



GET it digital

Modul 3:

# Elektrische Bauelemente

Prof. Dr.-Ing. Michael Hillgärtner  
Sven Micun, B.Eng.  
Filimon Stergianos

Ein Kooperationsvorhaben  
empfohlen durch die

gefördert durch



Ministerium für  
Kultur und Wissenschaft  
des Landes Nordrhein-Westfalen



Stand: 2. September 2025



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß [TULLU-Regel](#) bitte wie folgt: „GET it digital Modul 3: Elektrische Bauelemente“ von M. Hillgärtner, S. Micun, F. Stergianos Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Das Werk ist online verfügbar unter:

<https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-3-elektrische-bauelemente>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Leitfähigkeit und Widerstand</b>	<b>1</b>
2.1	Die elektrische Leitfähigkeit	2
2.2	Die elektrische Leitfähigkeit	3
2.3	Die elektrische Leitfähigkeit	3
2.4	Die elektrische Leitfähigkeit	3
2.5	Driftverhalten von Elektronen in Leitern	4
2.6	Mathematische Zusammenhänge der Leitfähigkeit	6
2.7	Widerstand als Bauelement	8
2.8	PTC und NTC	10
<b>3</b>	<b>Spannungs- und Stromquelle</b>	<b>13</b>
3.1	Spannungsquellen	13
3.2	Modellierung realer Spannungsquellen	14
3.3	Stromquellen	15
3.4	Modellierung realer Stromquellen	15
3.5	Umrechnung von Spannungs und Stromquelle	16
3.6	Verschiedene Spannungs- und Stromquellen	17
<b>4</b>	<b>Kapazität und Kondensator</b>	<b>18</b>
4.1	Die elektrische Kapazität $C$	18
4.2	Der Kondensator als Bauelement	20
4.3	Das Dielektrikum	21
4.4	Die elektrische Flussdichte	22
4.5	Schaltverhalten eines Kondensators	24
<b>5</b>	<b>Induktivität und Spule</b>	<b>26</b>
5.1	Die Induktivität $L$	26
5.2	Die Spule als Bauelement	28
5.3	Die Permeabilität	30
5.4	Die magnetische Feldstärke	31
5.5	Schaltverhalten einer Spule	31
<b>A</b>	<b>Übungsaufgaben</b>	<b>35</b>
A.1	Materialabhängigkeit des Widerstandes $R$	35
A.2	Elektrischer Widerstand	35
A.3	Elektrischer Widerstand eines beschichteten Drahts	35
A.4	Reale Stromquellen	36
A.5	Spannungsquelle	36
A.6	Kapazität und Kondensator	36
A.7	Induktivität und Spule	36
A.8	Induktivität, Magnetische Flussdichte und Magnetfeldenergie	37
<b>B</b>	<b>Lösungen zu den Übungsaufgaben</b>	<b>37</b>
B.1	Materialabhängigkeit des Widerstandes $R$	37
B.2	Elektrischer Widerstand	37
B.3	Elektrischer Widerstand eines beschichteten Drahts	38
B.4	Reale Stromquellen	39
B.5	Spannungsquelle	39
B.6	Kapazität und Kondensator	39
B.7	Induktivität und Spule	40
B.8	Induktivität, Magnetische Flussdichte und Magnetfeldenergie	40



# 1 Einleitung

Elektrische Bauelemente lassen sich in verschiedene Kategorien unterteilen, je nach ihrer Funktion und Arbeitsweise. Es gibt Widerstände, Kondensatoren, Spulen, aber auch Dioden und Transistoren, auf welche in einem späteren Kapitel eingegangen wird. Elektrische Bauelemente müssen über eine Quelle (Strom- oder Spannungsquelle) mit Energie versorgt werden, um ihre gewünschte Funktion zu erzielen. Abbildung 1.1 zeigt verschiedene Bauelemente.

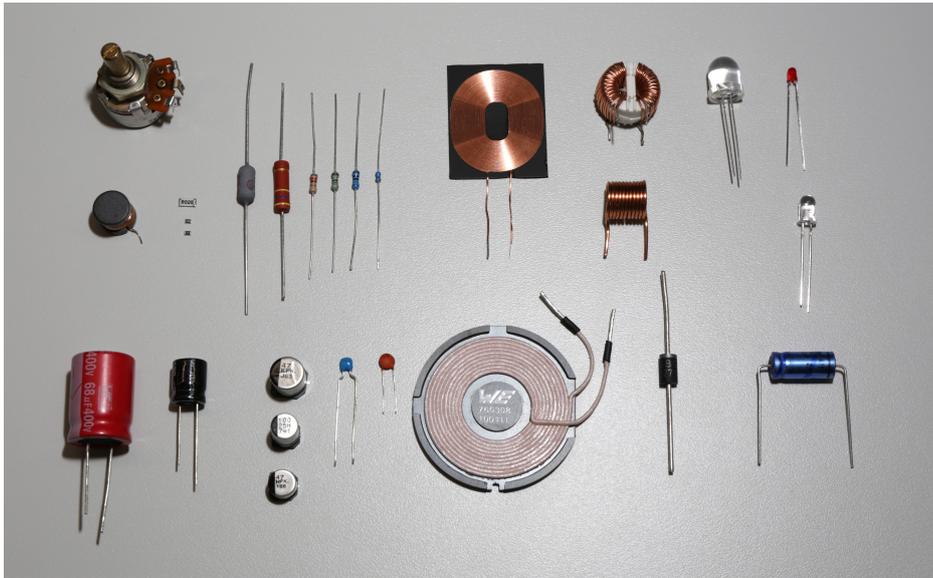


Abbildung 1.1: **Verschiedene elektrische Bauelemente.** Zeigt elektrische Bauelemente die in Schaltungen verwendet werden, wie Widerstände, Kondensatoren, Spulen und Halbleiterbauelemente. Jedes Bauelement hat spezifische Eigenschaften und Funktionen zur Steuerung von Strom und Spannung in einem elektrischen Netzwerk.

Jedes dieser Bauelemente nutzt die grundlegenden Prinzipien der Elektrotechnik, um spezifische Funktionen in einem elektrischen Schaltkreis zu erfüllen. Durch die Kombination verschiedener Bauelemente können komplexe Schaltungen erstellt werden, die in der Lage sind, anspruchsvolle Aufgaben zu erfüllen, wie das Verarbeiten von Daten in einem Computer oder das Regulieren der Geschwindigkeit in einem Elektromotor.

Der Übergang von den grundlegenden physikalischen Konzepten zu den elektrischen Bauelementen ist also ein Schritt von der Theorie zur Praxis, der es uns ermöglicht, unser theoretisches Wissen in realen Anwendungen umzusetzen. Dieses Kapitel führt die drei grundlegenden elektrischen Eigenschaften von Bauelementen, sowie die Spannungs- und Stromquellen, ein.

## 2 Leitfähigkeit und Widerstand

Die Leitfähigkeit oder auch der Leitwert  $G$  beschreibt, wie der Name schon impliziert, die Fähigkeit eines Materials elektrischen Strom zu leiten. Je größer der Wert, desto besser leitet ein Material, sprich, umso einfacher können sich die Ladungsträger im Material bewegen. Diese Eigenschaft basiert auf den Experimenten eines deutschen Experimentalphysikers Georg Simon Ohm anfang des 19. Jahrhunderts, in welchen er herausfand, dass sich der Strom proportional zur angelegten Spannung verhält. Der Kehrwert des Leitwertes ist der heute gebräuchlichere ohm'sche Widerstand  $R$ . Der Leitwert  $G$  hat die Einheit Siemens (S), der ohmsche Widerstand die Einheit Ohm ( $\Omega$ ).

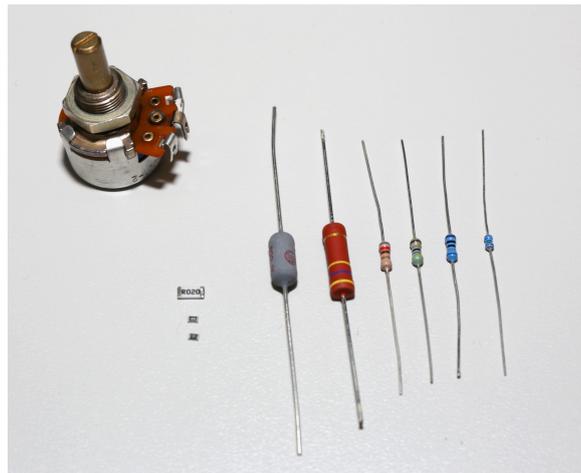


Abbildung 2.1: **Unterschiedliche Ausführungen von Widerständen.** Darunter Drahtwiderstände, Potentiometer und SMD-Widerstände. Die Bauweise und das Material bestimmen die elektrischen Eigenschaften, wie Widerstandswert, Belastbarkeit und Temperaturkoeffizient.

In der Schaltungsentwicklung wird die physikalische Eigenschaft des ohm'schen Widerstandes genutzt, um die gewünschten Funktionen zu realisieren. Die Abbildung 2.1 zeigt verschiedene Ausführungen des Bauelements elektrischer Widerstand. Unabhängig von der Ausführung, basieren alle ohm'schen Widerstände auf den grundlegenden Prinzipien der Physik, auf welche im Folgenden näher eingegangen wird.

## Lernziele: Leitfähigkeit und Widerstand

Die Studierenden

- kennen das elektrische Bauelement Widerstand.
- können die unterschiedlichen Bauteilausführungen von Widerständen erklären.
- können anhand des spezifischen Widerstand  $\rho$  oder des spezifischen Leitwertes  $\kappa$  Berechnungen durchführen.
- können die Unterschiede in der Leitfähigkeit verschiedener Materialien basierend auf deren atomarer Struktur und Temperatur analysieren.

### 2.1 Die elektrische Leitfähigkeit

Aus Modul 1 ist die Definition der Stromdichte  $J$  und des Stromes  $I$  bekannt. Durch Einsetzen der Formeln 2 und 3 in Formel 1 ergibt sich die Formel 4:

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta A} \quad (2.1)$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (2.2)$$

$$\Delta V = \Delta A \cdot \Delta x \Leftrightarrow \Delta A = \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad (2.3)$$

$$J = \frac{\Delta Q \cdot \Delta x}{\Delta t \cdot \Delta V} \quad (2.4)$$

## 2.2 Die elektrische Leitfähigkeit

Durch Einsetzen der aus Modul 1 bekannten Driftgeschwindigkeit  $v_{el}$  und der Raumladungsdichte  $\rho$  in die Formel 4, ergibt sich die Formel 7 für die Stromdichte.

$$v_{el} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.5)$$

$$\rho = \frac{\Delta x}{\Delta V} \quad (2.6)$$

$$\vec{J} = \rho \cdot v_{el} \quad (2.7)$$

Da die Geschwindigkeit immer einen Betrag und eine Richtung hat, ist die Stromdichte ebenfalls ein Vektor.

## 2.3 Die elektrische Leitfähigkeit

Die Driftgeschwindigkeit  $v_{el}$  der freien Ladungsträger verhält sich proportional zum elektrischen Feld  $\vec{E}$ , jedoch in entgegengesetzter Richtung. Der Proportionalitätsfaktor wird auch als Elektronenbeweglichkeit  $\mu_e$  bezeichnet.

$$v_{el} = -\mu_e \cdot \vec{E} \quad (2.8)$$

Die Raumladungsdichte  $\rho$  setzt sich aus der Elementarladung  $e^-$  und der Ladungsträgerdichte  $n_e$ , zusammen. Aufgrund der negativen Ladung von Elektronen, ergibt sich ein negatives Vorzeichen.

$$\rho = -n_e \cdot e^- \quad (2.9)$$

Das Einsetzen von  $v_{el}$  und  $\rho$  in die Formel 7 ergibt den folgenden Ausdruck:

$$\vec{J} = (-n_e \cdot e^-) \cdot (-\mu_e \cdot \vec{E}) \quad (2.10)$$

## 2.4 Die elektrische Leitfähigkeit

Die Minuszeichen heben sich auf und es ergibt sich folgende Formel für die Stromdichte  $\vec{J}$ :

$$\vec{J} = n_e \cdot \mu_e \cdot e^- \cdot \vec{E} \quad (2.11)$$

Die materialabhängigen Komponenten  $n_e$  und  $\mu_e$  sowie die Naturkonstante  $e^-$  ergeben multipliziert die spezifische Leitfähigkeit  $\kappa$ :

$$\kappa = n_e \cdot \mu_e \cdot e^- \quad (2.12)$$

Zusammengefasst ergibt diese Darstellung die Beschreibung des ohmschen Gesetzes:

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \leftrightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\kappa} \quad (2.13)$$

$$U_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} \quad (2.14)$$

Da das elektrische Feld parallel zur Leitungslänge verläuft, ergibt sich das Skalarprodukt:

$$U_{12} = \int_{x=0}^{x=l} \vec{E} dx \quad (2.15)$$

Durch Einsetzen der umgestellten Formel 13 nach  $\vec{E}$ , folgt:

$$U_{12} = \int_0^l \frac{J}{\kappa} dx \quad (2.16)$$

Da es sich um ein homogenes Material handelt ist das  $\kappa$  konstant.

$$U_{12} = \frac{1}{\kappa} \cdot \int_0^l J dx \quad (2.17)$$

Die folgende Formel für die Stromdichte  $J$  ist aus Modul 1 bekannt:

$$J = \frac{I}{A} \quad (2.18)$$

Durch Einsetzen der Formel ergibt sich folgender Ausdruck:

$$U_{12} = \frac{1}{\kappa} \cdot \int_0^l \frac{I}{A} dx \quad (2.19)$$

Die elektrische Leitfähigkeit sagt aus, wie gut ein Material Ladungsträger transportieren kann, also wie gut elektrischer Strom durch sie fließt. Sehr gut leitfähige Materialien werden Leiter (im Extremfall auch Supraleiter) genannt, während sehr schlecht leitende Materialien als Isolatoren bezeichnet werden. Zu den leitfähigen Medien zählen Metalle wie Kupfer, Silber, Aluminium und Gold, welche in der Elektrotechnik am häufigsten verwendet werden. Als Isolatoren werden zum Beispiel Kunststoffe (Polyethylen (PE), Polytetrafluorethylen (PTFE oder Teflon), Polyvinylchlorid (PVC) etc.), speziell für die Anwendung als Isolator hergestellte Mineralöle, Silikone und Epoxidharz (z.B. als Vergussmasse) oder auch Papier verwendet. Des Weiteren gibt es Halbleiter wie Silizium und Germanium, deren Leitfähigkeit zwischen denen von Leitern und Isolatoren einzuordnen sind. Ihre Leitfähigkeit kann durch Dotierung und äußere Einflüsse wie Temperatur und Licht verändert werden. Diese Eigenschaften werden bei Bauteilen wie Dioden oder Transistoren genutzt, um bestimmte Funktionen zu realisieren. Die verschiedenen Arten und Eigenschaften von Halbleiter sind sehr umfangreich und werden in späteren Modulen behandelt. Vollständigkeitshalber sei noch erwähnt, dass flüssige Medien wie Säuren oder Salzlösungen leitfähig sind und als Elektrolyt bezeichnet werden. Außerdem gibt es auch ionisierte Gase, die frei bewegliche Ladungsträger enthalten und elektrische Ströme leiten können. Diese leitfähigen Gase werden Plasmen genannt, welche in diesem Modul ebenfalls nicht behandelt werden.

## 2.5 Driftverhalten von Elektronen in Leitern

In Modul 1 wurde bereits vermittelt, dass der elektrische Stromfluss die gerichtete Bewegung von freien Ladungsträgern ist. Im Fall eines Leiters sind dies die negativen Ladungsträger, also die Elektronen, welche sich frei im Material bewegen können. Die Struktur eines solchen Materials besteht

aus einem festen Gitter von Atomrümpfen und frei beweglichen Elektronen. Sowohl die Beweglichkeit der Elektronen  $\mu_e$ , als deren Anzahl, ist materialabhängig. Im feldfreien Raum bewegen sich diese Elektronen zufällig in alle Richtungen, was zu einem neutralen Zustand führt. Da es sich hierbei um keine gerichtete sondern um eine in alle Richtungen gleichverteilte Bewegung handelt, ist kein Stromfluss feststellbar. Dennoch führt diese ungerichtet, von der Temperatur abhängige, Bewegung der Ladungsträger zu elektrotechnischen Effekten: In empfindlichen Schaltungen wird sie als Rauschen wahrgenommen. Die freien Ladungsträger sind sehr viel leichter als die im Gitter verankerten Atomrümpfe, so dass es bei einem Aufprall eines in Bewegung befindlichen Elektrons auf einen Atomrumpf zu einem unelastischen Stoss kommt und sich die Bewegungsrichtung des Elektrons ändert. Dieses Verhalten ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

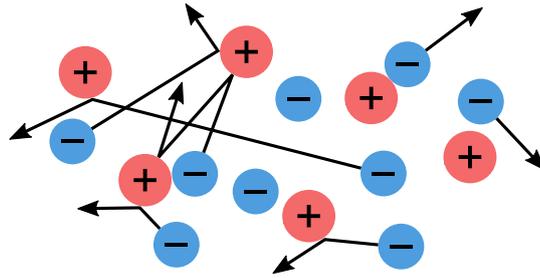


Abbildung 2.2: **Ungerichtete Bewegung freier Elektronen.** Zeigt die freien Elektronen (blau) zwischen positiv geladenen Atomrümpfen (rot). Solche Bewegungen sind charakteristisch für Metalle im Ruhezustand, wo die Elektronen sich zufällig bewegen, ohne eine bevorzugte Richtung, solange kein äußeres elektrisches Feld anliegt.

Sobald sich ein Leiter in einem elektrischen Feld befindet, wirkt auf die Elektronen die Coulomb-Kraft, so dass sich ihre zufällige Bewegungsrichtung in eine gerichtete Bewegung ändert, welche entgegengesetzt zur Feldrichtung zeigt (Abb.2.3). Diese gerichtete Bewegung der Ladungsträger wird als Stromfluss bezeichnet (vgl. Modul 1). Allerdings kommt es auch weiterhin zu Stößen mit den Atomrümpfen. Diese führen letztlich zu einer Abschwächung der gerichteten Bewegung und somit des Stroms (vgl. Abb.2.3). Da sich die Atomrümpfe mit steigender Temperatur stärker bewegen, nimmt die Stoßwahrscheinlichkeit der Elektronen bei steigender Temperatur zu.

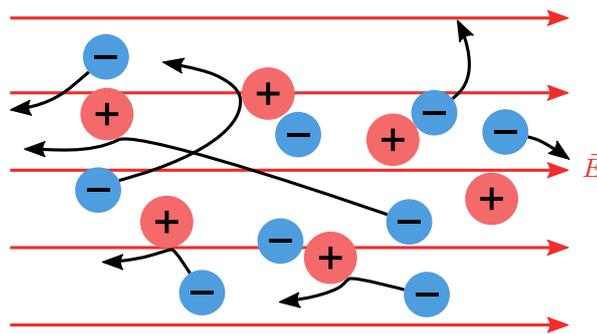


Abbildung 2.3: **Gerichtete Bewegung von Elektronen.** Unter Einfluss eines elektrischen Feldes  $\vec{E}$  bewegen sich die freien Elektronen in einem Leiter entgegen der Feldrichtung, was den elektrischen Stromfluss  $I$  erklärt.

Dieses Verhalten der Elektronen wird auch Driftverhalten genannt, welches stark vom Material abhängt. Da die atomare Zusammensetzung materialabhängig ist, unterscheidet sich auch die Anzahl der freien Elektronen, sowie deren Beweglichkeit  $\mu_e$ . Diese beiden Eigenschaften werden unter dem

Begriff der spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa$  zusammengefasst. Mit der spezifischen Leitfähigkeit kann somit die Driftgeschwindigkeit der Elektronen in der Gitterstruktur des Leiters ermittelt werden. Der folgende Abschnitt befasst sich mit eben diesen Eigenschaften.

## 2.6 Mathematische Zusammenhänge der Leitfähigkeit

Die unterschiedlichen atomaren Zusammensetzungen der Materialien führen zu einer materialabhängigen, elektrischen Leitfähigkeit. Die materialspezifische Eigenschaft bestehen aus der spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa$  (Kappa), bzw. dem spezifischen Widerstand  $\rho_R$  (rho) welche antiproportional zueinander stehen, sowie dem jeweiligen Temperaturkoeffizient  $\alpha$ , welcher sich je nach Material unterscheidet.

$$[\kappa] = 1 \frac{\text{Siemens}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{S}}{\text{m}} = 1 \frac{1}{\Omega \cdot \text{m}}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho_R} \quad (2.20)$$

$$\rho_R = \rho_{20^\circ\text{C}} \cdot (1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ\text{C})) \quad (2.21)$$

Für  $\vartheta$  (Theta) wird die Temperatur des Leiters eingetragen. Daraus ergibt sich durch  $(\vartheta - 20^\circ\text{C})$  die Temperaturdifferenz des Leiters zwischen der vorhandenen Temperatur des Leiters und den  $20^\circ\text{C}$ , bei welchen der Referenzwert ermittelt wurde. Werden  $20^\circ\text{C}$  für  $\vartheta$  (Theta) eingesetzt, fällt auch das  $\alpha$  weg und es bleibt der Referenzwert  $\rho_{20^\circ\text{C}}$  übrig. In der folgenden Tabelle sind beispielhaft einige Materialien mit deren spezifischen Eigenschaften dargestellt:

Material	Spezifische Leitfähigkeit $[\kappa] = \text{S/m}$	Temperaturkoeffizient $[\alpha] = 1/\text{K}$
Silber	$6.1 \cdot 10^7$	0.0038
Kupfer	$5.8 \cdot 10^7$	0.0038
Gold	$4.5 \cdot 10^7$	0.0034
Aluminium	$3.7 \cdot 10^7$	0.004
Eisen	$1.0 \cdot 10^7$	0.0065
Graphit	$3 \cdot 10^6$	-0.0002
Silizium (dotiert)	$1 - 10^6$	-0.075
Leitungswasser	$5.0 \cdot 10^{-3}$	-
Luft	$4.0 \cdot 10^{-15}$	-

Tabelle 2.1: **Spezifische Leitfähigkeiten und Temperaturkoeffizienten verschiedener Materialien.** Metalle wie Silber und Kupfer haben hohe Leitfähigkeiten, während isolierende Materialien wie Luft eine sehr geringe Leitfähigkeit besitzen.

Äquivalent zur spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa$  und zum spezifischen Widerstand  $\rho_R$ , kann der entsprechende Widerstand  $R$ , bzw. Leitwert  $G$  eines Körpers bestimmt werden.

$$[G] = 1 \text{ Siemens} = 1 \text{ S} = 1 \frac{1}{\Omega}$$

$$G = \frac{1}{R} \quad (2.22)$$

Der Wert der elektrischen Leitfähigkeit bzw. des Widerstandes eines Leiters, ergibt sich darüber hinaus aus den geometrischen Eigenschaften. Sowohl die Länge  $l$  als auch die Querschnittsfläche  $A$  tragen zum Leitwert bzw. Widerstandswert bei. Abbildung 2.4 zeigt einen solchen Leiter mit seinen Eigenschaften.

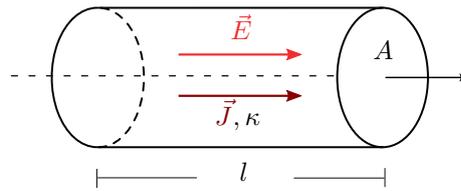


Abbildung 2.4: **Geometrische Darstellung eines Widerstands.** Das elektrische Feld  $\vec{E}$  erzeugt eine Stromdichte  $\vec{J}$  durch den Widerstand. Die Beziehung zwischen der Stromdichte und dem elektrischen Feld wird durch das Ohmsche Gesetz  $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$  beschrieben.

Die Stromdichte  $\vec{J}$  ergibt sich dabei aus dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  und der spezifischen Leitfähigkeit  $\kappa$ . Die Stromdichte ist dabei geometrieunabhängig. Erst zur Berechnung des Stromes  $I$  müssen die Länge und die Querschnittsfläche mit einbezogen werden. Mit der folgenden Formel lässt sich der Widerstandswert berechnen:

$$[R] = 1 \text{ Ohm} = 1 \Omega$$

$$R = \rho_R \cdot \frac{l}{A} \quad (2.23)$$

$\rho_R$  : spezifischer Widerstand des Materials ( $\Omega\text{m}$ )

$l$  : Länge des Materials (m)

$A$  : Querschnittsfläche des Materials ( $\text{m}^2$ )

### Einführung in die Darstellung von Schaltkreisen

In der Elektrotechnik werden zur Darstellung von elektrischen Netzwerken sogenannte Schaltbilder verwendet. Inhalt dieser Schaltbilder sind Schaltsymbole, welche für die elektrischen Eigenschaften bzw. ganze Bauelemente, verwendet werden. Abbildung 2.5 zeigt beispielhaft ein solches Schaltbild.

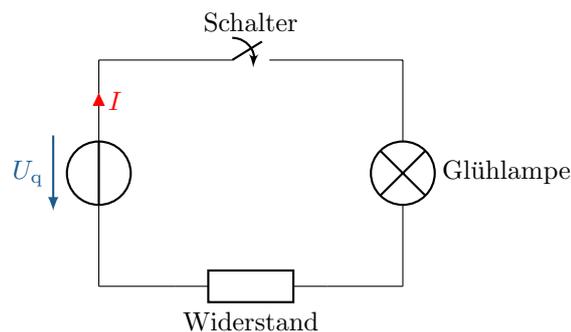


Abbildung 2.5: **Schaltplan einer Reihenschaltung.** Die aus einer Gleichspannungsquelle einem Schalter, einem Verbraucher und einem Widerstand besteht.

Das Schaltbild besteht aus vier Elementen, welche mit Linien verbunden sind. Es stellt eine Reihenschaltung bestehend aus einer Spannungsquelle, einem Schalter, einer Glühlampe und einem Widerstand, dar. Der Widerstand stellt den Leitungswiderstand der gesamten Leitung dar, während die Verbindungslinien per Definition ideale Verbindungen ohne weitere Eigenschaften darstellen.

Des Weiteren ist eine Spannung  $U_q$ , sowie der Strom  $I$  eingezeichnet, welcher jedoch erst fließen kann, wenn der Schalter geschlossen wird. Im Folgenden werden die drei grundlegenden elektrischen Eigenschaften, sowie deren Schaltsymbole tiefer behandelt.

## 2.7 Widerstand als Bauelement

Mit Hilfe der im vorherigen Abschnitt kennengelernten Methode zu Berechnung des Widerstandes, kann der Widerstandswert elektrischer Leitungen, oder auch anderer leitender Objekte, ermittelt werden. Sobald ein Widerstandswert bekannt ist, wird dieser in elektrischen Schaltbildern einem Schaltsymbol zugeordnet. So können verschiedene Komponenten und deren Eigenschaften miteinander verbunden werden, um deren Verhalten zu ermitteln. Abbildung 2.6 zeigt zwei gängige Schaltzeichen für den Widerstand.



Abbildung 2.6: **Schaltungselement für Widerstand.** Europäisches (links) und amerikanisches (rechts).

Sobald eine Gleichspannungsquelle an einen Widerstand  $R$  angeschlossen wird, verhalten sich Ströme und Spannungen linear. Abbildung 2.7 zeigt den durch den Widerstand fließenden Strom  $I_R$ , sowie die abfallende Spannung  $U_R$ .

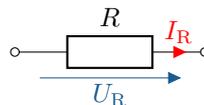


Abbildung 2.7: **Idealer Widerstand.** Zeigt den Spannungsabfall über den Widerstand und den Stromfluss durch ihn.

Das Schaltsymbol des Widerstandes wird in Schaltungen immer als idealer Widerstand berücksichtigt. Unter Vernachlässigung der Temperaturabhängigkeit trifft dies im Gleichspannungsfall auch weitestgehend zu (Schaltvorgänge ausgenommen). In der Realität gibt es viele Situationen, in denen ein realer Widerstand kein lineares Verhalten aufweisen kann. Verschiedene Quellenarten werden im Abschnitt 1.2 zu Spannungs- und Stromquellen behandelt. Zum Verständnis der Abbildung 2.8 ist es ratsam, zuvor die Abschnitte 1.3 und 1.4 gelesen zu haben.

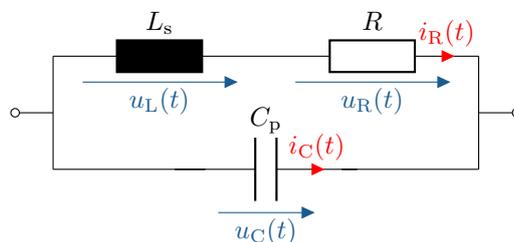


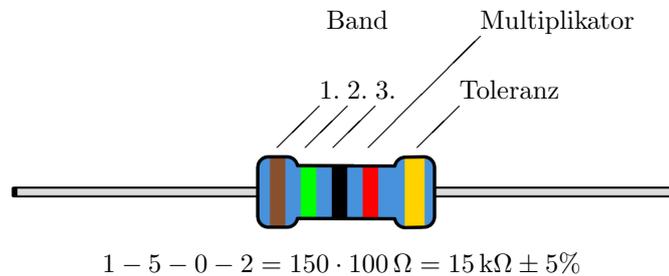
Abbildung 2.8: **Ersatzschaltbild eines realen Widerstands.** Der ideale Widerstand  $R$  wird durch eine Serien-Induktivität  $L_s$  und einen parallelen Kondensator  $C_p$  ergänzt, um parasitäre Effekte zu berücksichtigen.

Ausgehend von der Ausführung eines Widerstandes und der Frequenz, bei welcher er betrieben wird, machen sich sogenannte parasitäre Effekte bemerkbar. In Abbildung 2.8 ist das Ersatzschaltbild eines

realen Widerstanders dargestellt. Wird dieser bei höheren Frequenzen betrieben, können die parasitären Eigenschaften (parasitics) überwiegen und zu einem völlig anderen Verhalten führen. Mehr dazu in späteren Modulen.

Im Folgenden werden aber immer vollständige Ersatzschaltbilder angenommen. Wird ein Widerstand nur mit seinem Schaltungssymbol dargestellt, soll dieser als damit vollständig beschrieben angenommen werden. Dies gilt auch für alle im Weiteren hergeleiteten Bauelemente.

In der Elektrotechnik werden Widerstände, auch Festwiderstände genannt, in der Schaltungsentwicklung verwendet. Eine der bekanntesten Ausführungen sind die THT-Widerstände (Through-Hole Technology). Obwohl diese Art in vielen Anwendungen von SMD-Bauteilen (Surface-Mount Device) abgelöst worden sind, gibt es immer noch Anwendungsfälle in denen sie Sinn machen. Beispiele sind Prototyping, DIY-Projekte, Leistungsanwendungen oder Leiterplatten mit hohen mechanischen Anforderungen. Die THT-Widerstände sind durch farbige Ringe gekennzeichnet, welche Aufschluss über den Widerstandswert und die Toleranz liefern. Abbildung 2.9 zeigt einen THT-Widerstand mit dem dazugehörigen Ableseschema und einer Tabelle zum Ablesen der Werte:



Farbe	1.	2.	3.	Band	Multiplikator	Toleranz
Schwarz	0				1 Ω	-
Braun	1				10 Ω	± 1 %
Rot	2				100 Ω	± 2 %
Orange	3				1 kΩ	-
Gelb	4				10 kΩ	-
Grün	5				100 kΩ	± 0.5 %
Blau	6				1 MΩ	± 0.25 %
Violett	7				10 MΩ	± 0.1 %
Grau	8				-	± 0.05 %
Weiß	9				-	-
Gold	-				0.1 Ω	± 5 %
Silber	-				0.01 Ω	± 10 %

Abbildung 2.9: **Widerstandsfarbcodierung.** Zeigt die Farbcodes zur Bestimmung des Widerstandswerts und der Toleranz eines Widerstands.

Die THT-Widerstände gibt es in verschiedenen Ausführungen, welche alle ihre Vor- und Nachteile mit sich bringen. Die Abbildung 2.10 zeigt vier Arten, wie diese umgesetzt werden können.

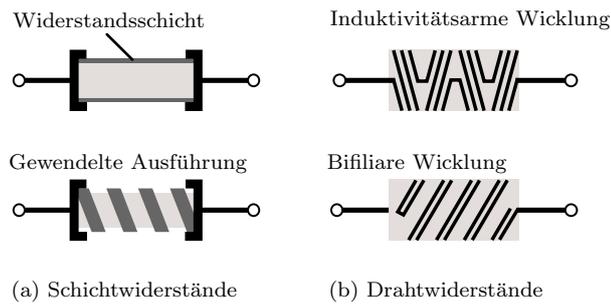


Abbildung 2.10: Verschiedene Ausführungen von bedrahteten (THT) Widerständen.

### Merke:

Der Widerstandswert eines Materials ist abhängig von dessen geometrischen und spezifischen Eigenschaften.

## 2.8 PTC und NTC

In diesem Abschnitt geht es um eine spezielle Kategorie von Widerständen, die besonders in temperaturabhängigen Anwendungen Gebrauch finden: die PTC- und NTC-Widerständen. Die Namen bezieht sich auf deren positiven bzw. negativen Temperaturkoeffizienten  $\alpha$ , welcher bereits in Abschnitt 1.1.3 eingeführt wurde. Diese speziellen Widerstände, auch als Thermistoren bekannt, unterscheiden sich von herkömmlichen Widerständen dadurch, dass ihr Widerstandswert stark von der Temperatur abhängt. Abbildung 2.11 zeigt das entgegengesetzte Verhalten beider Widerstandsarten.

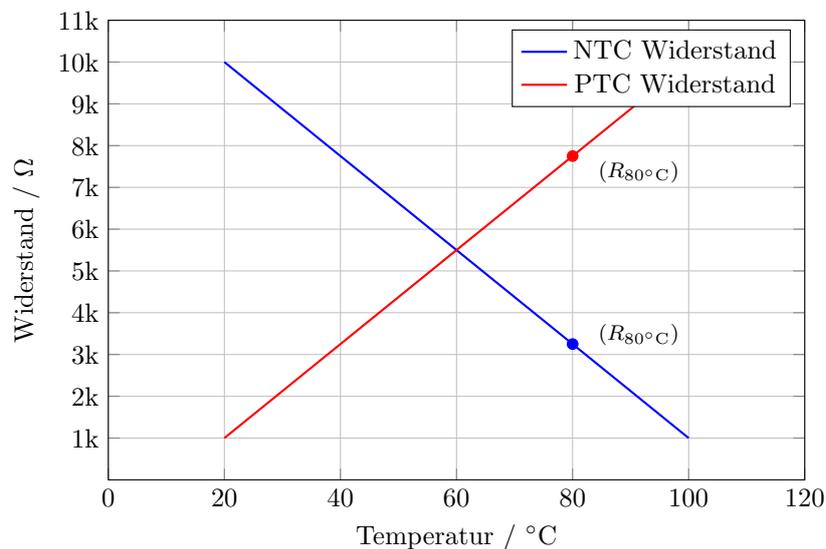


Abbildung 2.11: Diagramm eines linearen NTC- und eines PTC-Widerstands über die Temperatur. Bei einem NTC sinkt der Widerstand mit steigender Temperatur, während bei einem PTC der Widerstandswert mit steigender Temperatur ansteigt.

Die PTC-Widerstände haben einen positiven Temperaturkoeffizienten  $\alpha$ , welcher in Tabelle 1 im

Abschnitt 1.1.3 abgelesen werden kann. Gut leitfähige Materialien haben ein positives  $\alpha$ , was bedeutet, dass deren Widerstand bei höheren Temperaturen zunimmt. Somit sind sie im kalten Betrieb leitfähiger, wodurch sie auch "Kaltleiter" genannt werden. In Abbildung 2.12 ist der gleiche PTC-Widerstand bei jeweils unterschiedlichen Temperaturen dargestellt.

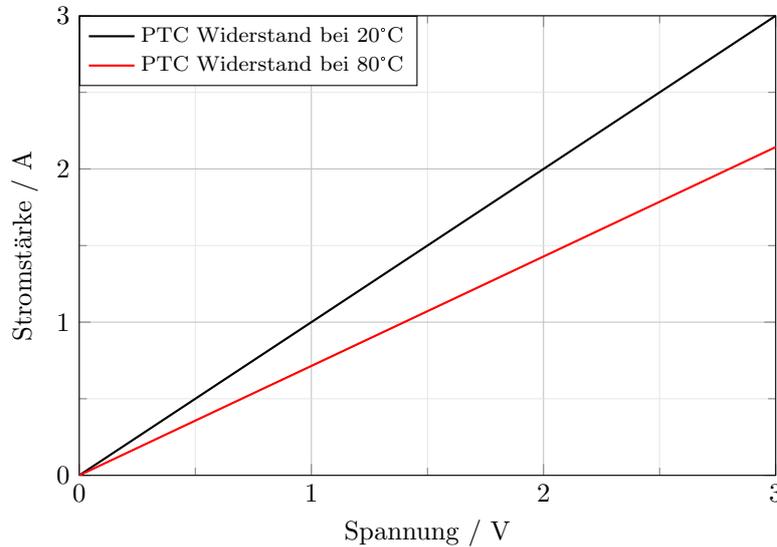


Abbildung 2.12: Diagramm eines PTC Widerstandes bei 20°C und bei 80°C

Das folgende Diagramm zeigt die Erwärmung eines PTC-Widerstandes bei Erhöhung des Stromflusses. Je mehr Strom also durch einen PTC-Widerstand fließt, desto stärker erwärmt er sich.

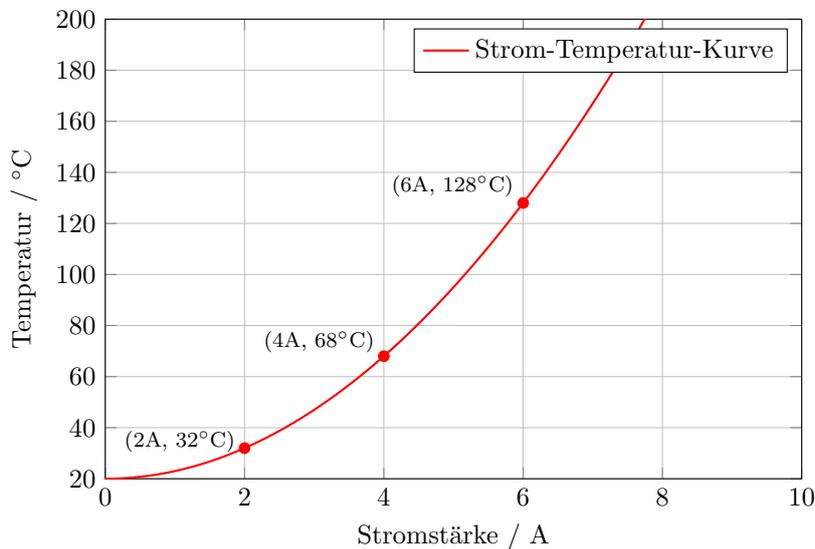


Abbildung 2.13: **Diagramm der Temperatur eines Widerstands in Abhängigkeit von der Stromstärke.** Zeigt wie die Temperatur eines Widerstands mit zunehmender Stromstärke ansteigt. Der Widerstandswert kann sich dabei ebenfalls ändern, abhängig von der Temperaturabhängigkeit des Widerstands.

Das genau entgegengesetzte Verhalten weist ein NTC-Widerstand aufgrund seines negativen Temperaturkoeffizienten auf. Typische Materialien mit einem solchen Verhalten sind Graphit oder Silizium.

Da diese Widerstände bei zunehmender Temperatur besser leiten, nennt man sie auch Heißleiter. In Abbildung 2.14 ist zu erkennen, dass der Widerstand bei einer höheren Temperatur einen geringeren Widerstandswert aufweist.

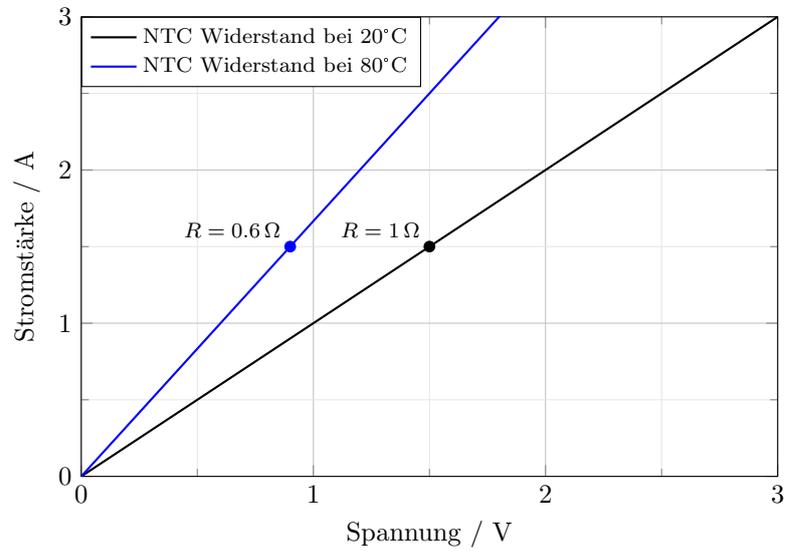


Abbildung 2.14: Diagramm eines NTC Widerstandes bei 20 °C und bei 80 °C

### 3 Spannungs- und Stromquelle

Der Betrieb elektrischer Geräte ist im Regelfall mit der Umsetzung von elektrischer Leistung verbunden. Im Modul 2 zum Thema Energie und Leistung wurde bereits vermittelt, dass Leistung der Verrichtung von Arbeit pro Zeit entspricht und dass dies einer Energieumwandlung gleichzusetzen ist. Um also elektrische Geräte, in denen ja in jedem Fall Energie umgesetzt wird, betreiben zu können, muss also Energie zugeführt werden. Energie kann nur gewandelt, nicht erzeugt werden. Dennoch wird in der Elektrotechnik das Zuführen von Energie in den zu betrachtenden Stromkreisen mit Hilfe von Strom- bzw. Spannungsquellen beschrieben. Dabei wird nicht berücksichtigt, dass es sich hierbei um eine Umwandlung von z.B. mechanischer oder chemischer in elektrische Energie handelt. Dies spielt für die Betrachtung im Stromkreis jedoch keine Rolle. Im Folgenden werden die Strom- und Spannungsquellen beschrieben und die jeweiligen Unterschiede erläutert.

#### Lernziele: Spannungs- und Stromquelle

Die Studierenden können

- zwischen Spannungs- und Stromquellen unterscheiden und kennen deren Schaltsymbole.
- reale Spannungs- und Stromquellen modellieren.
- Beispiele für verschiedene Quellen benennen.

#### 3.1 Spannungsquellen

Die am häufigsten vorkommende Art der Energiequellen für elektrische Systeme ist die Spannungsquelle. Im idealen Fall zeichnet sich dadurch aus, dass sie unabhängig vom angeschlossenen Verbraucher eine konstante Spannung ausgibt. Abbildung 3.1 zeigt das Schaltsymbol einer idealen Spannungsquelle mit der konstanten Ausgangsspannung  $U_q$ .

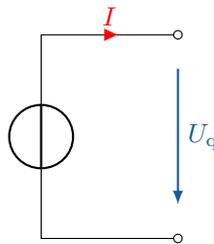


Abbildung 3.1: **Ideale allgemeine Spannungsquelle.** Liefert stets eine konstante Spannung  $U_q$ , unabhängig von der Last und passt den Strom automatisch an, um die konstante Spannung aufrechtzuerhalten.

In Abbildung 3.1 führen die Linien ins Leere, was als offene Klemmen bezeichnet wird. Da der Schaltkreis nicht geschlossen ist, fließt auch dementsprechend kein Strom. Würden in dem Fall die Klemmen kurzgeschlossen werden, dann würde die Quelle versuchen die Spannung aufrecht zu erhalten und es würde ein unendlich hoher Strom fließen. Warum dies so gefährlich ist, wird im Abschnitt 3.2 anhand einer realen Spannungsquelle deutlich.

### 3.2 Modellierung realer Spannungsquellen

In Schaltbildern, also der graphischen Darstellung von elektrischen Schaltkreisen, werden immer ideale Bauteile verwendet. Um das reale Verhalten von Bauelementen korrekt modellieren zu können und somit das reale Schaltungsverhalten möglichst exakt nachbilden zu können, muss das tatsächliche Verhalten des Bauelements mit Hilfe von idealen Bauteilen nachgebildet werden. Im Folgenden wird beschrieben, wie das Verhalten einer realen Spannungsquelle mit idealen Bauteilen nachgebildet werden kann. Die technische Umsetzung einer beliebigen Spannungsquelle besteht aus physischen Komponenten, welche alle bestimmte Widerstandswerte aufweisen. All diese Eigenschaften ergeben zusammengefasst den sogenannten Innenwiderstand  $R_i$  einer Quelle. Im Fall der realen Spannungsquelle befindet sich der Innenwiderstand in Reihe mit der idealen Spannungsquelle. In Abbildung 3.2 ist eine modellierte reale Spannungsquelle zu sehen.

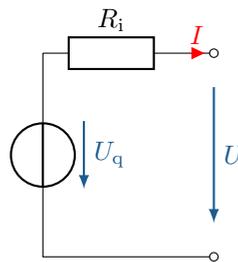


Abbildung 3.2: **Reale Spannungsquelle mit Innenwiderstand.** Die Spannung  $U_q$  wird durch den Innenwiderstand  $R_i$  beeinflusst und ist an den Ausgangsklemmen dadurch geringer.

Im Schaltbild ist zu erkennen, dass sowohl  $U_q$ , als auch  $U$  beide nach unten zeigen. Dies liegt am Zählpeilsystem, welches in Modul 4 näher behandelt wird. An dieser Stelle genügt es zu wissen, dass Generatorzählpfeil und Verbraucherzählpfeil entgegengesetzt sind, da die Summe beider Pfeile Null ergeben muss. Wird nun ein Verbraucher angeschlossen, fließt der Strom über den Innenwiderstand  $R_i$  durch den Verbraucher. Es wird also auch Leistung im Innenwiderstand umgesetzt.

Betrachten wir im realen Fall erneut das Verhalten bei kurzgeschlossenen Ausgangsklemmen, so wird die gesamte, von der Quelle abgegebene Leistung, lediglich am Innenwiderstand der Spannungsquelle umgesetzt. Die Leistung kann durch  $P = \frac{U^2}{R_i}$  berechnet werden. Im Regelfall ist die Quelle dafür nicht ausgelegt, was dazu führen würde, dass sich die Energie in sehr viel Wärmeenergie umwandeln, und zur Zerstörung der Quelle führen würde.

Wird am Ausgang der Spannungsquelle eine Last mit einem Widerstand  $R_L$  angeschlossen, so fließt ein Strom  $I$  durch die Widerstände  $R_i$  und  $R_L$ . Dieser kann nach dem ohm'schen Gesetz und der im folgenden Modul vorgestellten Zusammenfassung von Widerständen berechnet werden zu  $I = \frac{U_q}{(R_i + R_L)}$ . Dieser Strom führt dazu, dass am Innenwiderstand  $R_i$  eine Spannung  $U_{R_i}$  abfällt. Im Modul 2 wurde bereits hergeleitet, dass die Summe aller Spannungen innerhalb eines geschlossenen Kreises null ergeben muss. Im Modul 4 wird hieraus die so genannte Maschenregel hergeleitet, mit deren Hilfe sich die Ausgangsspannung  $U$  berechnen lässt zu

$$U = U_q - U_{R_i} = U_q - I \cdot R_i = U_q - U_q \cdot \frac{R_i}{R_i + R_L} \quad (3.1)$$

Je kleiner also der Innenwiderstand  $R_i$  ist, desto weniger unterscheidet sich die Ausgangsspannung  $U$  einer belasteten Spannungsquelle von der Quellspannung  $U_q$ . Ein im Vergleich zum Lastwiderstand  $R_L$  möglichst kleiner Innenwiderstand  $R_i$  sollte also für ein möglichst ideales Verhalten angestrebt werden. Dies kann u.a. mit möglichst großen Leiterquerschnitten innerhalb der Quelle realisiert werden.

Wird die reale Spannungsquelle, modelliert mit  $U_q$  und  $R_i$ , im Leerlauf betrieben, ist die Ausgangsspannung  $U$  gleich der Quellspannung  $U_q$ , da kein Strom durch den Innenwiderstand fließt und dort

keine Spannung abfallen kann.

Beispiele für reale Spannungsquellen sind u.a. Batterien und Akkumulatoren. Dabei wird, wie weiter oben beschrieben, ein möglichst kleiner Innenwiderstand angestrebt. Eine 12-V-Starterbatterie für Autos hat einen Innenwiderstand von weniger als  $10\text{ m}\Omega$ . Auch eine Haushaltssteckdose kann als Spannungsquelle mit  $230\text{ V}$  Quellspannung und kleinem Innenwiderstand betrachtet werden.

### Merke:

- Eine Spannungsquelle darf nie kurzgeschlossen werden!
- Bei Spannungsquellen stellt sich immer der Strom ein.

## 3.3 Stromquellen

Im Vergleich zu den Spannungsquellen sind Stromquellen deutlich weniger vertreten. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen konstanten Strom liefern und sich die Spannung entsprechend einstellt. Abbildung 3.3 zeigt das Schaltsymbol einer idealen Stromquelle mit dem konstanten Ausgangsstrom  $I_q$ .

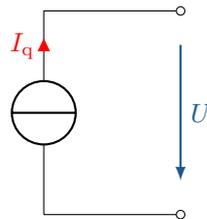


Abbildung 3.3: **Ideale allgemeine Stromquelle.** Liefert stets einen konstanten Strom  $I_q$ , unabhängig von der Last und passt die Spannung automatisch an, um den konstanten Strom aufrechtzuerhalten.

Der hier dargestellte Fall einer leerlaufenden Stromquelle führt, vergleichbar mit der kurzgeschlossenen Spannungsquelle, zu einer unendlich hohen Leistungsabgabe der Quelle und muss daher vermieden werden.

## 3.4 Modellierung realer Stromquellen

Genauso wie bei den Spannungsquelle, gibt es in der Realität auch keine idealen Stromquellen. Um das reale Verhalten einer Stromquelle beschreiben zu können, muss auch diese erst modelliert werden. Die Abbildung 3.4 zeigt eine solche modellierte Stromquelle.

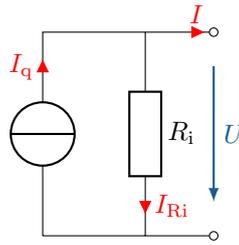


Abbildung 3.4: **Reale Stromquelle mit Innenwiderstand.** Der Strom  $I_q$  wird durch den Innenwiderstand  $R_i$  beeinflusst und ist an den Ausgangsklemmen geringer.

Das Modell der realen Stromquelle setzt sich dabei ebenfalls aus dem Innenwiderstand  $R_i$  und der idealen Stromquelle zusammen, wobei der Unterschied zur Spannungsquelle darin besteht, dass der Innenwiderstand parallel zur idealen Stromquelle platziert ist. Auch hier ist der tatsächliche Ausgangsstrom kleiner als der Quellstrom  $I_q$ . Im Modul 4 wird die Knotenregel eingeführt. Diese besagt, dass die Summe aller Ströme in einem Knoten (Verzweigungspunkt) gleich null sein muss, so dass sich der Ausgangsstrom  $I$  ergibt zu

$$I = I_q - I_{R_i} = I_q - \frac{U}{R_i} \quad (3.2)$$

Je größer also der Innenwiderstand  $R_i$  ist, desto kleiner wird der Strom  $I_{R_i}$  und desto kleiner ist die Abweichung zwischen Ausgangsstrom  $I$  und dem Quellstrom  $I_q$ .

Entgegen des dargestellten Schaltbildes darf eine Stromquelle niemals mit offenen Klemmen betrieben werden, da ähnlich wie im Fall der Spannungsquelle die gesamte Leistung im Innenwiderstand umgesetzt werden würde, was zu einer hohen thermischen Belastung und schlussendlich zur Zerstörung der Stromquelle führen würde. Beispiele für reale Stromquellen sind Solarzellen im entsprechenden Betriebszustand oder ein Labornetzteil in der Strombegrenzung.

### Merke:

- Eine Stromquelle darf nie im Leerlauf betrieben werden!
- Bei Stromquellen stellt sich immer die Spannung ein.

## 3.5 Umrechnung von Spannungs und Stromquelle

Spannungs und Stromquellen können bezüglich ihres Klemmenverhaltens ineinander umgerechnet werden. Voraussetzung dafür ist, dass sowohl der Kurzschlussstrom  $I_K$  als auch die Leerlaufspannung  $U_L$  bei beiden Quellen gleich sind. Abbildung 3.5 zeigt die Überführung der Schaltbilder ineinander. Weiterführende Inhalte zur Umrechnung und Leistungsanpassung folgen in Modul 4.

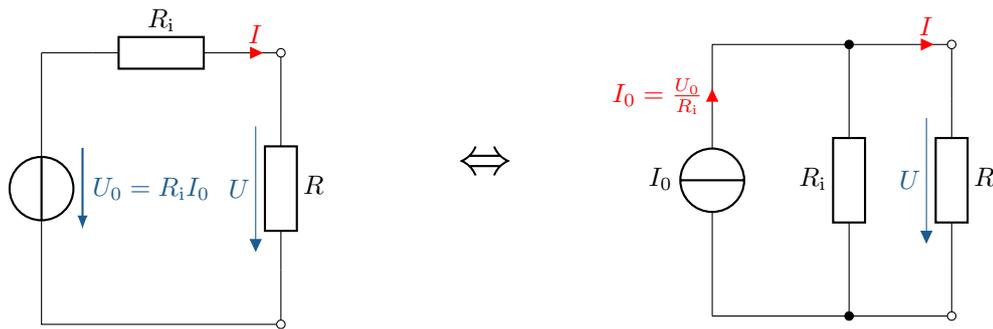


Abbildung 3.5: **Umwandlung einer Gleichspannungsquelle in eine Stromquelle.** Der Innenwiderstand der Spannungsquelle wird dabei zum Parallelwiderstand der Stromquelle, wobei die resultierende Stromquelle einen konstanten Strom liefert, der durch den Widerstand bestimmt wird.

### 3.6 Verschiedene Spannungs- und Stromquellen

Die zuvor eingeführten Schaltsymbole für Spannungs- und Stromquellen sind allgemeingültig und machen keine spezifischen Aussagen über die Signalform der Ausgangsgröße. Grundsätzlich wird neben der Unterscheidung zwischen Spannungs- und Stromquellen auch zwischen Gleich- (DC, Direct Current) und Wechselspannung (AC, Alternating Current) differenziert.

Die gebräuchlichste Form für den Betrieb elektronischer Geräte ist die Gleichspannungsquelle. Sie sorgt kontinuierlich dafür, dass Ladungsträger vom Minus- zum Pluspol fließen, was ein gleichbleibendes elektrisches Feld vom Plus- zum Minuspol erzeugt.

Wechselspannungsquellen (AC) hingegen haben typischerweise eine sinusförmige Ausgangsspannung bzw. einen sinusförmigen Ausgangsstrom. Für den Energietransport über weite Strecken haben sich in der Vergangenheit Hochspannungsleitungen mit Wechselspannung durchgesetzt, da diese technisch einfacher und kostengünstiger zu realisieren waren. Der bedeutendste Vorteil von Wechselspannung ist die einfache Transformation der Spannung. Außerdem ist es praktisch, da beim Anschluss von Verbrauchern nicht auf die Verpolung geachtet werden muss.

Mittlerweile gibt es jedoch auch erste Umsetzungen des Energietransports in Form von Gleichspannung. Der Einsatz von Gleichstrom (DC) für lange Übertragungsstrecken, wie bei den HVDC-Leitungen (High Voltage Direct Current) von der Nordsee nach Süddeutschland, bietet einige Vorteile: Gleichstrom ist effizienter, da er keine Blindleistung erzeugt, was bedeutet, dass keine zusätzlichen Verluste durch die Kabelkapazität auftreten. Dadurch bleibt die Stromamplitude niedriger, was zu geringeren Übertragungsverlusten führt und DC besonders für sehr lange Strecken attraktiv macht. In Abbildung 3.6 sind die Schaltzeichen der verschiedenen Quellen dargestellt.

Es ist zu berücksichtigen, dass Wechselspannungs- und Stromquellen eine sinusförmige Ausgangsspannung bzw. einen sinusförmigen Ausgangsstrom haben, wohingegen die zeitlich beliebig veränderlichen Quellen jede beliebige Form haben können. Ein Beispiel dafür ist das Rechtecksignal, welches aus dem Ein- und Ausschalten einer Gleichspannungsquelle stammen könnte. Genutzt werden solche Quellen beispielsweise in der mobilen Anwendung der weit verbreiteten Bauart von Elektromotoren, welche auch Synchron, bzw. Asynchronmaschinen genannt werden. Diese Motoren werden in mobilen Anwendungen durch eine Gleichspannungsquelle betrieben, dessen Signalform mithilfe einer Leistungselektronik in das gewünschte Rechtecksignal gewandelt (gepulst) werden und im Motor durch über die Spulenwicklungen aus dem gepulsten Spannungssignal ein sinusförmigen Strom entsteht. Mehr dazu im Modul elektrische Maschinen. Ein weiteres Beispiel für zeitlich beliebige Signale ist die digitale Informationsübertragung in der Nachrichtentechnik, wobei eine Eins dem Highsignal und eine Null einem Lowsignal entspricht, was ebenfalls einem Rechtecksignal gleicht.

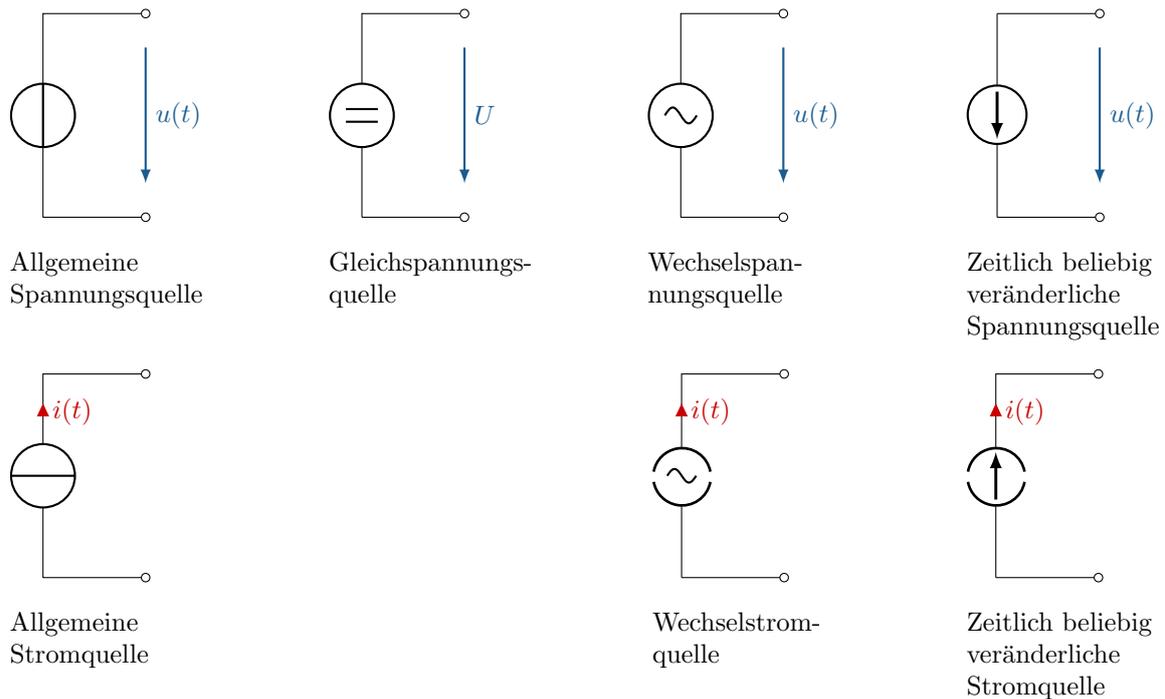


Abbildung 3.6: Verschiedene Spannungs- und Stromquellen.

## 4 Kapazität und Kondensator

In der Elektrotechnik gibt es drei grundlegende Komponenten, mit denen das elektrische Verhalten von Bauteilen beschrieben werden kann. Neben dem zuvor behandelten ohmschen Widerstand, gibt es noch die Kapazität und die Induktivität. In diesem Abschnitt geht es um die Eigenschaft der Kapazität, sowie dem dazugehörigen Bauteil, dem Kondensator. Der darauffolgende Abschnitt behandelt die Induktivität sowie das zugehörige Bauteil, die Spule.

### Lernziele: Kapazität und Kondensator

Die Studierenden

- können zwischen Kapazität und Kondensator differenzieren.
- kennen die wichtigsten Parameter rund um den Kondensator und die Kapazität.
- können die Kapazität eines Kondensators berechnen.

### 4.1 Die elektrische Kapazität $C$

Die elektrische Kapazität ist die Fähigkeit eines Objektes, elektrische Energie in Form eines elektrischen Feldes, zu speichern. Diese Eigenschaft kommt zustande, sobald elektrische Ladungsträger ungleich verteilt sind und sich zwischen den Bereichen ein elektrisches Feld ausbildet. Das Formelzeichen der Kapazität ist  $C$  (capacity) während die Einheit in Farad ( $F$ ) angegeben wird.

Das einfachste und geläufigste Beispiel, an dem die Kapazität erklärt werden kann, ist der Plattenkondensator. Bei dieser Art des Kondensators liegen sich zwei leitfähige Platten gegenüber, welche

jeweils mit einem anderen Potential beaufschlagt werden. In Abbildung 4.1 ist ein Kondensator mit idealisiertem Feldverlauf dargestellt.

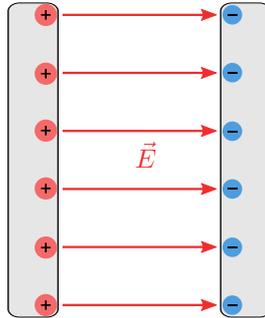


Abbildung 4.1: **Idealer Plattenkondensator mit idealisiertem Feldverlauf.** Der Kondensator speichert elektrische Energie in einem elektrischen Feld, was idealisiert zwischen den Platten dargestellt ist und hat eine konstante Kapazität  $C$ , die nur von der Fläche der Platten und dem Abstand zwischen ihnen abhängt.

Aufgrund der unterschiedlichen Potentiale auf den Platten, bildet sich von der höheren zur geringeren geladenen Platte ein elektrisches Feld aus. Im idealen Fall wird angenommen, dass sich außerhalb der Kondensatorplatten kein Feld ausbildet. In der Realität sammeln sich an den seitlichen Rändern der Platten ebenfalls Ladungsträger, welche zu komplizierteren Feldverteilungen führen. In Abbildung 4.2 ist die Grafik eines solchen realen Plattenkondensators dargestellt.

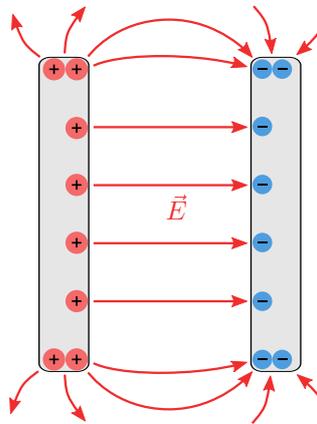


Abbildung 4.2: **Realer Kondensator mit realem Feldverlauf.** Im Gegensatz zum idealen Kondensator treten Randfelder und Verluste auf, die die tatsächliche Kapazität und das elektrische Verhalten beeinflussen.

In vielen Fällen kann das reale Verhalten jedoch vernachlässigt werden, was die Berechnungen deutlich vereinfacht. Aus dem Grund wird im Folgenden nur noch von idealisierten Kondensatoren ausgegangen.

Die Kapazität ist definiert als das Verhältnis der gespeicherten elektrischen Ladung  $Q$  zur angelegten Spannung  $U$ . Je höher die Kapazität eines Kondensators ist, desto mehr Ladung kann er bei einer gegebenen Spannung speichern.

$$[C] = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{V}}$$

$$C = \frac{Q}{U} \quad (4.1)$$

$$Q = C \cdot U \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon \cdot \iint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int \vec{E} d\vec{s}} \quad (4.2)$$

## 4.2 Der Kondensator als Bauelement

Die Eigenschaften der Kapazität werden in verschiedenen Bereichen der Elektrotechnik bewusst genutzt. Die Nutzbarmachung dieser Eigenschaften erfolgt mit Hilfe von Kondensatoren. Es gibt sie in verschiedenen Ausführungen. Abbildung 4.3 zeigt einige Beispiele von THT- bis hin zu SMD-Bauteilen.

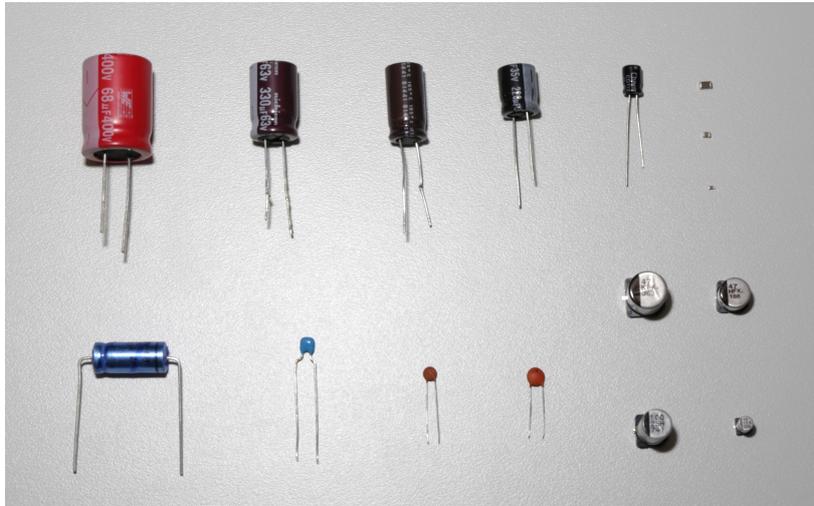


Abbildung 4.3: **Verschiedene Arten und Bauformen von Kondensatoren.** Darunter Keramik- und Elektrolytkondensatoren. Diese variieren in Größe, Kapazität und Spannung, um unterschiedlichen Anwendungen gerecht zu werden.

Darüber hinaus gibt es sie aber auch in deutlich kleineren bzw. deutlich größeren Dimensionen. In der Hochfrequenztechnik werden Kapazitäten beispielsweise lediglich durch das Design der Leiterplatten realisiert, während Kondensatoren für industrielle oder enegietechnische Anwendungen mehrere Zentimeter bis Meter groß werden können.

Was alle Kondensatoren verbindet, ist ihre Fähigkeit, die Eigenschaft der Kapazität nutzbar zu machen, wie es im folgenden Schaltbild 4.4 dargestellt ist. Dieses Schaltbild repräsentiert jedoch nur die idealisierte, nutzbare Kapazität.

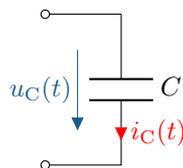


Abbildung 4.4: **Schaltelement eines idealen Kondensators.** Zeigt den Spannungsabfall über dem Kondensator und den Stromfluss durch ihn.

Für eine realitätsgetreue Nachbildung der Schaltung ist es wichtig den Kondensator als Bauteil vollständig zu beschreiben. Dies wird mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes gemacht, welches auch die

ungewollten, also parasitären Eigenschaften des Bauteils, nachbildet. Abbildung 4.5 zeigt ein solches Ersatzschaltbild.

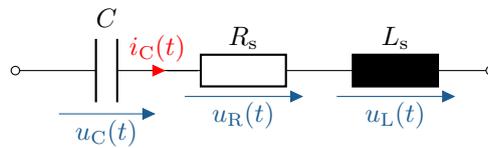


Abbildung 4.5: **Ersatzschaltbild eines realen Kondensators.** Der ideale Kondensator  $C$  wird durch eine Serien-Induktivität  $L_s$  und einen Serien-Widerstand  $R_s$  ergänzt, um parasitäre Effekte zu berücksichtigen.

Im Ersatzschaltbild des Kondensators werden nicht nur die nutzbare Kapazität, sondern auch die parasitären Eigenschaften berücksichtigt, die in realen Kondensatoren auftreten. Diese parasitären Eigenschaften entstehen beispielsweise durch die Induktivität der Anschlüsse und die ohmschen Verluste im Material. Das modellierte Ersatzschaltbild ermöglicht es, diese Effekte im Schaltungsentwurf zu berücksichtigen und das Schaltverhalten besser vorherzusagen.

### Merke:

Der Kondensator ist der verzweifelte Versuch eine Kapazität nachzubilden.

## 4.3 Das Dielektrikum

Das Dielektrikum ist, wie der Name bereits impliziert, ein dielektrisches, also elektrisch nicht leitfähiges Material. Da jedes Material aus Atomen besteht und alle Atomrümpfe mit Elektronen versehen sind (Elektronenhülle), wirkt sich entsprechend auch ein elektrisch nicht leitfähiges Material auf das Verhalten des elektrischen Feldes aus. Sobald ein solches Material zwischen die Platten eines Kondensators eingefügt wird, ändern sich demnach auch die Eigenschaften des Kondensators. In Abbildung 4.6 ist anhand der unterbrochenen Pfeilung des elektrischen Feldes das unterschiedliche Verhalten zu erkennen. Die elektrische Flussdichte  $D$  ist eine Hilfsgröße, welche materialunabhängig ist, auf welche in Abschnitt 1.3.4 noch eingegangen wird.

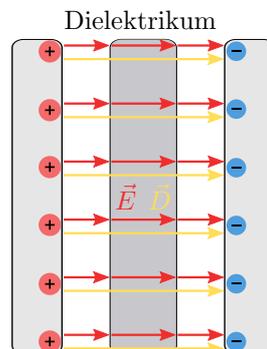


Abbildung 4.6: **Idealer Kondensator mit Dielektrikum.** Der Kondensator besteht aus zwei Platten, zwischen denen sich ein Dielektrikum befindet. Das Dielektrikum ist ein nicht leitendes Material, das die elektrische Feldstärke reduziert und die Kapazität des Kondensators erhöht, indem es die Relative Dielektrizitätskonstante erhöht.

Die Eigenschaften des Dielektrikums sind materialspezifisch und werden durch die Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  quantifiziert. In Tabelle 4.1 sind Beispiele einiger Dielektrika und deren  $\epsilon_r$ , aufgeführt:

Material	$\epsilon_r$
Vakuum	1
Luft (bei STP)	1.0006
Kunststoff (PE)	2.25-2.3
Glas	3-10
Keramik	5-300
Silizium	11.7
Tantaloxid	25-30
Wasser	81

Tabelle 4.1: **Relative Dielektrizitätszahl verschiedener Materialien.** Diese dimensionslose Zahl gibt an, wie stark das elektrische Feld in einem Material im Vergleich zum Vakuum beeinflusst wird. Sie ist ein Maß für die Fähigkeit des Materials, elektrische Ladung zu speichern. Materialien mit einer höheren Dielektrizitätszahl erhöhen die Kapazität eines Kondensators, da sie die elektrische Feldstärke im Inneren verringern.

Zur vollständigen Beschreibung der Materialeigenschaften des Dielektrikums wird neben der Dielektrizitätszahl noch die elektrische Feldkonstante  $\epsilon_0$  benötigt. Dabei handelt es sich um das dielektrische Verhalten des elektrischen Feldes im Vakuum. Während die Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  einheitslos ist, bringt die elektrische Feldkonstante die Einheit  $\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$  mit. Sie wird mit der relativen Dielektrizitätszahl multipliziert was zusammen die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  ergibt.

$$[\epsilon] = 1 \frac{\text{Farad}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{F}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad (4.3)$$

$\epsilon$  : Dielektrizitätskonstante

$\epsilon_0$  : Elektrische Feldkonstante ( $8.85421878 \cdot 10^{-12}$ )

$\epsilon_r$  : Relative Dielektrizitätszahl

Mit Hilfe dieser Materialeigenschaften des Dielektrikums und den Dimensionen sowie der Entfernung der Kondensatorplatten, kann die Kapazität des Kondensators wie folgt berechnet werden:

$$[C] = 1 \text{ F}$$

$$C = \frac{\epsilon \cdot A}{d} \quad (4.4)$$

$A$  : Querschnittsfläche des Materials ( $\text{m}^2$ )

$d$  : Abstand der Elektroden (m)

#### 4.4 Die elektrische Flussdichte

Die elektrische Flussdichte  $\vec{D}$ , auch Verschiebungsdichte genannt, steht proportional zum elektrischen Feld  $\vec{E}$ . Ihr Vorteil besteht darin, dass sie materialunabhängig ist, was mathematische Vorteile mit sich bringt.

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} + P \quad (4.5)$$

Zusätzlich zur Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  wird die Polarisation des Mediums  $P$  addiert. Sie beschreibt das Polarisationsverhalten, welches im Einschaltvorgang abläuft. Im statischen Fall kann die Polarisation  $P$  oft vernachlässigt werden, was die Gleichung wie folgt vereinfacht.

$$[D] = 1 \frac{\text{Coulomb}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (4.6)$$

### Einführung in die zeitabhängige Vorgänge

Bisher ist bekannt, dass elektrische Felder in leitfähigen Materialien einen Strom  $I$  und eine Spannung  $U$  verursachen. Der Strom  $I$  und die Spannung  $U$  beschreiben die Felder jedoch nur integral, sie werden also als zeitlich konstant angesehen. Im Gegensatz zum Widerstand  $R$  gibt es jedoch Bauteile (Kondensatoren und Spulen), die ein zeitlich veränderliches Verhalten aufweisen. Der ohm'sche Widerstand  $R$  alleine reicht somit nicht aus, um die Verhältnisse bei Netzwerken mit zeitlich veränderlichen Vorgängen zu beschreiben. Zur Beschreibung dieser zeitabhängigen Verhalten werden die zeitabhängigen Größen  $u(t)$  und  $i(t)$  verwendet.

Die Herleitung der Zeitabhängigkeiten kann mathematisch folgendermaßen gezeigt werden. Aus der Formel 4.1 ist bereits die Grundgleichung des Kondensators bekannt:

$$Q = C \cdot U \quad (4.7)$$

Zur Beschreibung des zeitlichen Verhaltens des Kondensators, wird die Änderung der Ladung über die Zeit betrachtet

$$\frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dU}{dt} \quad (4.8)$$

$\frac{dQ}{dt}$  beschreibt die Änderungsrate der Ladung, welche nach dem Grundgesetz der Elektrotechnik dem Strom  $i(t)$  entspricht, der in den Kondensator hinein- oder herausfließt.

$$\frac{dQ}{dt} = i(t) \quad (4.9)$$

Wird nun in der Formel 4.7 die konstante Ladung  $Q$  durch die zeitlich veränderliche Größe  $i(t)$  ersetzt, erhält auch die Spannung eine zeitliche Abhängigkeit.

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad (4.10)$$

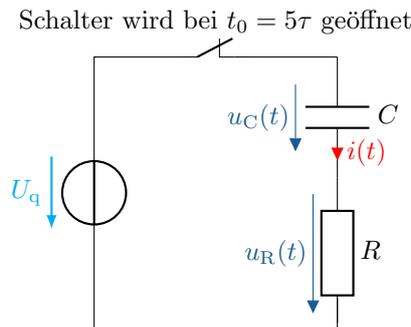
Durch mathematische Umstellung nach  $u_c(t)$  kann die Spannung in Abhängigkeit des Stromes und der Kapazität dargestellt werden:

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_c(t) dt \quad (4.11)$$

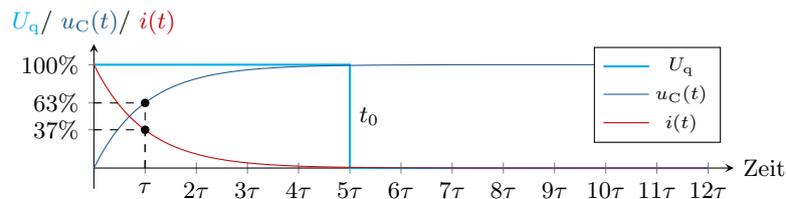
Aus der Gleichung 4.10 folgt unmittelbar, dass sich die Spannung an einer Kapazität nicht schlagartig ändern kann, da dafür ein unendlich hoher Strom erforderlich wäre.

## 4.5 Schaltverhalten eines Kondensators

Das Schaltverhalten beschreibt das Verhalten eines Bauteils bei Änderung der angelegten Spannung. Je nachdem ob eine Spannungsquelle ein- oder ausgeschaltet wird, verhalten sich Strom und Spannung am Bauteil entsprechend seiner Charakteristika. Zur Analyse des zeitlichen Verhaltens von Bauteilen ist zuerst ein Schaltbild notwendig, welches die zu analysierende Schaltung visualisiert. Abbildung 4.7a zeigt ein Schaltbild einer Reihenschaltung einer Kapazität  $C$  mit einem Widerstand  $R$ , welche über einen Schalter mit einer Spannung  $U_q$  versorgt werden können.



(a) Darstellung der Reihenschaltung bestehend aus einer Kapazität  $C$ , einem Widerstand  $R$  und einem Schalter.



(b) Spannungs- und Stromverlauf über der Kapazität bei einer Gleichspannung die zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltet wird und zum Zeitpunkt  $t_0$  abgeschaltet wird.

Abbildung 4.7: **Der Spannungs- und Stromverlauf über der Kapazität.** Das Diagramm zeigt die Reaktion der Kapazität auf die plötzliche Änderung der Spannung und veranschaulicht das typische Ladeverhalten.

Im Diagramm 4.7b ist zu sehen, dass sich trotz angelegter Gleichspannung  $U_q$  die Spannung  $u_C(t)$  zeitlich nicht mitändert, sondern eine Trägheit aufweisen. Dieses zeitlich veränderliche Verhalten wird im Schaltbild 4.7a durch die zeitabhängigen Größen  $u(t)$  und  $i(t)$  ausgedrückt.

In diesem Beispiel ist der Schalter zu Beginn geschlossen und wird bei  $t_0 = 5\tau$  geöffnet. Der Kondensator ist anfangs nicht geladen. Im Diagramm ist zu erkennen, dass sich trotz angelegter Spannung  $U_q$  die Spannung über der Kapazität  $u_C(t)$  nicht sprunghaft ändert.

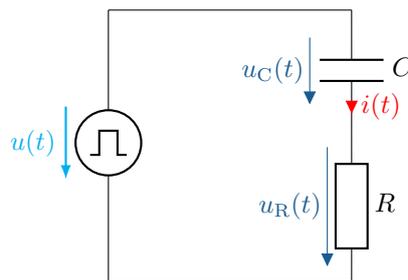
Dieses Einschaltverhalten resultiert aus der Aufladung der Kapazität. Die Ladungsträger müssen sich dafür auf den Kondensatorplatten ansammeln. Dies geschieht so lange, bis die Spannung zwischen den Platten der angelegten Spannung der Spannungsquelle entspricht. Da die zur Aufladung benötigten Ladungsträger in die Kondensatorplatten wandern müssen, fließt während dieses Vorgangs ein entsprechender Strom  $i_C(t)$ .

Im Fall einer ideal leitenden Schaltung ohne ohm'schen Widerstand, würden sich die Ladungsträger unendlich schnell auf den Kondensatorplatten ansammeln, was einem unendlich hohen Strom entsprechen würde. Im realen Fall hat der Kondensator bzw. die Hinleitung zum Kondensator, einen ohm'schen Widerstand, welcher die Ladungsträger auf dem Weg zu den Kondensatorplatten ausbremst, also die elektrische Stromstärke reduziert. Daraus folgt der maximal mögliche Strom  $I_{\max}$ .

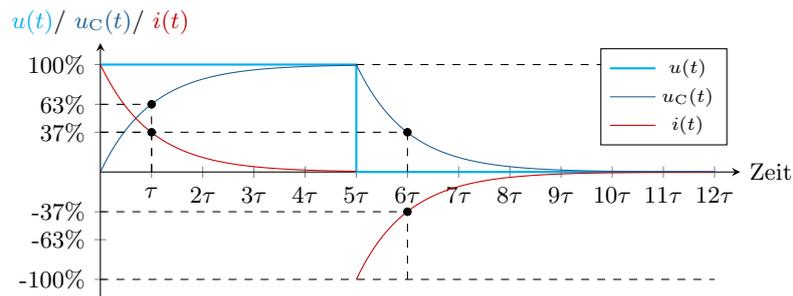
$$I_{\max} = \frac{U_q}{R} \quad (4.12)$$

Sobald der Schalter geöffnet wird, bleibt die Spannung über der Kapazität erhalten. Dies bedeutet, dass die zugeführte Energie in der Kapazität verbleibt und sich im stationären Fall nicht mehr ändert. Dementsprechend fließt bei einer aufgeladenen Kapazität auch kein Strom mehr, was in einem eingeschwungenen Gleichstromnetzwerk einem Leerlauf gleichzusetzen ist.

Mit Hilfe der beiden Formeln 4.10 und 4.11 ist das Verhalten von Strom und Spannung an einer Kapazität vollständig beschrieben, was nun diverse Berechnungen ermöglicht. Ein weiteres Beispiel ist das Schaltverhalten einer Kapazität bei anlegen einer Rechteckspannung. Der Unterschied besteht darin, dass nicht wie in Beispiel 4.7a, eine konstante Spannungsquelle über einen Schalter geschaltet wird, sondern die Spannungsquelle selbst die Eingangsspannung bestimmt.



(a) Darstellung der Reihenschaltung bestehend aus einer Kapazität  $C$  und einem Widerstand  $R$  an einer rechteckförmigen Spannungsquelle.



(b) Spannungs- und Stromverlauf über der Kapazität bei einer rechteckförmigen Spannung.

Abbildung 4.8: **Spannungs- und Stromverlauf über der Kapazität.** Das Diagramm zeigt die Reaktion der Kapazität auf eine plötzliche Änderung der Spannung und veranschaulicht das typische Lade- und Entladeverhalten des Kondensators.

Im Gegensatz zum Schalter, versucht die Spannungsquelle im Beispiel 4.8a ab dem Zeitpunkt  $t_0 = 5\tau$  die Systemspannung auf 0 zu ziehen. Dies führt dazu, dass die Kapazität entladen wird. Dies führt entsprechend zu einem entgegengesetzten Stromfluss  $i_C(t)$ , da sich die Ladungsträger von den Kondensatorplatten wegbewegen, um wieder einen neutralen Zustand zu erreichen.

### Beispiel 4.1: Berechnung der Kapazität

- Ladung auf Platten  $Q = \sigma \cdot A = \varepsilon \cdot E \cdot A$
- Kapazität mit  $C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$  berechnen
- Gespeicherte Energie  $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$

- Kapazität zweier Kondensatoren mit verschiedenen  $\varepsilon_r$  über  $\vec{D}$  berechnen

## 5 Induktivität und Spule

Das Gegenstück zum Kondensator ist die Spule, oder genauer gesagt: Das Gegenstück zur Kapazität  $C$  ist die Induktivität  $L$ . Die Induktivität ist ebenfalls ein Energiespeicher, wobei der Unterschied in der Art der genutzten Felder liegt. Während bei der Kapazität die Energie in Form eines elektrischen Feldes gespeichert wird, geschieht dies bei der Induktivität über das magnetische Feld.

### Lernziele: Induktivität und Spule

Die Studierenden

- können zwischen Induktivität und Spule differenzieren.
- kennen die wichtigsten Parameter rund um die Induktivität und die Spule.
- können die Induktivität einer Spule berechnen.

### 5.1 Die Induktivität $L$

Die Induktivität ist die Fähigkeit eines Objektes, elektrische Energie in Form eines magnetischen Feldes zu speichern. Diese Eigenschaft kommt zustande, sobald ein elektrischer Strom durch einen Leiter fließt um welchen sich entsprechend ein magnetisches Feld ausbildet. Das Formelzeichen der Induktivität ist  $L$  (benannt nach dem französischen Physiker Heinrich Lenz), während die Einheit in Henry (H) angegeben wird.

Das einfachste und geläufigste Beispiel, an dem die Induktivität erklärt werden kann, ist die Spule. Obwohl sich das Phänomen der Induktivität bereits bei einem einfachen Leiter ausbildet, wird dieser Effekt durch den Aufbau einer Spule bewusst verstärkt. In Abbildung 5.1 ist ein Zylinderluftspule mit ihrer magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  dargestellt.

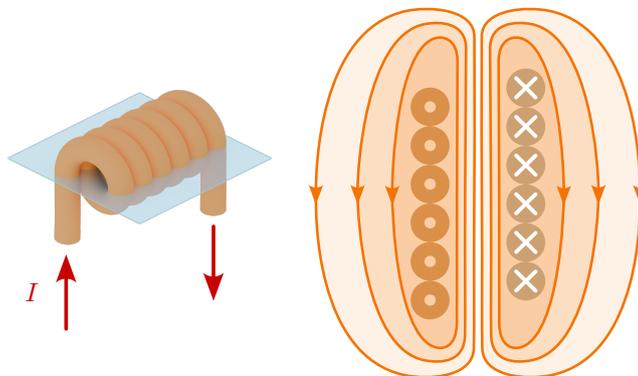


Abbildung 5.1: **Darstellung des magnetischen Feldes einer Zylinderluftspule.** Es illustriert die Feldlinien sowohl innerhalb als auch außerhalb der Spule und veranschaulicht, wie sich das Magnetfeld entlang der Achse der Spule konzentriert und außerhalb der Spule abnimmt.

Das Thema der magnetischen Größen wird ausführlich in Modul 6 behandelt. Zum Verständnis der Funktionsweise einer Spule und der daraus resultierenden Induktivität, soll eine kurze Einführung zur Entstehung von Magnetismus helfen.

Sobald Strom durch einen geraden Leiter fließt, entsteht ein magnetisches Feld konzentrisch um den Leiter herum. Abhängig von Stromstärke und Stromrichtung ändert sich auch das magnetische Feld. Die Rechte-Faust-Regel dient dabei als Gedankenstütze zur Bestimmung der Richtung und Orientierung des Magnetfeldes.

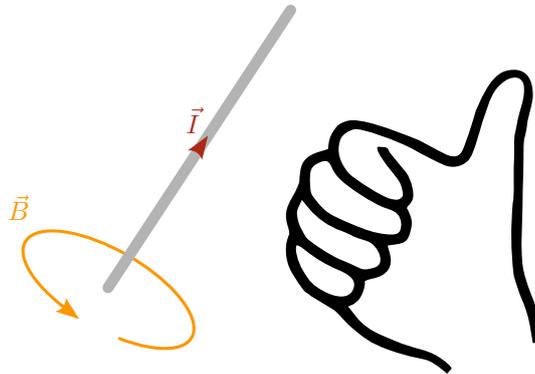


Abbildung 5.2: **Rechte-Hand-Regel zur Bestimmung der Richtung des Magnetfeldes.** Ein stromdurchflossenen Leiter erzeugt ein Magnetfeld das mit Hilfe der Rechten-Hand-Regel bestimmt wird. Wenn der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Stroms zeigt, dann krümmen sich die übrigen Finger in die Richtung der Feldlinien des Magnetfeldes.

Entsprechend der Grafik 5.2 verläuft das Magnetfeld in Richtung der Fingerspitzen konzentrisch um den Leiter herum, sofern man den Daumen in Richtung der technischen Stromrichtung, also entgegen der Fließrichtung der Elektronen, ausrichtet. Das Magnetfeld dreht sich von Süd nach Nord und hat eine Flussdichte  $\vec{B}$ , sowie eine Feldstärke  $\vec{H}$ . Dabei ist zu beachten, dass sich die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  analog zur elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$ , und die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  analog zur elektrischen Flussdichte  $\vec{D}$ , verhält. Im Modul 6 wird das Thema Magnetismus ausführlicher behandelt. In diesem Modul geht es primär um das Kennenlernen der Spule und der Induktivität.

Der britische Physiker und Chemiker Michael Faraday führte Mitte des 19. Jahrhunderts Experimente durch, bei denen er eine Spule in der Nähe eines Magneten bewegte oder den Strom in einer benachbarten Spule veränderte. Dabei stellte er fest, dass sich die Größe der induzierten Spannung proportional zur Änderungsrate des Magnetfeldes verhält.

$$U_i \sim \frac{d\phi}{dt} \quad (5.1)$$

Faraday stellte fest, dass der Proportionalitätsfaktor von der Anzahl der Wicklungen der Spule abhängt.

$$U_i = -N \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad (5.2)$$

Etwa zur gleichen Zeit entdeckte der amerikanische Physiker Joseph Henry das Phänomen der Selbstinduktion, wobei ein elektrischer Strom in einer Spule eine Spannung in der Spule selbst induzieren kann, wenn der Strom verändert wird. Auch hier wurde ein proportionales Verhalten festgestellt.

$$U_i \sim \frac{dI}{dt} \quad (5.3)$$

Diese Eigenschaft der Spule die durch das Speichern magnetischer Energie entsteht ist die Induktivität  $L$ , deren Einheit dem Physiker zu Ehren als Henry [H] benannt wurde.

$$U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (5.4)$$

Das Minus-Zeichen kommt daher, dass der induzierte Strom nach der Lenz'schen Regel seiner Ursache entgegenwirkt.

Analog zum Kondensator, kann auch das zeitabhängige Verhalten für die Spule folgendermaßen ausgedrückt werden:

Spannung über der Induktivität

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad (5.5)$$

Strom durch die Induktivität

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t) dt \quad (5.6)$$

## 5.2 Die Spule als Bauelement

Mit dem Wissen über das magnetische Feld kann nun der Aufbau und die Funktionsweise der Spule erklärt werden. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Zylinderluftspule. Wird ein Leiter zu einer Leiterschleife geformt, bildet sich das Magnetfeld so aus, dass es durch die Schleifenöffnung hindurchgeht. Werden nun mehrere Leiterschleifen hintereinander gewickelt, wird das Magnetfeld um den Faktor der Windungszahl verstärkt. Diese Anordnung von gewickelten Leiterschleifen ergibt die in Abbildung 5.3 gezeigte Zylinderluftspule.

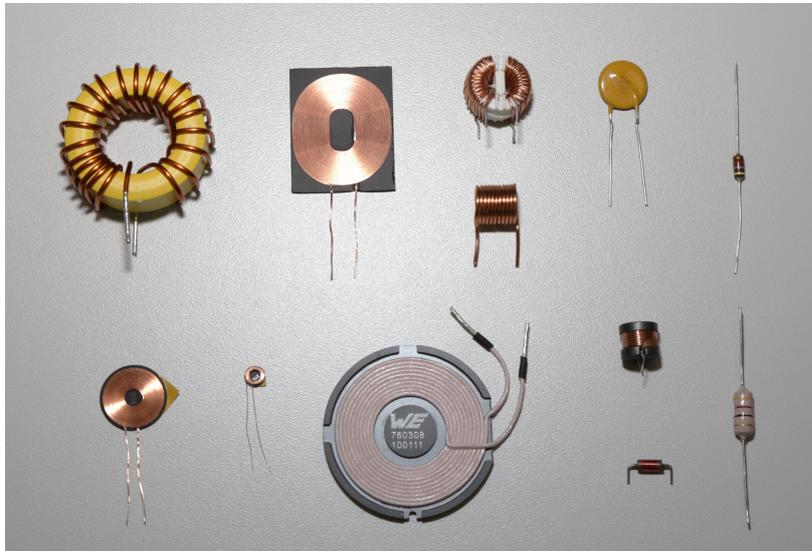


Abbildung 5.3: **Verschiedene Arten und Bauformen von Spulen.** Darunter Zylinderspulen, Ringkernspulen, Eisenkernspulen und Luftspulen. Eine größere Anzahl von Windungen erhöht die Konzentration des Magnetfelds und steigert die Induktivität der Spule. Ein Eisenkern kann zusätzlich verwendet werden, um die Magnetfeldlinien zu bündeln und die Effizienz zu verbessern.

Ihren Namen verdankt diese Spule ihrer zylindrischen Form in Längsrichtung und des Mediums Luft im inneren ihrer Wicklungen. Wenn nun ein Strom durch die Spule fließt, überlagern sich die Magnetfelder der einzelnen Wicklungen zu einem stärkeren Magnetfeld. Die Stärke hängt dabei von

der Windungszahl und der Stromstärke, sowie der Entfernung zum Leiter, ab. Je nach Orientierung des Stromes und der Wicklungen, entsteht bei einer Zylinderluftspule auf der einen Seite ein Nord- und auf der anderen Seite ein Südpol. Der Verlauf der Magnetfeldlinien in einer Zylinderluftspule entspricht der Abbildung 5.1.

Was alle Spulen verbindet, ist ihre Fähigkeit, die Eigenschaft der Induktivität nutzbar zu machen, wie es im folgenden Schaltbild 5.5 dargestellt ist. Dieses Schaltbild repräsentiert jedoch nur die idealisierte, nutzbare Induktivität.



Abbildung 5.4: **Schaltungselement für Spule.** Europäisches (links) und amerikanisches (rechts).

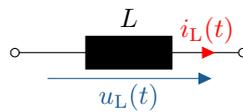


Abbildung 5.5: **Schaltzeichen einer idealen Spule.**

Für eine realitätsgetreue Nachbildung der Schaltung ist es wichtig die Spule als Bauteil vollständig zu beschreiben. Dies wird mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes gemacht, welches auch die ungewollten, also parasitären Eigenschaften des Bauteils, nachbildet. Abbildung 5.6 zeigt ein solches Ersatzschaltbild.

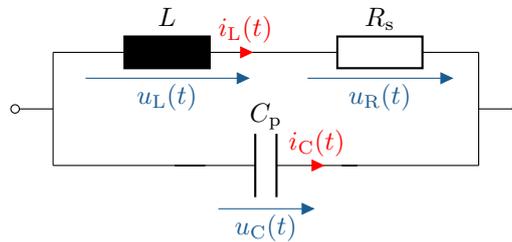


Abbildung 5.6: **Ersatzschaltbild einer realen Spule.** Die ideale Spule  $L$  wird durch einen Serienwiderstand  $R_s$  und einen parallel geschalteten Kondensator  $C_p$  ergänzt, um parasitäre Effekte zu berücksichtigen.

Im Ersatzschaltbild einer Spule werden nicht nur die nutzbare Induktivität, sondern auch die parasitären Eigenschaften berücksichtigt, die in realen Spulen auftreten. Diese parasitären Eigenschaften entstehen beispielsweise durch die Kapazitäten zwischen den Wicklungen und die ohmschen Verluste im Material. Das modellierte Ersatzschaltbild ermöglicht es, diese Effekte im Schaltungsentwurf zu berücksichtigen und das Schaltverhalten besser vorherzusagen.

### Merke:

Die Spule ist der verzweifelte Versuch, eine Induktivität nachzubilden.

### 5.3 Die Permeabilität

Ähnlich wie im Fall des Kondensators und der Kapazität, unterscheidet sich auch die Stärke des Magnetfeldes abhängig vom Material. Was beim Kondensator das Dielektrikum und die Permittivität sind, wird bei der Spule als ferromagnetisches Material und Permeabilität bezeichnet. Ein Beispiel einer Spule mit einem ferromagnetischen Material ist die Ringkernspule 5.7.

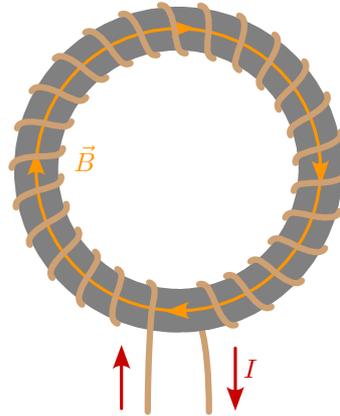


Abbildung 5.7: **Ringkernspule mit Eisenkern.** Der Eisenkern verstärkt das Magnetfeld und erhöht die Induktivität der Spule. Diese Bauweise minimiert Streufelder und verbessert die Effizienz, indem sie das Magnetfeld innerhalb des Kerns konzentriert.

Bei der Ringkernspule handelt es sich um einen mit Draht umwickelten Ferritring. Innerhalb des Materials findet eine Ausrichtung auf atomarer Ebene statt, was zu einer Verstärkung des Magnetfeldes führt. Die Stärke der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  wird dabei neben den Dimensionen und der Stromstärke, von den Materialeigenschaften, insbesondere von der Permeabilität, bestimmt.

Die folgende Tabelle 5.1 zeigt die Permeabilitätszahl einiger gängiger Materialien:

Material	$\mu_r$
Supraleiter 1. Art	0
Vakuum	1
Luft (bei STP)	1.00000037
Kupfer	0.999994
Gold	0.999964
Aluminium	1.000022
Eisen	300 – 10000
Ferrit	4 – 15000

Tabelle 5.1: **Relative Permeabilitätszahl verschiedener Materialien:** Diese dimensionslose Zahl gibt an, wie stark das magnetische Feld in einem Material im Vergleich zum Vakuum beeinflusst wird. Sie ist ein Maß für die Fähigkeit des Materials, magnetische Flüsse zu speichern oder zu leiten. Materialien mit einer höheren Permeabilitätszahl erhöhen die Induktivität von Spulen.

Zur vollständigen Beschreibung der Eigenschaften des ferromagnetischen Materials wird neben der Permeabilitätszahl noch die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  benötigt. Dabei handelt es sich um das Verhalten des magnetische Feldes im Vakuum. Während die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  einheitslos ist, bringt die magnetische Feldkonstante die Einheit H/m mit. Sie wird mit der relativen Permeabilität des Materials multipliziert was zusammen die Permeabilitätskonstante  $\mu$  ergibt.

$$[\mu] = 1 \frac{\text{Henry}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{H}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad (5.7)$$

$\mu$  : Permeabilitätskonstante

$\mu_0$  : Magnetische Feldkonstante ( $\approx 4\pi \cdot 10^{-7}$ )

$\mu_r$  : Relative Permeabilitätszahl

Mit Hilfe der Permeabilität, des Stromes, der Windungszahl und der Länge der Spule, kann die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  mit der Einheit Tesla T berechnet werden.

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (5.8)$$

$$[B] = \frac{\text{H/m} \cdot \text{A} \cdot 1}{\text{m}} = \frac{\text{H} \cdot \text{A}}{\text{m}^2} = \frac{(\text{V} \cdot \text{s} / \cancel{\text{A}}) \cdot \cancel{\text{A}}}{\text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{T (Tesla)}$$

$$B = \frac{\mu \cdot I \cdot N}{l} \quad (5.9)$$

$\mu$  : Permeabilitätskonstante

$I$  : Elektrische Stromstärke

$N$  : Anzahl der Windungen

$l$  : Länge des Magnetkreises

Die Induktivität selbst hängt ebenfalls von der Bauform und den verwendeten Materialien ab.

$$[L] = 1 \text{ Henry} = 1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$$

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{l} \quad (5.10)$$

## 5.4 Die magnetische Feldstärke

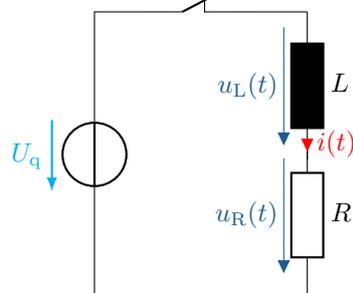
$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (5.11)$$

## 5.5 Schaltverhalten einer Spule

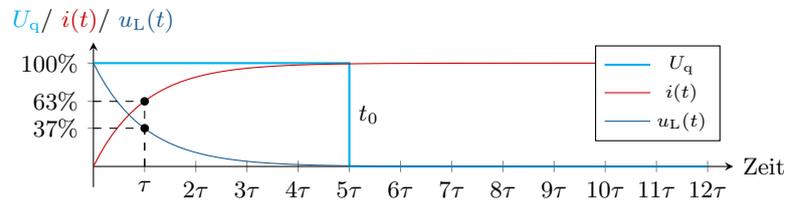
Zum besseren Verständnis der Funktion einer Spule wird nun ein zeitlich veränderliches Signal, hier der Einschalt- und Ausschaltvorgang, betrachtet. Das grundlegende Prinzip der Induktivität basiert darauf, dass ein zeitlich veränderlicher Strom ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt. Dieses

zeitlich veränderliche Magnetfeld induziert wiederum einen Induktionsstrom in die Spule selbst. Aufgrund der Lenz'schen Regel wirkt der Induktionsstrom jedoch entgegen seiner Ursache, was einen sprunghaften Anstieg des Stromes verhindert.

Schalter wird bei  $t_0 = 5\tau$  geöffnet

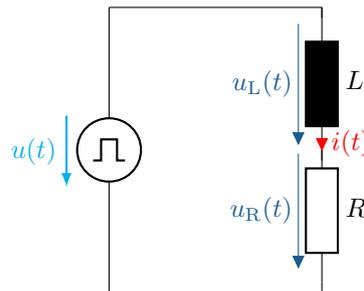


(a) Darstellung der Reihenschaltung bestehend aus einer Induktivität  $L$ , einem Widerstand  $R$  und einem Schalter.

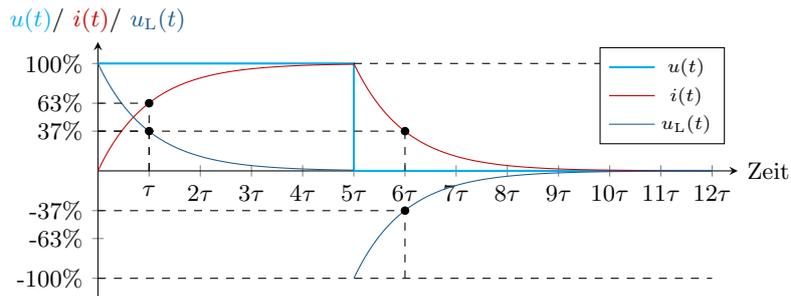


(b) Spannungs- und Stromverlauf über der Induktivität bei einer Gleichspannung die zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltet wird und zum Zeitpunkt  $t_0$  abgeschaltet wird.

Abbildung 5.8: **Der Spannungs- und Stromverlauf über der Induktivität.** Das Diagramm zeigt die Reaktion der Induktivität auf die plötzliche Änderung der Spannung und veranschaulicht das typische Ladeverhalten.



(a) Darstellung der Reihenschaltung bestehend aus einer Induktivität  $L$  und einem Widerstand  $R$  an einer rechteckförmigen Spannungsquelle.



(b) Spannungs- und Stromverlauf über der Induktivität bei einer rechteckförmigen Spannung.

Abbildung 5.9: **Spannungs- und Stromverlauf über der Induktivität.** Das Diagramm zeigt die Reaktion der Induktivität auf eine plötzliche Änderung der Spannung und veranschaulicht das typische Lade- und Entladeverhalten der Induktivität.

In der praktischen Anwendung ermöglicht die Induktivität die Konstruktion von Komponenten wie Transformatoren, Drosseln und Induktivitäten, die in einer Vielzahl von elektrischen und elektronischen Geräten zu finden sind. Von der Filterung von Signalen über die Energieübertragung bis hin zur Steuerung elektromagnetischer Interferenzen ist die Induktivität ein Schlüsselement in der modernen Elektrotechnik.

### Beispiel 5.1: Berechnung der Induktivität

- Berechnung der Induktivität  $L$
- Berechnung der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$
- Gespeicherte Energie im Magnetfeld  $E_m$  ?



## A Übungsaufgaben

### A.1 Materialabhängigkeit des Widerstandes R

Ein Draht aus Kupfer hat folgende Eigenschaften:

- Länge:  $l = 5 \text{ m}$
- Querschnittsfläche:  $A = 1 \text{ mm}^2$
- spezifischer Widerstand von Kupfer:  $\rho = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$

Berechne  $R$  des Drahtes.

### A.2 Elektrischer Widerstand

Eine kugelförmige Hohlstruktur besteht aus zwei ideal leitfähigen Schalen – einer inneren mit Radius  $a$  und einer äußeren mit Radius  $b$ .

Der Zwischenraum ist vollständig mit einem homogenen, leitfähigen Material gefüllt, das die elektrische Leitfähigkeit  $\kappa$  (in  $\text{S m}^{-1}$ ) besitzt.

Zwischen den leitenden Schalen wird durch eine Spannungsquelle eine Spannung

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

angelegt.

Der Strom kann sich aufgrund der vollständigen Füllung und der idealen Kontakte ungehindert ausbreiten.

Berechnen Sie den elektrischen Widerstand  $R$  zwischen den beiden kugelförmigen Schalen in Abhängigkeit von  $a$ ,  $b$  und  $\kappa$ .

### A.3 Elektrischer Widerstand eines beschichteten Drahts

Ein runder Aluminiumdraht besitzt einen Radius von  $a = 0.5 \text{ mm}$ . Er ist mit einer dünnen Goldschicht von  $b = 0.1 \text{ mm}$  Dicke überzogen.

Für die spezifische elektrische Leitfähigkeit und den Temperaturkoeffizienten der beiden Metalle gelten folgende Werte:

- **Aluminium:**

$$\kappa_{\text{Alu}} = 35 \text{ m}/(\Omega \text{ mm}^2), \quad \alpha_{\text{Alu}} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

- **Gold:**

$$\kappa_{\text{Gold}} = 44 \text{ m}/(\Omega \text{ mm}^2), \quad \alpha_{\text{Gold}} = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

**Gegeben:** Drahtlänge:  $l = 1.5 \text{ m}$  Temperatur:  $T = 25^\circ \text{C}$  (Ausgangstemperatur)

- Berechnen Sie den elektrischen Gleichstromwiderstand des Aluminiumkerns und der Goldummantelung bei  $T = 25^\circ \text{C}$ .
- Wie verändert sich der jeweilige Gleichstromwiderstand, wenn die Temperatur auf  $T = 90^\circ \text{C}$  ansteigt?

## A.4 Reale Stromquellen

Eine reale Stromquelle hat eine Leerlaufspannung  $U_0 = 9\text{ V}$  und einen Innenwiderstand  $R_i = 1\ \Omega$ .

- wie groß ist die Klemmenspannung, wenn ein Lastwiderstand von  $R_l = 4\ \Omega$  angeschlossen wird ?.
- wie groß ist der Strom durch die Last?

## A.5 Spannungsquelle

Gegeben ist ein Netzwerk aus einer Spannungsquelle mit  $U = 10\text{ V}$ , einem Reihenwiderstand  $R_1 = 2\ \Omega$  und einem parallelen Widerstand  $R_2 = 4\ \Omega$ .

Berechne Ströme und Spannungen im Netzwerk.

## A.6 Kapazität und Kondensator

### Teil 1: Einzelner Kondensator

Gegeben:

$$C = 10\text{ pF}, \quad U = 5\text{ V}$$

- Berechne die Ladung  $Q$
- Berechne die im Kondensator gespeicherte Energie

### Teil 2: Zwei Kondensatoren in Reihe

Zwei Kondensatoren  $C_1$  und  $C_2$  sind in Reihe geschaltet.

$$C_1 = 4\ \mu\text{F}, \quad C_2 = 6\ \mu\text{F}, \quad U_{\text{ges}} = 12\text{ V}$$

- Berechne die Gesamtkapazität  $C_{\text{ges}}$
- Wie groß ist die Spannung über  $C_1$ ?

## A.7 Induktivität und Spule

### Teil 1: Energie in der Spule

Gegeben ist eine Spule mit der Induktivität

$$L = 2\text{ H}$$

und einem Strom

$$I = 3\text{ A}.$$

- Berechne die im Magnetfeld der Spule gespeicherte Energie.
- Wie ändert sich die Energie, wenn der Strom auf  $I = 0.5\text{ A}$  reduziert wird?

### Teil 2: Induktivität einer zylindrischen Spule

Eine zylindrische Spule hat

$$N = 500 \text{ Wicklungen, } l = 20 \text{ cm, } A = 5 \text{ cm}^2$$

Das Innere der Spule ist luftgefüllt.

Berechne die Induktivität  $L$  der Spule.

## A.8 Induktivität, Magnetische Flussdichte und Magnetfeldenergie

Ein luftgefüllter, langer zylindrischer Spulenleiter besitzt folgende Eigenschaften:

- Anzahl der Windungen:  $N = 500$
- Länge der Spule:  $l = 0.5 \text{ m}$
- Querschnittsfläche:  $A = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
- Stromstärke:  $I = 2.5 \text{ A}$

**Gegeben:** Magnetische Feldkonstante:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$

- a) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  im Inneren der Spule.
- b) Bestimmen Sie die Induktivität  $L$  der Spule.
- c) Berechnen Sie die im Magnetfeld gespeicherte Energie  $E_m$ .

## B Lösungen zu den Übungsaufgaben

### B.1 Materialabhängigkeit des Widerstandes R

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 1,68 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{5}{1 \cdot 10^{-6}} = 0.084 \Omega$$

### B.2 Elektrischer Widerstand

Da das System radial-symmetrisch ist, fließt der Strom radial von innen nach außen (oder umgekehrt), und das elektrische Feld hängt nur vom Radius  $r$  ab.

Die Stromdichte ergibt sich über das Ohm'sche Gesetz in Differentialform:

$$\vec{j}(r) = \kappa \cdot \vec{E}(r)$$

Die Fläche, durch die der Strom bei Radius  $r$  fließt, ist die Oberfläche einer Kugel:

$$A(r) = 4\pi r^2$$

Der Gesamtstrom ist konstant durch alle Kugelflächen:

$$I = j(r) \cdot A(r) = \kappa \cdot E(r) \cdot 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{I}{4\pi\kappa r^2}$$

**Spannung berechnen:**

Die Spannung ergibt sich durch das Integral über das elektrische Feld:

$$U = \int_a^b E(r) dr = \int_a^b \frac{I}{4\pi\kappa r^2} dr = \frac{I}{4\pi\kappa} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{I}{4\pi\kappa} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^b$$

$$U = \frac{I}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

**Widerstand berechnen:**

Da  $U = R \cdot I$  gilt, folgt

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Der elektrische Widerstand zwischen den beiden Schalen beträgt somit:

$$R = \frac{1}{4\pi\kappa} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

### B.3 Elektrischer Widerstand eines beschichteten Drahts

Radius Aluminiumkern:  $a = 0.5 \text{ mm}$

Dicke der Goldschicht:  $b = 0.1 \text{ mm}$

$\Rightarrow$  Gesamtradius:  $r = a + b = 0.6 \text{ mm}$

Länge des Leiters:  $l = 1.5 \text{ m} = 1500 \text{ mm}$

Aluminium:  $\kappa_{\text{Alu}} = 35 \text{ m}/(\Omega\text{mm}^2)$ ,  $\alpha_{\text{Alu}} = 3,5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

Gold:  $\kappa_{\text{Gold}} = 44 \text{ m}/(\Omega\text{mm}^2)$ ,  $\alpha_{\text{Gold}} = 3,6 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

Temperaturänderung:

$T_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C} = 298 \text{ K}$

$T_2 = 90 \text{ }^\circ\text{C} = 363 \text{ K}$

$\Delta T = T_2 - T_1 = 65 \text{ K}$

Querschnittsflächen berechnen

Aluminiumkern:  $A_{\text{Alu}} = \pi a^2 = \pi \times (0.5)^2 = \pi \times 0.25 = 0.7854 \text{ mm}^2$

Goldmantel (Ringfläche zwischen  $r = 0.6 \text{ mm}$  und  $a = 0.5 \text{ mm}$ ):

$A_{\text{Gold}} = \pi(r^2 - a^2) = \pi(0.6^2 - 0.5^2) = \pi(0.36 - 0.25) = \pi \times 0.11 \approx 0.3456 \text{ mm}^2$

Widerstände bei  $25 \text{ }^\circ\text{C}$

Formel:

$$R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$$

$$R_{\text{Alu}} = \frac{1500}{35 \times 0.7854} = \frac{1500}{27.489} \approx 54.58 \text{ m}\Omega$$

$$R_{\text{Gold}} = \frac{1500}{44 \times 0.3456} = \frac{1500}{15.206} \approx 98.61 \text{ m}\Omega$$

Widerstände bei 90 °C

Temperaturabhängiger Widerstand:

$$R(T) = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$R_{\text{Alu},90^\circ\text{C}} = 54.58 \times (1 + 3.5 \times 10^{-3} \times 65) = 54.58 \times 1.2275 \approx 66.97 \text{ m}\Omega$$

$$R_{\text{Gold},90^\circ\text{C}} = 98.61 \times (1 + 3.6 \times 10^{-3} \times 65) = 98.61 \times 1.234 \approx 121.64 \text{ m}\Omega$$

Material	Widerstand bei 25 °C	Widerstand bei 90 °C
Aluminium	54.58 mΩ	66.97 mΩ
Gold	98.61 mΩ	121.64 mΩ

## B.4 Reale Stromquellen

a) **Klemmenspannung  $U_k$ :**

Die Klemmenspannung berechnet sich mit dem Spannungsteiler:

$$U_k = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_i + R_1} = 9 \text{ V} \cdot \frac{4 \Omega}{1 \Omega + 4 \Omega} = 9 \cdot \frac{4}{5} = 7.2 \text{ V}$$

b) **Strom durch die Last  $I$ :**

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_1} = \frac{9}{1 + 4} = \frac{9}{5} = 1.8 \text{ A}$$

## B.5 Spannungsquelle

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 = 2 + 4 = 6 \Omega, \quad I = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{10}{6} = 1.67 \text{ A}$$

$$U_{R_1} = I \cdot R_1 = 1.67 \cdot 2 = 3.33 \text{ V}, \quad U_{R_2} = U - U_{R_1} = 6.67 \text{ V}$$

$$I_{R_2} = \frac{U_{R_2}}{R_2} = \frac{6.67}{4} = 1.67 \text{ A}$$

## B.6 Kapazität und Kondensator

a) **Ladung:**

$$Q = C \cdot U = 10 \cdot 10^{-12} \cdot 5 = 50 \text{ pC}$$

b) **Gespeicherte Energie:**

$$E = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 25 = 125 \text{ pJ}$$

c) **Gesamtkapazität der Reihenschaltung:**

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \Rightarrow C_{\text{ges}} = 2.4 \mu\text{F}$$

d) **Spannung über  $C_1$ :**

$$Q = C_{\text{ges}} \cdot U_{\text{ges}} = 2.4 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 28.8 \mu\text{C}$$

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{28.8 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}} = 7.2 \text{ V}$$

## B.7 Induktivität und Spüle

a) **Energie bei  $I = 3 \text{ A}$ :**

$$E = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^2 = 9 \text{ J}$$

b) **Energie bei  $I = 0.5 \text{ A}$ :**

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0.5^2 = 0.25 \text{ J}$$

c) **Berechnung der Induktivität  $L$  der zylindrischen Spule:**

Zunächst die Umrechnung der Einheiten:

$$l = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad A = 5 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Die Induktivität einer luftgefüllten zylindrischen Spule berechnet sich durch:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$$

mit der magnetischen Feldkonstanten

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$$

Einsetzen:

$$L = 4\pi \times 10^{-7} \cdot \frac{500^2 \cdot 5 \times 10^{-4}}{0.2} = 7.85 \times 10^{-2} \text{ H} = 78.5 \text{ mH}$$

## B.8 Induktivität, Magnetische Flussdichte und Magnetfeldenergie

a) **Magnetische Flussdichte  $\vec{B}$ :**

Für eine lange, luftgefüllte Zylinderspule gilt:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$$

Einsetzen der Werte:

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{500}{0.5} \cdot 2.5 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000 \cdot 2.5$$

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2500 = \pi \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

$$\Rightarrow B \approx 3.14 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 3.14 \text{ mT}$$

**b) Induktivität  $L$ :**

Die Induktivität einer langen luftgefüllten Spule ergibt sich aus:

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l}$$

Einsetzen der Werte:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{500^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{0.5}$$
$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{250000 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{0.5} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{100}{0.5} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200$$
$$L = 8\pi \cdot 10^{-5} \text{ H} \Rightarrow L \approx 2.51 \times 10^{-4} \text{ H} = 251 \text{ }\mu\text{H}$$

**c) Gespeicherte Energie im Magnetfeld  $E_m$ :**

Die Energie im Magnetfeld einer Spule berechnet sich mit:

$$E_m = \frac{1}{2} LI^2$$

Einsetzen:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 2.51 \cdot 10^{-4} \cdot (2.5)^2 = 0.5 \cdot 2.51 \cdot 10^{-4} \cdot 6.25$$
$$E_m = 7.84 \cdot 10^{-4} \text{ J} = 0.784 \text{ mJ}$$