-Glied, Ladevorgang mit konstanter Gleichspannung

Die Berechnung von Schaltvorgängen bei RLC-Gliedern erfolgt analog zu den Beispielen für RC- und RL-Glieder aus den vorigen Kapiteln.

1.) DGL aufstellen: für u_C für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} u_L + u_R + u_C &= u \\ L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + R \cdot i + u_C &= U_q \\ LC \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_C + RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C &= U_q \end{aligned} \tag{12.43}$$

Aufgrund der zwei verschiedenen Energiespeichern ergibt sich eine DGL 2. Ordnung.

2.) Homogene Lösung, allg.: (flüchtig) (ohne Störterm)

Die Form der homogenen Lösung ist abhängig von der Art der Eigenwerte.

$$\text{hom. DGL:} \qquad LC \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_{C,\mathrm{h}} + RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{C,\mathrm{h}} + u_{C,\mathrm{h}} = 0 \quad \text{mit} \quad u_{C,\mathrm{h}} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{12.44}$$

$$\text{char. Polynom:} \qquad \lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\text{Eigenwerte:} \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad \text{mit} \quad D = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} \tag{12.45}$$

Durch Anwenden der p-q-Formel (Mitternachtsformel) ergeben sich für die **Eigenwerte** (EW) $\lambda_{1/2}$ je nach Wurzelterm entweder zwei unterschiedliche oder zwei identische Werte. Die homogenen Lösung nimmt daher, wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben ist, eine der folgenden zwei Formen an:

$$\text{hom. Lsg.:} \qquad u_{C,\mathrm{h}} = \begin{cases} K_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & \text{für} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} & \text{für} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \end{cases} \tag{12.46}$$

Die Fallunterscheidung kann anhand der sogenannten **Diskriminante** D vorgenommen werden.

3.3.1 Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis

Die Diskriminante D ist der Term unter der Wurzel in Gleichung 12.45 zur Bestimmung von $\lambda_{1/2}$.

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante } D}} \tag{12.47}$$

Tabelle 12.3 listet alle drei Fälle mit Art der Eigenwerte und relative Aussagen bezüglich der Dämpfung des Schwingkreises. Als Unterscheidungsmerkmal sind die Wertebereiche der Diskriminante D respektive der Schwingkreisgüte Q_S (Vgl. Modul 8) mit angegeben.

Tabelle 12.3: Fallunterscheidung beim RLC-Schwingkreis

Fallunterscheidung	**Dämpfung**	**Diskrimi.**	**Güte**	**Eigenwerte $\lambda_{1/2}$**
aperiodischer Fall	stark	$D > 0$	$Q_S < 0{,}5$	Zwei verschiedene, reelle EW
aperiodischer Grenzfall	kritisch	$D = 0$	$Q_S = 0{,}5$	Eine doppelte, reelle EW
periodischer Fall	schwach	$D < 0$	$Q_S > 0{,}5$	konjugierte, komplexe EW

Ein Ortskurvendiagramm der Eigenwerte wird im optionalen Exkurs in Kapitel 3.4.2 gezeigt. Der Zusammenhang zwischen λ und Q_S wird im optionalen Exkurs in Kapitel 3.4.3 näher erläutert.

3.3.2 Aperiodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis

Ist die Diskriminante D positiv, ist der Wurzelterm reellwertig und immer kleiner als der Betrag des Terms $\frac{R}{2L}$ vor der Wurzel. Dadurch sind beide Eigenwerte verschieden, reell und negativ.

für $D > 0$ gilt $\quad \frac{R}{2L} \overset{!}{>} \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow$ 2 reelle EW

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,\mathrm{h}} = K_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \qquad \text{mit} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda < 0 \tag{12.48}$$

Die Konstanten K_1 und K_2 müssen beide reell sein, damit die Lösung reellwertig bleibt. Der flüchtige Zustand entspricht damit der Addition zweier Exponentialfunktionen. Dabei dominiert die langsamer Exponentialfunktion, das heißt die mit der größeren Zeitkonstante (Vgl. Exkurs in Kapitel 3.4.2).

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen, identisch für alle drei Fälle)

$$u_{C,\mathrm{p}} = U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

$$u_C(t) = K_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + U_q$$

5.) Konstanten bestimmen: (wie bekannt)

Sei $u_C(0) = 0$ und $i(0) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = 0$ als Anfangsbedingungen (AB) gegeben, so folgt:

1. AB: $u_C(0) = K_1 \cdot \cancel{e^{\lambda_1 0}} + K_2 \cdot \cancel{e^{\lambda_2 0}} + U_q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -K_2 - U_q$

2. AB: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = K_1 \cdot \lambda_1 \cdot \cancel{e^{\lambda_1 0}} + K_2 \cdot \lambda_2 \cdot \cancel{e^{\lambda_2 0}} + \cancel{\emptyset} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -K_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

$\Longrightarrow \qquad K_1 = \frac{U_q}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{U_q}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1}$

3.3.3 Aperiodischer Grenzfall beim RLC-Serienschwingkreis

Ist die Diskriminante D exakt null, sind beide Eigenwerte identisch, reell und negativ. Durch die doppelte Nullstelle ergibt sich eine spezielle Form der homogenen Lösung durch Überlagerung der zwei Ansätze ($K_1 \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ und $K_2 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$).

für $D = 0$ gilt $\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \cancel{\sqrt{0}} = \lambda \quad \Rightarrow$ 1 reeller EW

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,\mathrm{h}} = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \text{mit} \quad \lambda_1 = \lambda_2 < 0 \tag{12.49}$$

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen)

$$u_{C,\mathrm{p}} = U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

$$u_C(t) = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + U_q$$

5.) Konstanten bestimmen: (wie bekannt)

Sei $u_C(0) = 0$ und $i(0) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = 0$ als Anfangsbedingungen (AB) gegeben, so folgt:

1. AB: $u_C(0) = (K_1 + \cancel{K_2 \cdot 0}) \cdot \cancel{e^{\lambda 0}} + U_q \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -U_q$

2. AB: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = (K_1 + \cancel{K_2 \cdot 0}) \cdot \lambda \cdot \cancel{e^{\lambda 0}} + K_2 \cdot \cancel{e^{\lambda 0}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K_2 = -K_1 \cdot \lambda$

$\Longrightarrow \qquad K_1 = -U_q \quad \text{und} \quad K_2 = +U_q \cdot \lambda$

3.3.4 Periodischer Fall beim RLC-Serienschwingkreis

Ist die Diskriminante negativ, gibt es zwei komplex konjugierte Eigenwerte mit negativem Realteil. Umformung mit $\sqrt{-1} = \mathrm{j} \cdot \sqrt{1}$ und Herleitung für $u_{C,h}$ in Kapitel 3.4.1:

für $D < 0$ gilt $\lambda_{1/2} = -\underbrace{\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm \mathrm{j} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d} \quad \Rightarrow$ 2 kompl. EW (12.50)

2.) Homogene Lösung: (flüchtig)

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \qquad \text{mit} \quad \lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{j}\,\omega_d \tag{12.51}$$

Die homogene Lösung entspricht einer abklingenden Schwingung mit der **Abklingkonstante** δ (neg. Realteil der EW) und der **gedämpften Eigenkreisfrequenz** ω_d (pos. Imaginärteil der EW). Eine Herleitung für Gl. 12.51 aus Gl. 12.52 erfolgt in Kapitel 3.4.1.

3.) Partikuläre Lösung: (eingeschwungen)

$$u_{C,\mathrm{p}} = U_q$$

4.) Allgemeine Lösung: (Überlagerung)

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) + U_q$$

5.) Konstanten bestimmen: (wie bekannt)

1. AB: $u_C(0) = \cancel{\mathrm{e}^{-\delta 0}} \cdot C_0 \cdot \sin(\cancel{\omega_d t} + \varphi_0) + U_q \stackrel{!}{=} 0$

2. AB: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(0) = -\delta \cdot \cancel{\mathrm{e}^{-\delta 0}} \cdot C_0 \cdot \sin(\varphi_0) + \cancel{\mathrm{e}^{-\delta 0}} \cdot C_0 \cdot \omega_d \cdot \cos(\varphi_0) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Longrightarrow \qquad C_0 = -\frac{U_q}{\sin(\varphi_0)} \quad \text{und} \quad \varphi_0 = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right)$$

In Abbildung 12.17 ist der zeitlichen Verlauf der Spannung $u_C(t)$ für $t = 0$ bis $t = 5 \cdot \frac{1}{\delta}$ gezeigt. In der gewählten Skalierung beträgt ω_0 das vierfache der Abklingkonstante δ (Güte $Q_S = 2$).

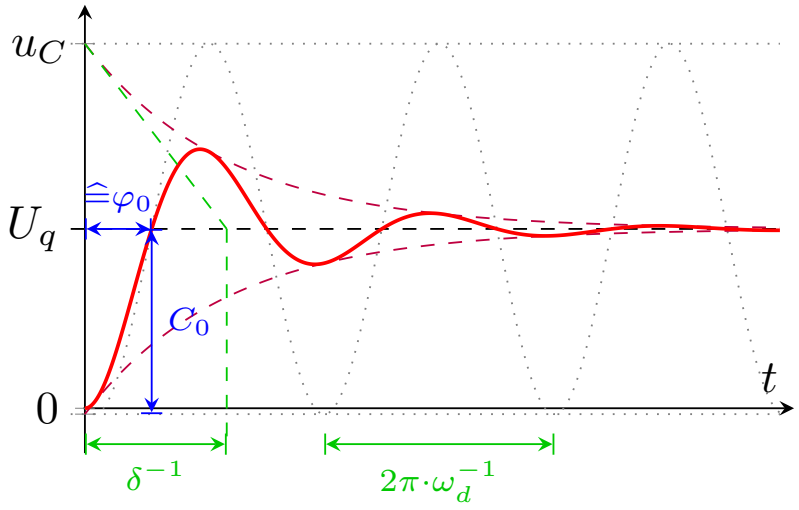


Abbildung 12.17: Spannung $u_C(t)$ im periodischen Fall mit zugehörige Konstanten: C_0, φ_0, δ, ω_d

3.4 Exkurse zu Serienschwingkreisen

In diesem Kapitel sind ergänzende Exkurse zum Verhalten von Schwingkreisen enthalten, die zur Vertiefung des Themas dienen und Brücken zu weiteren Themengebieten schlagen. Die Inhalte der Exkurse sind für das Verständnis der restlichen Modulinhalte nicht zwingend erforderlich und können bei Bedarf übersprungen werden.

3.4.1 Herleitung der homogenen Lösung im periodischen Fall

Aus der allgemeinen homog. Lösung im periodischen Fall (Gl. 12.46) folgt mit $\lambda_{1/2}$ (Gl. 12.50):

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \left(K_1 \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_d t} + K_2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\right)$$

K_1 und K_2 müssen komplex konjugiert sein, damit $u_{C,\mathrm{h}}$ reell ist! [2, Vgl. S. 379]

mit $\qquad K_1 = a + \mathrm{j}b \quad$ und $\quad K_2 = a - \mathrm{j}b \quad$ mit $\quad a,b \in \mathbb{R}$

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \left[(a+\mathrm{j}b) \cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_d t} + (a-\mathrm{j}b) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\right]$$

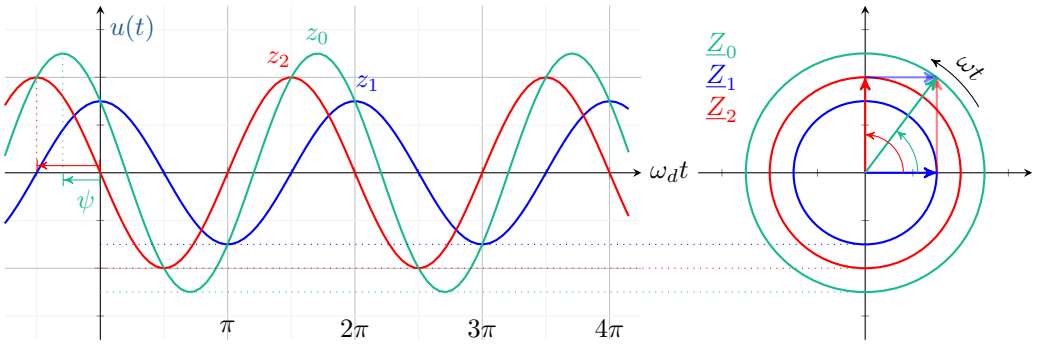
$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \left[a \cdot \underbrace{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_d t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\right)}_{2\cos(\omega_d t)} + \mathrm{j}b \cdot \underbrace{\left(\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\omega_d t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_d t}\right)}_{2\mathrm{j}\sin(\omega_d t)}\right]$$

mit $\qquad \mathrm{e}^{+\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} = \cos(x) + \mathrm{j}\cancel{\sin(x)} + \cos(x) - \mathrm{j}\cancel{\sin(x)} = 2\cos(x)$

$$\mathrm{e}^{+\mathrm{j}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} = \cancel{\cos(x)} + \mathrm{j}\sin(x) - \cancel{\cos(x)} + \mathrm{j}\sin(x) = 2\mathrm{j}\sin(x)$$

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \left[\underbrace{2a}_{C_1} \cdot \cos(\omega_d t) - \underbrace{2b}_{C_2} \cdot \sin(\omega_d t)\right] \tag{12.52}$$

Die homogene Lösung entspricht im periodischen Fall einer abklingenden ($\mathrm{e}^{-\delta t}$) Überlagerung der Schwingungen z_1 und $-z_2$ mit gleicher Kreisfrequenz ω_d und Phasenverschiebung von $\pi/2$ zueinander.



(a) Zeitverläufe (b) Zeigerdiagramm

Abbildung 12.18: Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz, Zeitverlauf u. Zeigerdiagramm

In Abbildung 12.18 ist die Überlagerung in Form addierter Zeitverläufe (a) und in Form addierter komplexer Amplitudenzeiger im Zeigerdiagramm (b) dargestellt. Mathematisch ausgedrückt:

Zeitbereich		*Polar.*	*Kart.*
$z_1(t) = +C_1 \cdot \cos(\omega_d t)$	$\Leftrightarrow$	$\underline{z}_1 = C_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0}$	$\underline{z}_1 = C_1$
$z_2(t) = -C_2 \cdot \sin(\omega_d t)$	$\Leftrightarrow$	$\underline{z}_2 = C_2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$	$\underline{z}_2 = \quad -\mathrm{j} \cdot C_2$
$z_0(t) = z_1(t) + z_2(t)$	$\Leftrightarrow$	$\underline{z}_0 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$	$\underline{z}_0 = C_1 - \mathrm{j} \cdot C_2$
$= C_0 \cdot \cos(\omega_d t + \psi)$	$\Leftrightarrow$	$= C_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$	

mit $\qquad C_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \qquad$ und $\qquad \psi = \arctan\left(-\frac{C_2}{C_1}\right), \qquad \varphi_0 = \psi + \frac{\pi}{2}$

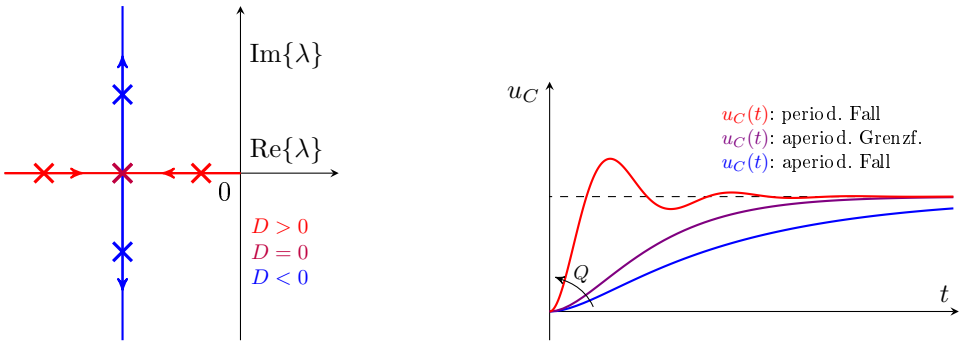
$$z_0(t) = C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \tag{12.53}$$

Die homogene Lösung im periodischen Fall aus Gl. 12.52 lässt sich nach Gl. 12.53 wie im Folgenden als abklingende, phasenverschobene Sinuskurve beschreiben (Vgl. Gl. 12.51):

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot C_0 \cdot \sin(\omega_d t + \varphi_0) \qquad \text{mit} \quad \lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{j} \cdot \omega_d$$

3.4.2 Fallunterscheidung bei RLC-Serienschwingkreis, Nullstellen

Die Nullstellen (NST) des charakteristiscen Polynoms, das heißt die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$, des RLC-Serienschwingkreises hängen von der Diskriminante D ab.



(a) Ortskurve der Nullstellen λ (b) Spannungsverlauf, Fallunterscheidung

Abbildung 12.19: Ortskurve der Eigenwerte und Spannungsverläufe im RLC-Serienschwingkreis

Abbildung 12.19a zeigt die Lage der Nullstellen im komplexen Zahlenraum als Ortskurve in Abhängigkeit von D für $\delta = \frac{R}{2L} = konst.$. Der Verlauf der NST entspricht einem Anstieg der ungedämpften Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. [Vgl. Gl. 12.59]

Im aperiodischen Fall ($D > 0$) bewegen sich die beiden negativen reellen NST für $\delta = konst.$ und steigendem ω_0 auf einander zu. Die NST näher an der Imaginärachse dominiert das Einschwingverhalten des Systems (langsamerer Abklingvorgang). Im aperiodischen Grenzfall ($D = 0$) verschmelzen die NST zu einer doppelten Nullstelle bei $\lambda_{1/2} = -\delta$. Im periodischen Grenzfall ($D < 0$) bewegen sich die konjugiert komplexen NST für $\delta = konst.$ und steigendem ω_0 parallel zur Imaginärachse und entfernen sich von der Realachse.

Vergleich: Polstellen der Übertragungsfunktion (Systemtheorie)

Aus der Lage der Eigenwerte im Ortskurvendiagramm lassen sich Rückschlüsse auf das Einschwingverhalten des RLC-Serienschwingkreises ziehen. Das Vorgehen ist üblich bei der Stabilitätsanalyse von Systemen im Rahmen der Regelungstechnik und stammt als Methode aus der Systemtheorie.

Für verschwindende Anfangsbedingungen ($\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i} u_C(0) = 0 \; \forall i$) lässt sich die DGL aus Gl. 12.43 mithilfe der Laplace-Transformation direkt im Bildbereich beschreiben. Durch umstellen der transformierten Ausgangsgröße $U_C(s)$ nach der Eingangsgröße $U(s)$ ergibt sich die Übertragungsfunktion $G(s)$ des RLC-Serienschwingkreises:

$$u(t) = LC \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_C(t) + RC \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(t) + u_C(t) \quad \Big| \mathscr{L} \tag{12.54}$$

$$U(s) = LC \cdot s^2 \cdot U_C(s) + RC \cdot s \cdot U_C(s) + U_C(s) \tag{12.55}$$

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U(s)} = \frac{\text{Ausgangsgröße}(s)}{\text{Eingangsgröße}(s)} \tag{12.56}$$

$$= \frac{1}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1} \tag{12.57}$$

Die Polstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ entsprechen den Eigenwerten $\lambda_{1/2}$.

3.4.3 Abklingkonstante, Eigen- und Resonanzkreisfrequenz, Güte

Im periodischen Fall ergibt sich die (gedämpfte) Eigenkreisfrequenz ω_d und die Abklingkonstante δ aus den Eigenwerten $\lambda_{1/2}$. Die Größen hängen eng zusammen mit der **Güte** Q_S und der **Resonanzkreisfrequenz** ω_0 eines Schwingkreises (Resonanzkreises). Beide Größen werden als Kenngrößen für Schwingkreise verwendet und ausführlicher in Modul 8 (Frequenzvariable Schaltungen) behandelt.

Der Zusammenhang zwischen ω_d, δ, ω_0 und Q_S soll anhand des RLC-Serienschwingkreises aus Abbildung 12.16a erläutert werden. Die Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ sind nach Gleichung 12.50 gegeben durch:

$$\lambda_{1/2} = \underbrace{-\frac{R}{2L}}_{\delta} \pm \mathrm{j} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}_{\omega_d} \tag{12.58}$$

Der negative Realteil $-\delta$ bestimmt die Abklingrate und der Imaginärteil ω_d die Kreisfrequenz der linear gedämpften, harmonischen Schwingung. Die Eigenkreisfrequenz ω_d lässt sich mit Gl. 12.63 auch in Abhängigkeit von ω_0 und δ ausdrücken.

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{12.59}$$

Das hat den Vorteil, dass die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0 und die Abklingkonstante δ direkt aus den Koeffizienten der DGL abgelesen werden können. Hierfür bietet sich die Form:

$$\ddot{y} + 2\delta \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = b \tag{12.60}$$

für gewöhnliche, homogene, lineare DGLen 2. Ordnung an. Die DGL beschreibt das Verhalten linearer gedämpfter Systeme zweiter Ordnung (mit zwei Energiespeichern).

Die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz entspricht dabei der Resonanzkreisfrequenz ω_0. Bei Anregung eines Schwingkreises mit dessen **Resonanzfrequenz** f_0 tritt eine Resonanz auf. Im Resonanzfall verschwindet der Blindanteil der Gesamtimpedanz $\underline{Z}(\omega)$ (Resonanzbedingung). [Vgl. Modul 8]

Mit der Gesamtimpedanz:

$$\underline{Z}(\omega) = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{12.61}$$

und der Resonanzbedingung:

$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}(\omega_0)\} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \stackrel{!}{=} 0 \tag{12.62}$$

folgt für die Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{12.63}$$

Die Güte Q_S als Maß für die Schwingungsfähigkeit eines Schwingkreises lässt sich ebenfalls aus ω_0 und δ ableiten. Sie ist definiert als Verhältnis der schaltungsintern schwingenden Blindleistung zur schaltungsinternen Verlustleistung im Resonanzfall. Dies entspricht beim RLC-Serienschwingkreis dem Verhältnis von Blindwiderstand der Induktivität $X_{L,0}$ bei Resonanzfrequenz zur Serienresistenz R (ohne Herleitung). Dadurch ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$Q_\mathrm{S} = \frac{X_{L,0}}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\delta} \tag{12.64}$$

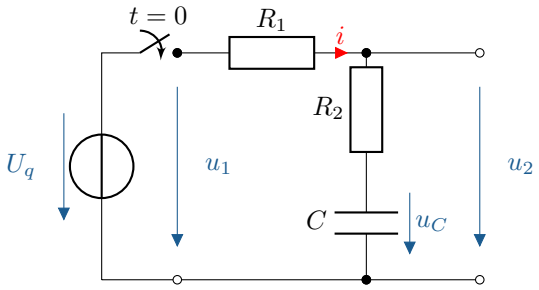
Die Güte ist proportional zum Verhältnis der ungedämpften Eigenkreisfrequenz zur Dämpfungskonstante.

A Übungsaufgaben

A.1 Einschaltverhalten eines RC-Übertragungsgliedes

Gegeben ist das rechts dargestellte Übertragungsglied (Zweitor). Untersucht wird das Einschwingverhalten der Spannung u_2 am Ausgang bei Anschließen einer idealen Gleichspannungsquelle U_q.

Die Schaltung ist vor dem Schaltzeitpunkt $t = 0$ im stationären Zustand mit $u_2(t < 0) = 0$.



a) Stellen Sie die DGL für u_C für $t \geq 0$ auf.

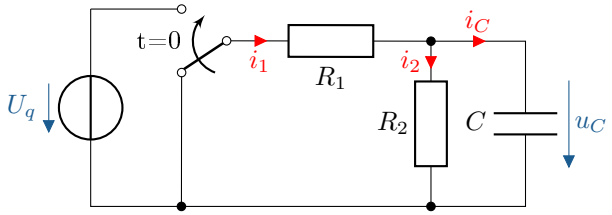
b) Bestimmen Sie die Funktion $u_C(t)$ für $t \geq 0$ inklusive aller Konstanten.

c) Bestimmen Sie die Funktion u_2 für $t \geq 0$ aus der Lösung b) für $u_C(t)$. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

d) Skizzieren Sie qualitativ die Zeitverläufe der Spannungen u_2, u_{R_2} und u_C vom stationären Zustand für $t < 0$ bis die dargestellten Größen eingeschwungen sind ($t = 5\tau$). Kennzeichnen Sie Zeitkonstanten, Anfangs- und Endwerte der Verläufe.

A.2 Einschaltverhalten (DC) eines verlustbehafteten Kondensators

Das Einschaltverhalten der dargestellten Schaltung soll untersucht werden.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter umgelegt, so dass die Gleichspannung U_q an der Schaltung anliegt. Die Kapazität ist vor dem Schaltzeitpunkt vollständig entladen.

a) Bestimmen Sie die Gleichung für die Spannung an der Kapazität $u_C(t)$ für $t \geq 0$.

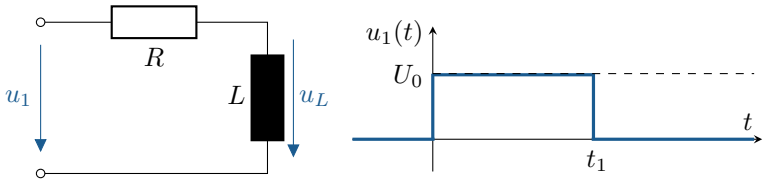
b) Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Spannungen $u_C(t)$ und $u_{R1}(t)$ sowie des Stromes $i_C(t)$. Kennzeichnen Sie charakteristische Punkte.

c) Nach vollständigem Aufladen der Kapazität C auf U_0 wird der Schalter wieder in Ausgangsposition gebracht. Wie lange braucht die Kapazität C, um auf 10 % der Spannung U_0 zu entladen?

d) Die Kapazität wird wie in c) entladen, allerdings mit offenem Schalter (Leerlauf). Wie lange dauert der Entladevorgang (von U_0 bis $10\,\% \cdot U_0$)? Vergleichen Sie die Dauer mit der aus c).

A.3 Schaltverhalten einer RL-Serienschaltung

Das Schaltverhalten, der in der linken Abbildung dargestellten Schaltung, soll untersucht werden. Der Verlauf der Spannung $u_1(t)$ ist in der rechten Abbildung dargestellt.



Vor dem Zeitpunkt $t = 0$ war die Spannung $u_1 = 0$, so dass zum Zeitpunkt $t = 0$ keine Energie in der Spule gespeichert ist. Weiterhin gilt $t_1 \gg 5\tau$.

a) Es soll der Aufladevorgang $(0 < t < t_1)$ betrachtet werden. Es gilt $\tau = 1\,ms$ und $R = 100\,\Omega$. Wie groß ist die Induktivität L?

b) Es soll weiterhin der Aufladevorgang $(0 < t < t_1)$ betrachtet werden. Gegeben ist nun die Spannung $U_0 = 1\,kV$. Wie groß ist der Strom durch die Spule i_L zum Zeitpunkt $t = 3\tau$?

c) Es wird weiterhin der Aufladevorgang betrachtet. Nun gilt jedoch: $R = 5\,\Omega$, $L = 100\,mH$ und $U_0 = 2{,}8\,kV$.

c1) Nach welcher Zeit t_0 ist der Einschwingvorgang abgeschlossen?

c2) Wie groß sind der Spulenstrom i_L und die Spulenspannung u_L nach $t = 50\,ms$?

d) Nun soll der Entladevorgang $(t > t_1)$ betrachtet werden. Es gelten die Werte aus dem vorangehenden Aufgabenteil. Wie groß sind Spulenstrom i_L und Spulenspannung u_L nach $t = t_1 + 50\,ms$?

e) Zeichnen Sie die zeitlichen Verläufe der Spulenspannung u_L, des Stromes i_L, sowie der Spannung u_R. Kennzeichnen Sie die Zeitkonstante τ, sowie weitere charakteristische Punkte. Nehmen Sie an $t_1 = 120\,ms$.

A.4 Einschaltverhalten einer RL-Serienschaltung

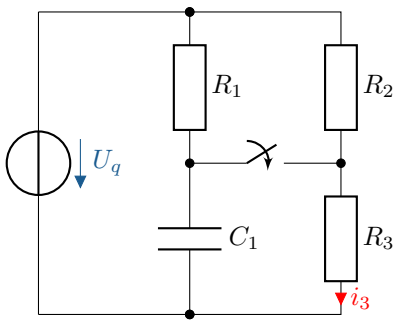
Das Einschaltverhalten einer Serienschaltung aus ohmschem Widerstand R und Induktivität $L = 100\,mH$ soll untersucht werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird an die Serienschaltung eine Spannung $u = U_0 = 35\,V$ angelegt. Für $t \leq 0$ gilt $u = 0$. Die Spulenspannung zum Zeitpunkt $t_1 = 3\,ms$ ist bekannt und beträgt $u_L(t_1) = 26\,V$.

Bestimmen Sie die Zeitkonstante τ, den Widerstand R, sowie die Spannung $u_R(t = 5\,ms)$.

A.5 ET3 Ü8 Schaltverhalten eines RC-Netzwerks

Der Schalter in der rechts dargestellten Schaltung wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen.

$R_1 = 1{,}2\,\mathrm{k\Omega}$ $\quad R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$
$C_1 = 1\,\mu\mathrm{F}$ $\quad R_3 = 500\,\Omega$
$U_q = 250\,\mathrm{V}$

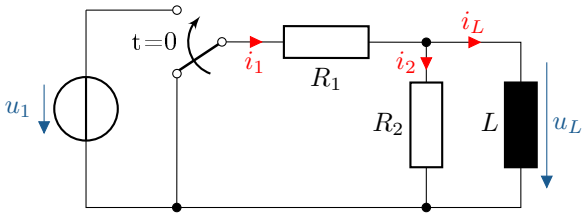


Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes i_3 durch den Widerstand R_3 und zeichnen Sie diesen als Funktion von der Zeit (Liniendiagramm) für $-\tau < t < 5\tau$.

Das Netzwerk sei zum Zeitpunkt $-\tau$ in einem stationären Zustand. Dabei ist τ die Zeitkonstante des Netzwerks.

A.6 Schaltvorgang bei Wechselspannung

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird in der gezeigten Schaltung die Wechselspannung $u_1(t)$ an die Gesamtschaltung aus R_1 in Reihe zur Parallelschaltung aus R_2 und C angelegt. Für $t < t_0$ ist die Schaltung im stationären Zustand. Die Quellenspannung ist gegeben durch $u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$.



a) Welcher Strom $i_{L,e}(t)$ stellt sich im eingeschwungenen Zustand bei der Induktivität ein? Bestimmen Sie die Amplitude und den Nullphasenwinkel des Stromes.

b) Stellen Sie die DGL von $i_L(t)$ für $t \geq t_0$ auf. Welche Zeitkonstante ergibt sich für den flüchtigen Zustand? Hinweis (DGL): $\tau \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L + i_L = \text{störterm}$

c) Wann muss geschalten werden, damit der flüchtige Zustand von $i_L(t)$ minimal wird? Bei welchen möglichen Schaltzeitpunkten wird dieser maximal? Geben Sie die Antwort mithilfe der Phasenverschiebung φ zwischen $u_1(t)$ und $i_L(t)$ an.

d) Sei zum Schaltzeitpunkt t_0 der eingeschwungene Zustand von $i_{L,e}(t)$ bei seinem negativen Scheitelwert. Die Zeitkonstante τ beträgt eine Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Bestimmen Sie das Strommaximum während des Einschwingvorgangs.

B Lösungen zu den Übungsaufgaben

B.1 Einschaltverhalten eines RC-Übertragungsgliedes

a) DGL für $u_C(t \geq 0)$:

$$R_1 \cdot i + R_2 \cdot i + u_C = U_q$$

$$\underbrace{(R_1 + R_2) \cdot C}_{=\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_q$$

b) Zeitverlauf u_C für $t \geq 0$:

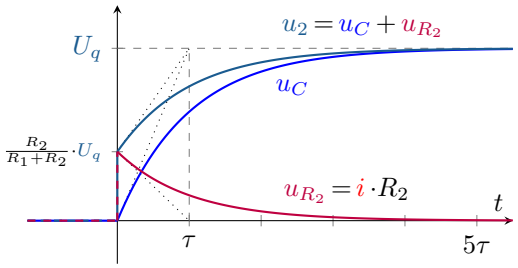
$$
\begin{aligned}
u_{C,\mathrm{f}} = u_{C,\mathrm{h}} &= K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} && \text{mit } \tau = (R_1 + R_2) \cdot C \\
u_{C,\mathrm{e}} = u_{C,\mathrm{p}} &= U_q \\
u_C = u_{C,\mathrm{f}} + u_{C,\mathrm{e}} &= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_q \\
u_C(0) &= K \cdot \cancel{e^{0}} + U_q \stackrel{!}{=} 0 && \Longrightarrow K = -U_q \\
u_C(t) &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_q
\end{aligned}
$$

c) Spannung $u_2(t)$ aus $u_C(t)$ für $t \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
u_2 &= i \cdot R_2 + u_C \\
&= C \cdot R_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C \\
&= C \cdot R_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_q + \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_q \\
&= \frac{C \cdot R_2}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U_q + \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_q \\
&= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U_q + \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_q \\
&= \left(1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_q \\
&= \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \cdot U_q
\end{aligned}
$$

d) Skizze für u_C, u_2 und u_{R_2}.

$$
\begin{aligned}
u_{R_2}(0^-) &= u_2(0^-) = 0 \\
u_{R_2}(0^+) &= u_2(0^+) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_q
\end{aligned}
$$



B.2 Einschaltverhalten (DC) eines verlustbehafteten Kondensators

a) ESB ($t \geq 0$): U_q an Schaltung: R_1 in Serie mit Parallelschaltung aus R_2 und C.

1. DGL aufstellen für u_C ($t \geq 0$)

$$u_{R1} + u_C = U_q \qquad u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R1}$$
$$R_1 \cdot i_{R1} + u_C = U_q \qquad i_{R1} = i_{R2} + i_C$$
$$R_1 \cdot (i_C + i_{R2}) + u_C = U_q \qquad i_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C \qquad i_{R2} = \frac{u_C}{R_2}$$
$$C \cdot R_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + \frac{R_1}{R_2} \cdot u_C + u_C = U_q \qquad \Big| \cdot R_2$$
$$C \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + (R_1 + R_2) \cdot u_C = U_q \cdot R_2 \qquad \Big| : (R_1 + R_2)$$
$$\underbrace{C \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}_{\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C = U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2. Homogene Lösung und 3. Partikuläre Lösung ($t \to \infty$)

$$u_{C,h} = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = C \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$
$$u_{C,p} = U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad C \text{ entspricht Leerlauf}$$

4. Überlagerung und 5. Konstante K bestimmen

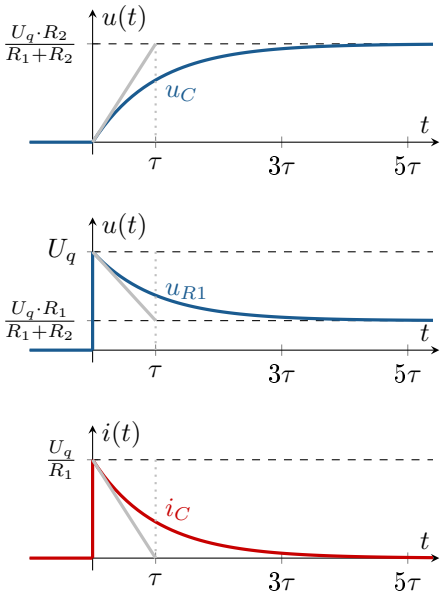
$$u_C(t) = u_{C,h} + u_{C,p} = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$u_C(0) = K \cdot \cancel{\mathrm{e}^{0}} + U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow K = -U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$u_C(t) = U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

b) Skizze $u_C(t)$, u_{R_1} und i_C mit $u_C(t)$ aus a):

$$\begin{aligned} u_{R1}(t) &= U_q - u_C(t) \\ &= U_q - U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ &= U_q \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} + U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C(t) \\ &= C \cdot U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= U_q \cdot \frac{\cancel{C} \cdot \cancel{R_2}}{\cancel{R_1 + R_2}} \cdot \frac{\cancel{R_1 + R_2}}{\cancel{C} \cdot R_1 \cdot \cancel{R_2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{U_q}{R_1} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Zeitverläufe:



c) Entladen von C über Parallelschaltung aus R_1 und R_2 für $t' \geq 0$ bis $U_0 \cdot 10\,\%$
Entlade-Zeitkonstante: $\tau_1 = \tau = C \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$:

$$\begin{aligned} u_C(t') = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t'}{\tau}} &\stackrel{!}{=} U_0 \cdot 10\,\% \\ \mathrm{e}^{-\frac{t'}{\tau}} &= \frac{1}{10} \\ -\frac{t'}{\tau} &= \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln(10) \\ t' &= \ln(10) \cdot \tau \approx 2{,}3025 \cdot \tau \end{aligned}$$

d) Entladen von C über R_2, wenn Schalter öffnet (Leerlauf) für $t' \geq 0$ bis $U_0 \cdot 10\,\%$.
Lösung wie bei Aufgabe c) nur mit Entlade-Zeitkonstante $\tau_2 = R_2 \cdot C$.
Die Kapazität entlädt langsamer als in Aufgabe c) ($\tau_2 > \tau$), da $R_2 > R_1 || R_2$.

B.3 Schaltverhalten einer RL-Serienschaltung

DGL (allgemein): $\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i = \frac{U_1}{R_1}$ (Einschalten)

Lösungsansatz: $i = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ mit $\tau = \frac{L}{R}$

a) Induktivität berechnen.

$$\tau = \tfrac{L}{R} \qquad L = \tau \cdot R = 1\,ms \cdot 100\,\Omega = 0{,}1\,H$$

b) Aufladevorgang, Spulenstrom i_L zum Zeitpunkt $t = 3\tau$.

$$\begin{aligned} i(t = 3 \cdot \tau) &= \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{1\,kV}{100\,\Omega} \cdot (1 - e^{-3}) = 10\,A \cdot 0{,}95 \\ &= 9{,}5\,A \end{aligned}$$

c) Zeit bis zum Abschluss des Einschwingvorgangs, Spulen -Strom und -Spannung nach $50\,ms$.

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}1\,H}{5\,\Omega} = 0{,}02\,s = 20\,ms$$

$$\begin{aligned} i(t = 50\,ms) &= \frac{U_0}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= \frac{2{,}8\,kV}{5\,\Omega} \cdot (1 - e^{-\frac{50\,ms}{20\,ms}}) \\ &= 0{,}56\,kA \cdot (0{,}918) = 0{,}514\,kA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_L &= L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L = \frac{L}{R} \cdot U_0 \cdot (-\frac{1}{\tau}) \cdot (-e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ &= U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_L(t = 50\,ms) &= 2{,}8\,kV \cdot e^{-\frac{50\,ms}{20\,ms}} = 229{,}8\,V \\ t_0 &= 5 \cdot \tau = 5 \cdot 20\,ms = 100\,ms \end{aligned}$$

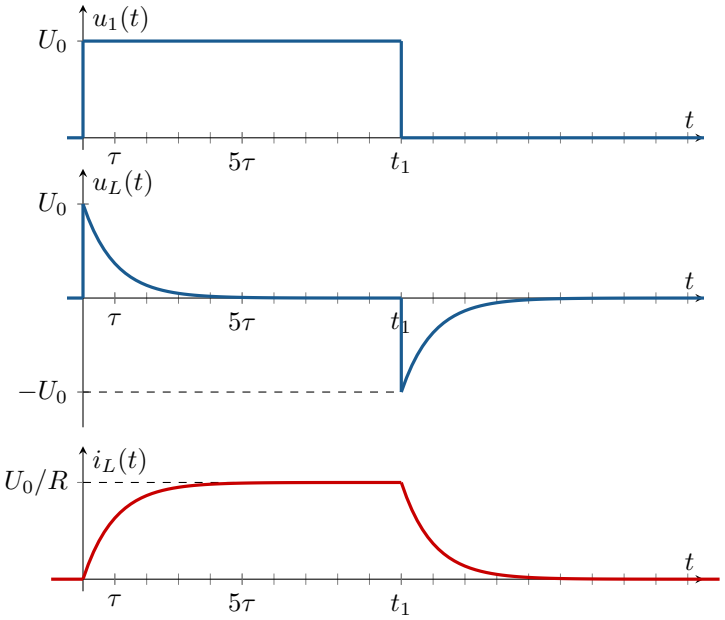
d) Entladevorgang, Spulen -Strom und -Spannung nach $t = t_1 + 50\,ms$.

DGL (Entladevorgang): $$\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = 0$$

Lösungsansatz: $$i = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\begin{aligned} u_L = L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i &= \frac{L}{R} \cdot u_0 \cdot (-\frac{1}{\tau}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i(50\,ms) &= \frac{2{,}8\,kV}{5\Omega} \cdot e^{-\frac{50\,ms}{20\,ms}} = 46\,A \\ u_L(50\,ms) &= -2{,}8\,kV \cdot e^{-\frac{50\,ms}{20\,ms}} = -230\,V \end{aligned}$$

e) Zeitliche Verläufe von u_L, i_L, u_R.



B.4 Einschaltverhalten einer RL-Serienschaltung

DGL: $$\frac{L}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = \frac{U_0}{R}$$

Lösung: $$i = \frac{U_0}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$
\begin{aligned}
u_L &= L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \\
u_R &= u - u_L = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\
i(t = 3\,ms) &= \frac{U_0}{R} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\
u_L(t = 3\,ms) &= U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 26\,V \\
\frac{u_L(t = 3\,ms)}{U_0} &= e^{-\frac{t}{\tau}} \\
-\frac{t}{\tau} &= \ln\left(\frac{u_L(t = 3ms)}{U_0}\right) \\
\tau &= -\frac{t}{\ln\left(\frac{u_L(t=3ms)}{U_0}\right)} = -\frac{3ms}{\ln\left(\frac{26\,V}{35\,V}\right)} = 10{,}1\,ms \\
R &= \frac{L}{\tau} = \frac{100\,mH}{10{,}1\,ms} = 9{,}9\,\Omega \\
u_R(t = 5\,ms) &= U_0 \cdot (1 - e^{\frac{-5\,ms}{10{,}1\,ms}}) \\
&= 35\,V \cdot 0{,}39 = 13{,}65\,V
\end{aligned}
$$

B.5 ET3 Ü8 Schaltverhalten eines RC-Netzwerks

DGL für u_C aufstellen und darüber mit $i_3 = \frac{u_C}{R_3}$ den Strom i_3 bestimmen.
R_1 und R_2 nach dem Schaltzeitpunkt $(t > 0)$ als Parallelschaltung R_{12} zusammenfassen.

1. DGL für u_C $(t > 0)$ mit $i_3 = \frac{u_C}{R_3}$:

$$
\begin{aligned}
U_q &= u_{12} + u_C && \text{mit} \quad u_{12} \text{ über Parallelschaltung aus } R_1 \text{ und } R_2 \\
&= R_{12} \cdot i_{12} + u_C && \text{mit} \quad R_{12} = R_1 || R_2, \qquad i_{12} = i_C + i_3 \\
&= R_{12} \cdot (i_C + i_3) + u_C && \text{mit} \quad i_C = C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C, \qquad i_3 = \frac{u_C}{R_3} \\
&= R_{12} \cdot (C \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + \frac{u_C}{R_3}) + u_C \\
&= C \cdot R_{12} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + \left(\frac{R_{12}}{R_3} + 1\right) \cdot u_C && \Big| \cdot R_3 \\
U_q \cdot R_3 &= C \cdot R_{12} \cdot R_3 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + (R_{12} + R_3) \cdot u_C && \Big| : (R_{12} + R_3) \\
U_q \cdot \frac{R_3}{R_{12} + R_3} &= \underbrace{C \cdot \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3}}_{\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_C + u_C && \Longrightarrow \quad \tau = C \cdot \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3}
\end{aligned}
$$

3. Homogene Lösung (flüchtig) und **2. Partikuläre Lösung** ($t \to \infty$, eingeschwungen):

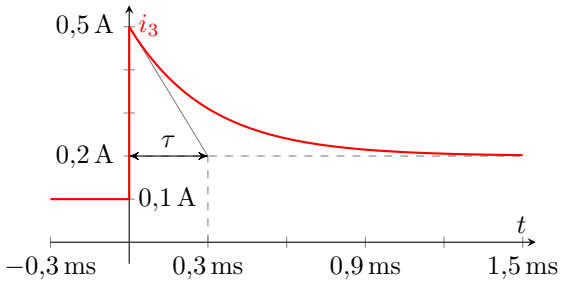
$$
\begin{aligned}
u_{C,\mathrm{h}} &= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} && \text{mit} \quad \tau = C \cdot \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} \\
u_{C,\mathrm{p}} &= U_q \cdot \frac{R_3}{R_{12} + R_3} && C_1 \text{ entspricht Leerlauf}
\end{aligned}
$$

4. Überlagerung und **5. Konstante(n) bestimmen**:

$$
\begin{aligned}
u_C &= u_{C,\mathrm{h}} + u_{C,\mathrm{p}} \\
u_C(t=0) &= K \cdot \cancel{\mathrm{e}^{0}} + U_q \cdot \frac{R_3}{R_{12}+R_3} \overset{!}{=} U_q \qquad \text{(Anfangsbedingung)} \\
\Rightarrow K &= U_q \cdot \left(1 - \frac{R_3}{R_{12}+R_3}\right) \\
&= U_q \cdot \frac{R_{12}}{R_{12}+R_3} \\
u_C &= U_q \cdot \left(1 - \frac{R_3}{R_{12}+R_3}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_q \cdot \frac{R_3}{R_{12}+R_3} \qquad \Big| : R_3 \\
i_3 &= U_q \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_{12}+R_3}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + U_q \cdot \frac{1}{R_{12}+R_3}
\end{aligned}
$$

Zeitkonstante τ sowie Anfangs- und Endwerte des Stromes i_3 für Skizze:

$$
\begin{aligned}
R_{12} &= R_1 || R_2 = \frac{1{,}2\,\mathrm{k\Omega} \cdot 2\,\mathrm{k\Omega}}{1{,}2\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}} = 750\,\Omega \\
\tau &= C_1 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12}+R_3} \\
&= 1\,\mu\mathrm{F} \cdot \frac{750\,\Omega \cdot 500\,\Omega}{750\,\Omega + 500\,\Omega} = 0{,}3\,\mathrm{ms} \\
i_3(t=0_-) &= \frac{U_q}{R_2+R_3} = \frac{250\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{k\Omega}+500\,\Omega} = 0{,}1\,\mathrm{A} \\
i_3(t=0_+) &= \frac{U_q}{R_3} = \frac{250\,\mathrm{V}}{500\,\Omega} = 0{,}5\,\mathrm{A} \\
i_3(t\to\infty) &= \frac{U_q}{R_{12}+R_3} = \frac{250\,\mathrm{V}}{750\,\Omega+500\,\Omega} = 0{,}2\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$



B.6 Schaltvorgang bei Wechselspannung

a) Eingeschwungener Zustand ($t \to \infty$) mit komplexer Wechselstromrechnung:

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_{L,e} &= \frac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_L} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_L} \cdot \frac{R_2 || \underline{Z}_L}{R_1 + R_2 || \underline{Z}_L} \qquad \text{mit} \quad \underline{U}_1 = \hat{U}_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = \hat{U}_1 \\
&= \frac{\hat{U}_1}{\underline{Z}_L} \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot \underline{Z}_L}{R_2 + \underline{Z}_L}}{R_2 + \frac{R_1 \cdot \underline{Z}_L}{R_2 + \underline{Z}_L}} \qquad \Big| \cdot \frac{R_2 + \underline{Z}_L}{R_2 + \underline{Z}_L} \\
&= \frac{\hat{U}_1}{\cancel{\underline{Z}_L}} \cdot \frac{R_2 \cdot \cancel{\underline{Z}_L}}{R_1 \cdot (R_2 + \underline{Z}_L) + R_2 \cdot \underline{Z}_L} \\
&= \hat{U}_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 \cdot R_2 + \mathrm{j}\omega L \cdot (R_1 + R_2)} \\
\varphi &= 0 + \cancel{\arctan\left(\frac{0}{R_2}\right)} - \arctan\left(\frac{\omega L \cdot (R_1+R_2)}{R_1 \cdot R_2}\right) \\
&= -\arctan\left(\frac{\omega L \cdot (R_1+R_2)}{R_1 \cdot R_2}\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0 \\
\hat{I}_{L,e} &= \hat{U}_1 \cdot \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 \cdot R_2)^2 + (\omega L \cdot (R_1+R_2))^2}} \\
i_{L,e}(t) &= \hat{I}_{L,e} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{Strom eilt nach } u_1 \text{ mit } \varphi < 0
\end{aligned}
$$

b) DGL für $i_L(t)$ $(t \geq t_0)$:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_{R_1} + u_L \\
&= R_1 \cdot (i_2 + i_L) + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L \\
&= R_1 \cdot \left(\frac{u_L}{R_2} + i_L \right) + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L \\
&= \frac{R_1}{R_2} \cdot L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L + R_1 \cdot i_L + L \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L \\
&= L \cdot \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L + R_1 \cdot i_L \qquad \Big| \cdot \frac{1}{R_1} \\
\frac{u_1}{R_1} &= \underbrace{L \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}_{=\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L + i_L \\
\tau &= L \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{L}{R_1 || R_2}
\end{aligned}$$

c) Schaltzeitpunkte für minimalen und maximalen flüchtigen Zustand (t_{min}, t_{max}).
Kein Einschwingen, wenn $i_{L,f} = 0 \Leftrightarrow i_L = i_{L,e} \Leftrightarrow i_L(t_0) = i_{L,e}(t_0)$ gilt.

D.h. für verschwindenden flüchtigen Zustand (kein Einschwingvorgang) folgt:

$$\begin{aligned}
\text{AB:} \quad i_L(t_0) = i_{L,e}(t_0) = \hat{I}_{L,e} \cdot \sin(\omega t_0 + \varphi) &\stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow i_L(t') = i_{L,e}(t') \Leftrightarrow i_{L,f}(t') = 0 \\
\Leftrightarrow \omega t_0 + \varphi &\stackrel{!}{=} 0 + n \cdot \pi \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N} \\
t_{min} &= \frac{n \cdot \pi - \varphi}{\omega} \qquad \text{entspricht Nulldurchgängen von } i_{L,e}
\end{aligned}$$

Und für maximalen flüchtigen Zustand (Schaltzeitpunkt 90° versetzt) folgt:

$$t_{max} = \frac{n \cdot \pi - \varphi}{\omega} + \frac{T}{4} \qquad \text{entspricht Extremstellen von } i_{L,e}$$

d) Strommaximum während des Einschwingvorgangs gesucht. Schaltzeitpunkt t_0 bei negativem Scheitelwert von $i_{L,e}$. Sei $t' = t - t_0$, d.h. $t' = 0$ zum Schaltzeitpunkt, so folgt:

$$\begin{aligned}
i_L(t') &= i_{L,h}(t') + i_{L,e}(t') \\
&= K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t'}{\tau}} - \hat{I}_{L,e} \cdot \cos(\omega t') \\
\text{AB:} \quad i_L(t' = 0) = K - \hat{I}_{L,e} &\stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad K = \hat{I}_{L,e} \\
i_L(t') &= \hat{I}_{L,e} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{t'}{\tau}} - \cos(\omega t') \right)
\end{aligned}$$

Maximum bei positivem Scheitelwert (180° nach t_0):

$$\begin{aligned}
i_{L,max} &= i_L(t' = \frac{\pi}{\omega}) \\
&= \hat{I}_{L,e} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{T/2}{\tau}} - \cos(\pi) \right) \\
&= \hat{I}_{L,e} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} + 1 \right) = 1{,}606 \cdot \hat{I}_{L,e}
\end{aligned}$$

Literatur

[1] Duden online. *verschiedene Einträge*. 2024. URL: https://www.duden.de (besucht am 02. 08. 2024).

[2] Hans Hagmann. *Grundlagen der Elektrotechnik*. dt. 18. Auflage. AULA-Verlag, 2020. ISBN: 978-3-89104-830-6.

[3] Wilfried Weißgerber. *Elektrotechnik für Ingenieure 3*. dt. 10. Auflage. Springer Vieweg, 2018. ISBN: 978-3-658-21825-6.

[4] Manfred Albach. *Elektrotechnik 2, Periodische und nicht periodische Signalformen*. dt. 3. Auflage. Pearson Deutschland GmbH, 2020. ISBN: 978-3-86894-400-6.

Index

A

Anfangsbedingungen 12

D

Differentialgleichung
- Charakteristische Polynom 13, 14
- Eigenwert 13
- Lösung der homogenen 13
- Lösung der inhomogenen 13
- Ordnung 10
- partikulare Lösung 13
- Störfunktion 10

E

Eigenschaft
- harmonisch 6
- homogen 6
- linear 6
- Linearität 10
- Ordnung 6
- periodisch 6
- zeitinvariant 6
- Zeitinvarianz 10

Eigenwert 34

F

Fall
- aperiodischer Fall 29, 30
- aperiodischer Grenzfall 29, 31
- periodischer Fall 29, 31

G

Größe
- Abklingkonstante 6, 32, 35
- Dämpfungskonstante 6
- Diskriminante 29
- Eigenfrequenz 6
- Eigenkreisfrequenz, gedämpft 32, 35
- Güte 35
- Resonanzfrequenz 6
- Resonanzkreisfrequenz 35
- Zeitkonstante 6, 17

L

lineare, zeitinvariante Systeme (LZI-Systeme) 10

O

Ortskurve 34

R

Resonanzfrequenz 35

S

Schalten 6
Schalter 6

V

Vorgang
- Ausgleichsvorgang 6
- Ausschwingvorgang 7
- Einschwingvorgang 6, 7
- Schaltvorgang 6, 7
- Transiente 6, 7

Z

Zustand
- ausgeglichen 5
- eingeschwungen 5, 12
- flüchtig 12
- stationär 5