GET it digital

Modul 4:

Grundlegende Gleichstromnetzwerke

Henrik Bode

Ein Kooperationsvorhaben
empfohlen durch die

gefördert durch

Stand: 5. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Elektrische Netzwerke sind in der heutigen Welt omnipräsent. Sie bestehen aus Zusammenschaltungen von verschiedenen elektrischen Bauteilen, welche durch Verbindungsleitungen miteinander verknüpft sind. In der Realität kommen sie in den verschiedensten Funktionen und Größenordnungen vor. So kann ein elektrisches Netzwerk sowohl eine kleine elektronische Schaltung innerhalb eines Mikrocontrolers mit einer Größe von einigen Mikrometern darstellen, als auch ein elektrisches Energieverteilungsnetz mit Ausdehnungen von bis zu einigen 1000 Kilometern abbilden, wie sie symbolisch in den Abbildungen 1.1 bzw. 1.2 angedeutet sind.

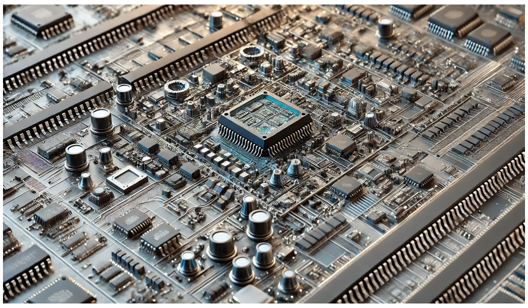


Abbildung 1.1: Symbolbild eines kleinen elektrischen Netzwerkes auf einer Platine

Abbildung 1.2: Symbolbild eines großen elektrischen Netzwerkes

Dieses Kapitel bietet eine Einführung zu grundlegenden Berechnungen in elektrischen Gleichstromnetzwerken. Ziel dieser Berechnung ist es in der Regel, die Spannungen und Ströme in allen Bauteilen des Netzwerkes zu berechnen. Reale Bauteile werden dazu in der Regel vereinfacht als Kombination idealer Zweipole dargestellt (Beispiele: Tabelle 2.1). Aus der Verschaltung dieser Zweipole lässt sich ein vereinfachtes Modell der realen Schaltung aufbauen, welches das grundlegende Verhalten der Schaltung nachbildet. Dieses Modell bildet die Grundlage zur mathematischen Berechnung der Schaltung.

Da in diesem Kapitel ausschließlich lineare Bauteile wie Widerstände oder ideale Gleichspannungsquellen verwendet werden, ist eine analytische Berechnung grundsätzlich immer möglich. In fortgeschrittenen Modulen werden hingegen nichtlineare Bauelemente wie reale Operationsverstärker oder Dioden eingeführt. In diesem Fall ist oft eine iterative bzw. numerische Herangehensweise notwendig.

2 Zweipole und Zählpfeilsysteme

Lernziele: Zweipole und Zählpfeilsysteme

Die Studierenden können

- den Begriff des Zweipols erläutern sowie gängige Zweipole nennen und deren Schaltsymbole verwenden
- das Erzeuger- sowie Verbraucherzählpfeilsystem erläutern und entsprechend der Konventionen anwenden
- die zentralen Elemente des Grundstromkreises erläutern und die Zusammenhänge zwischen diesen erkennen

2.1 Zweipole

Als Zweipol (Abb. 2.1) wird ein Bauelement mit zwei äußeren Anschlussklemmen bezeichnet. Der innere Aufbau dieser Zweipole kann dabei von gänzlich unterschiedlicher Art und Komplexität sein. Beispielsweise ist ein einfacher elektrischer Widerstand, aber auch eine Spannungsquelle (beispielsweise eine Autobatterie) oder ein Haartrockner (sofern dieser nur zwei Anschlussleitungen besitzt) als Zweipol zu sehen. Bauteile mit mehr Anschlussleitungen werden entsprechend als Dreipol (z.B. Kühlschrank mit Schutzleiter), Vierpol (z.B. Transformator) oder gar Fünfpol (elektrischer Herd mit Drehstromanschluss, Schutzleiter und Neutralleiter) bezeichnet.

Unabhängig von der inneren Komplexität kann ein Zweipol im elektrischen Netzwerk vollständig durch die Beziehung von Strom und Spannung an seinen Anschlusspunkten, dem sogenannten **Klemmenverhalten**, charakterisiert werden. Zu beachten ist dabei, dass der in Abbildung 2.1 eingezeichnete Strom I_1 eines Zweipols stets genauso groß wie der Strom I_2 ist.

Die praktische Realisierung der Bauteile wie reale Baumaße, Materialeigenschaften, parasitäre Effekte oder interne inhomogene Feldstärkeverteilungen werden in der Netzwerkberechnung mit Zweipolen vernachlässigt.

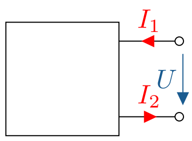


Abbildung 2.1: Allgemeine Darstellung eines Zweipols mit den gleich großen Stromstärken I_1 und I_2 sowie der anliegender Spannung U

Einige der bereits aus vorherigen Kapiteln bekannte Zweipole sind in Tabelle 2.1 beispielhaft aufgeführt.

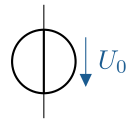
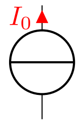
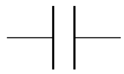
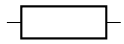
Zweipol	Schaltzeichen
ideale Spannungsquelle	
ideale Stromquelle	
Kondensator (Kapazität)	
ohmscher Widerstand	
Spule (Induktivität)	

Tabelle 2.1: Beispiele verschiedener Zweipole sowie ihrer Schaltzeichen

2.2 Zählpfeilsysteme

Die Wahl der Zählrichtungen von Strom und Spannung ist grundsätzlich beliebig. Bei der Berechnung elektrischer Netzwerke wird häufig versucht, die Zählrichtungen so einzuführen, dass die Ströme und Spannungen positiv sind. Das ist für von vornherein bekannte Größen durchaus sinnvoll. Für unbekannte Größen muss die Zählrichtung hingegen willkürlich festgelegt werden. Es wird dadurch nicht ausgedrückt, dass der Strom tatsächlich in der Pfeilrichtung fließt bzw. eine positive Spannung in Pfeilrichtung anliegt. Die tatsächliche Richtung wird dann durch das Vorzeichen der Spannung ausgedrückt. Für eine vorzeichengerechte Beschreibung von Strömen und Spannungen ist also eine Bemaßung mit Zählpfeilen zwingend notwendig.

Bei Zweipolen wird zwischen den in Tabelle 2.2 vorgestellten zwei unterschiedlichen Zählpfeilsystemen unterschieden:

Merke: Verbraucher- und Erzeugerzählpfeilsysteme

Verbraucher-Zählpfeilsytem (VPS): Strom und Spannung werden am Zweipol gleichsinnig gezählt. Anzuwenden bei passiven Zweipolen (z.B. Widerständen)

Erzeuger-Zählpfeilsystem (EPS): Strom und Spannung werden am Zweipol entgegengesetzt gezählt. Anzuwendn bei aktiven Zweipolen (z.B. Spannungsquellen)

Merke: Zählpfeile

Zählpfeile dienen der Zählweise und sind nicht mit Vektoren zu verwechseln!

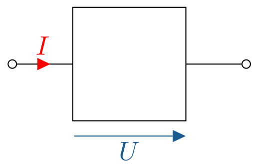
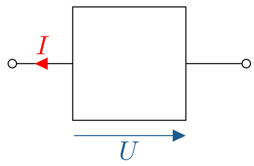
Zählpfeilsystem	Erzeugte Leistung	Verbrauchte Leistung	Zählpfeile am Verbraucher
VPS	$P = -UI$	$P = UI > 0$	
EPS	$P = UI > 0$	$P = -UI$	

Tabelle 2.2: Vergleich zwischen Verbraucherzählpfeilsystem (VPS) und Erzeugerzählpfeilsystem (EPS).

2.3 Der Grundstromkreis

Die zuvor eingeführten Zweipole (oder auch Mehrpole) lassen sich zu einem elektrischen Netzwerk zusammenschließen.

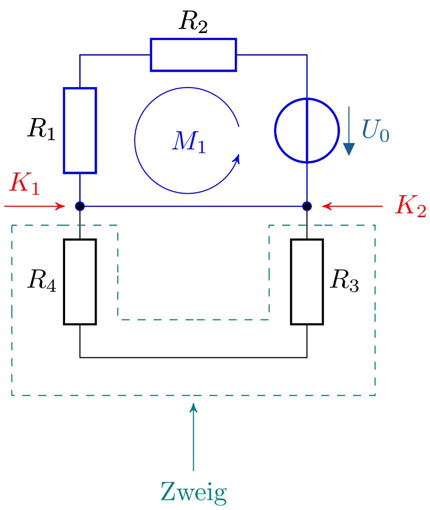


Abbildung 2.2: Der elektrische Grundstromkreis mit eingezeichneten Zweigen, Knoten und Maschen

Dabei bilden die idealisierten Zweipole **Zweige**, die wie in Abb. 2.2 auch aus mehreren direkt hintereinandergeschalteten Zweipolen bestehen können. Durch alle Elemente eines Zweiges fließt der gleiche Strom. Neben dem in Abbildung 2.2 grün markierten Zweig bilden auch die Zweipolgruppe R_1, R_2 und U_0 sowie der Kurzschluss in der der Zeichnung jeweils einen weiteren Zweig.

Die Verbindungspunkte, an denen sich jeweils mindestens drei Zweige treffen, werden als **Knoten** oder Knotenpunkte bezeichnet. Ein fließender elektrischer Strom kann sich hier auf die verschiedenen Zweige aufteilen. Das elektrische Potential ist jedoch für alle verbundenen Anschlüsse identisch. Ein Knoten wird im Schaltplan durch einen ausgefüllten Kreis gekennzeichnet und mit K_n genannt. Geschlossene Pfade von mindestens zwei sich aneinanderreihenden Zweigen innerhalb eines Netzwerkes werden **Maschen** genannt und mit M_n abgekürzt. Im Schaltplan wird neben der Bezeichnung der Masche häufig auch eine Umlaufrichtung mit einem Pfeil angedeutet, der die Umlaufrichtung der

Masche angibt. Im hier gezeichneten Grundstromkreis lassen sich neben der eingezeichneten Masche M_1 bestehend aus R_1, R_2, U_0 und dem Kurzschluss zwischen den Knoten K_1 und K_2 zwei weitere Maschen finden: Der grün eingezeichnete Zweig zusammen mit dem Kurzschluss zwischen K_1 und K_2 bilden eine Masche M_2. Eine weitere Masche M_3 außen herum führt außen um die Schaltung herum und enthält alle eingezeichneten Zweipole, nicht jedoch den Kurzschluss zwischen K_1 und K_2.

3 Kirchhoffsche Sätze

Die im vorherigen Modul eingeführten Bauteilgleichungen, welche den Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an den einzelnen Bauteilen aufzeigen, reichen nicht aus, um sämtliche Spannungen und Ströme innerhalb eines Netzwerkens zu berechnen. Die Kirchhoffschen Regeln, auch Maschen- bzw. Knotenregel genannt, liefern die hierzu benötigten Gleichungen.

Lernziele: Kirchhoffsche Regeln

Die Studierenden können

- die Kernaussagen der Kirchhoffschen Regeln wiedergeben
- die Kirchhoffschen Regeln auf einfache Widerstandsnetzwerke anwenden

3.1 Knotenregel (1. Kirchhoffsche Regel)

Die Knotenregel sagt aus, dass die Summe aller in einen Knoten hereinfließenden Ströme identisch zu Summe aller herausfließenden Ströme ist:

Merke:

Summe der zufließenden Ströme = Summe der abfließenden Ströme

Mathematisch ausgedrückt resultiert dies in folgendem Zusammenhang:

$$\sum I_{\mathrm{zu}} = \sum I_{\mathrm{ab}} \tag{3.1}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Ströme entsprechend ihrer Zählpfeilrichtung gewertet werden. In den Knoten hereinfließende Ströme werden positiv, aus dem Knoten herausfließende Ströme werden negativ gezählt. Falls die tatsächliche Richtung eines Stromes im Vorfeld nicht bekannt ist, kann die Zählpfeilrichtung willkürlich festgelegt werden. Die tatsächliche Stromrichtung ergibt sich aus dem Zahlenwert als Rechenergebnis. Ist dieses für einen Strom negativ, sprich $I < 0$, fließt der reale Strom in die entgegengesetzte Richtung.

Alternativ lässt sich dieser Zusammenhang auch dadurch ausdrücken, dass die Summe aller Ströme in einem Knoten gleich 0 ist:

$$\sum_{i=1}^{n} = 0 \tag{3.2}$$

Auf den beispielhaften Knoten in Abbildung ?? angewendet ergeben sich folgende Gleichungen:

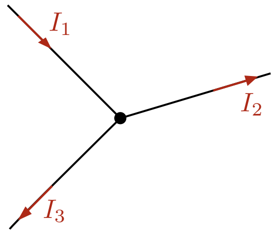


Abbildung 3.1: Einfacher Beispielknoten

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Der Knoten, auf den sich die Regel bezieht, muss jedoch nicht nur aus einem Punkt bestehen. Vielmehr ist möglich, sogenannte **Hüllknoten** zu definieren, die einen Bereich innerhalb einer Schaltung vollständig umschließen. Angewendet auf den in Abbildung 3.2 gezeigten Hüllknoten ergibt sich die Gleichung

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

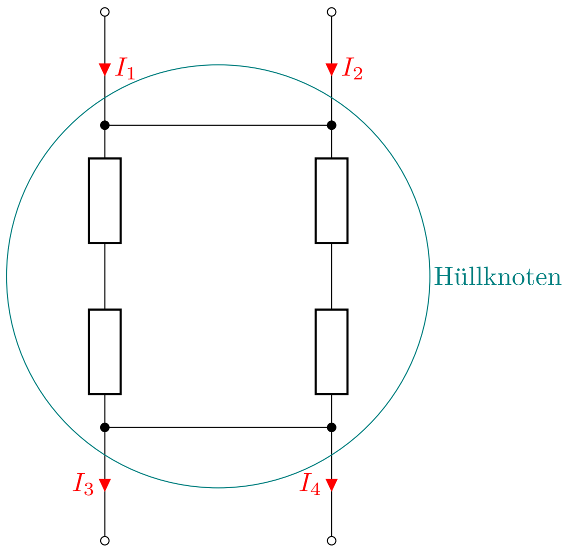


Abbildung 3.2: Hüllknoten einer elektrischen Schaltung

Die Knotenregel ist durch die Verallgemeinerung des Ladungserhaltungssatzes für quellenfreie Strömungsfelder nicht nur auf diskrete Bauelemente anwendbar. Vielmehr kann sie auf jede reale Struktur angewendet werden. In Abbildung 3.3 ist die in den Draht hereinfließende Stromstärke I folglich genauso hoch wie die gesamte Stromstärke, welche aus der Hüllfläche des Blechausschnitts heraustritt.

Allgemein lässt sich dieser Zusammenhang über das geschlossene Flächenintegral über die Hüllfläche $\vec{A}$ beschreiben:

$$\iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{3.3}$$

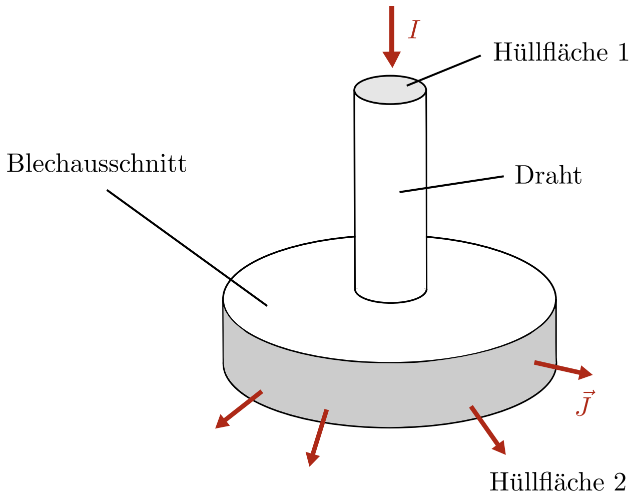


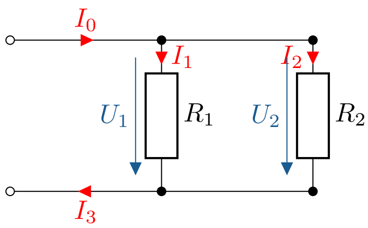
Abbildung 3.3: An einen Blechausschnitt angeschlossener Draht. Die Stromstärke I fließt in den Draht hinein, während eine Stromdichte $\vec{J}$ aus dem Blechausschnitt herausfließt.

3.2 Anwendungsfall Knotenregel: Parallelschaltung von Widerständen

Ein grundlegender Anwendungsfall für die Knotenregel ist die Parallelschaltung von Widerständen. Dabei teilt sich der Strom in einem gemeinsamen Knoten und jeweils ein Teilstrom durchfließt die einzelnen Widerstände. Nach dem Passieren der jeweiligen Wiederstände vereinigen sich die Teilströme wieder, und fließen als Gesamtstrom weiter. Dargestellt ist dies in Beispiel 3.1.

Beispiel 3.1: Parallelschaltung von Widerständen

Bei der Parallelschaltung teilen sich die Ströme an den gemeinsamen Knoten auf. Wie groß ist die Stromstärke I_3 im Verhältnis zu den Stromstärken I_0 bzw. I_1 und I_2?

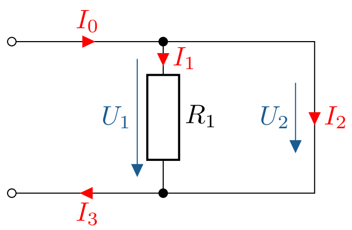


$$I_0 - I_1 - I_2 = 0$$
$$\rightarrow I_0 = I_1 + I_2$$
$$-I_3 + I_1 + I_2 = 0$$
$$\rightarrow I_1 + I_2 = I_3$$
$$\rightarrow I_3 = I_0$$

Wird einer der Widerstände durch eine ideal leitende Verbindung ersetzt (Leitwert geht gegen unendlich, Widerstand folglich gegen 0), verändert sich der Stromfluss im Bereich zwischen den beiden Knoten (Beispiel 3.2).

Beispiel 3.2: Parallelschaltung mit Leiter

Ein Widerstand wird durch eine leitende Verbindung ersetzt. Wie groß sind die Stromstärken I_1 bzw. I_2?



$$
\begin{aligned}
I_0 &= I_1 + I_2 \\
\text{mit}\, U_1 &= R_1 \cdot I_1 \\
U_2 = R_2 \cdot I_2 &= 0 \stackrel{!}{=} U_1 \\
&\rightarrow I_1 = 0 \\
&\rightarrow I_0 = I_2 = I_3
\end{aligned}
$$

3.3 Maschenregel (2. Kirchhoffscher Satz)

Der 2. Kirchhoffsche Satz (Maschenregel) besagt, dass die **Summe aller Spannungen** in einer Masche **Null** ergibt. Analog zur Richtung der Ströme muss auch hier zwingend die Richtung der einzelnen Teilspannungen berücksichtigt werden. Zeigt der Richtungspfeil einer Teilspannung entgegen der Umlaufrichtung der Masche, so muss diese Teilspannung mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Ist die Richtung einer anliegenden Spannung nicht bekannt, so kann auch hier eine willkürliche Zählpfeilrichtung angenommen werden. Eine gegensätzlich anliegende Spannung äußert sich in Rechnungen auch hier mit einem negativen Vorzeichen.

Merke: Maschenregel

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0 \tag{3.4}$$

Gleichbedeutend mit der obigen Definition lässt sich feststellen, dass die Summe aller gleichsinnig geschalteten Spannungen an Spannungsquellen der Spannung entspricht, welche an den Verbrauchern abfällt.

Merke: Maschenregel 2

Spannungssumme an Spannungsquellen = Spannungssumme an Verbrauchern

Angewendet auf das in Abbildung 3.4 gezeigte Beispielnetzwerk ergeben sich folgende Maschengleichungen:

$$U_1 + U_2 - U_3 - U_4 = 0$$

beziehungsweise

$$U_1 + U_2 = U_3 + U_4$$

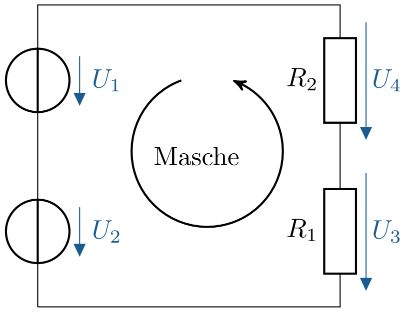


Abbildung 3.4: Beispielnetzwerk bestehend aus zwei Spannungsquellen und zwei Widerständen

Die Maschengleichung gilt auch, falls in die Masche zusätzliche Ströme eingespeist werden, oder einzelne Zweipole während des Umlaufs um eine geschlossene Masche mehrfach durchlaufen werden.

Der allgemeine Zusammenhang, jegliche aufintegrierte Spannung entlang einer geschlossene Kontur 0 ergibt, kann nach den Maxwell Gleichungen folgendermaßen beschrieben werden:

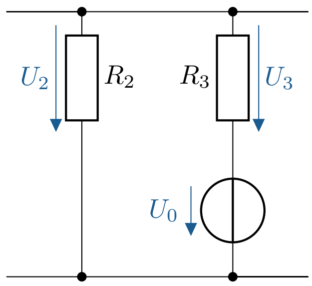
$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = 0 \tag{3.5}$$

3.4 Anwendungsfall Maschenregel: Reihenschaltung von Widerständen

Während die Knotenpunkte in elektrischen Netzwerken vor allem für den Strom von Bedeutung sind, sind die Zweige und somit auch Maschen vor allem für die Berechnung der Spannungen von Interesse. Bei einer Reihenschaltung von Widerständen in einem Zweig addieren sich alle Teilspannungen vorzeichenrichtig zu einer Gesamtspannung auf. Ein Anwendungsfall zur Ermittlung einer Teilspannung ist in Beispiel 3.3 dargestellt.

Beispiel 3.3: Reihenschaltungen in Netzwerken

Bei der Reihenschaltung addieren sich die Spannungen zu einer Gesamtspannung auf.
Wie groß ist die Spannung U_0?



Masche entgegen dem Uhrzeigersinn aufstellen:

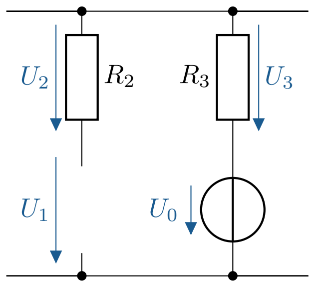
$$U_2 - U_0 - U_3 = 0$$

$$\rightarrow U_0 = U_2 - U_3$$

Die Maschenregel lässt sich auch anwenden, wenn die Masche, auf die sie angewendet wird, eine Unterbrechungsstelle hat (siehe Beispiel 3.4).

Beispiel 3.4: Reihenschaltungen mit Unterbrechungsstelle

Eine Verbindung wird unterbrochen. Wie groß ist die Spannung U_1 an der Unterbrechungsstelle?



Masche entgegen dem Uhrzeigersinn aufstellen:

$$U_2 + U_1 - U_0 - U_3 = 0$$

Ermitteln der Spannung U_2 mit Hilfes des Ohmschen Gesetzes:

$$U_2 = I_2 \cdot R_2$$

$$\rightarrow I_2 = 0$$

$$\rightarrow U_2 = 0$$

Einsetzen in Ausgangsgleichung und nach U_1 auflösen:

$$U_1 = U_0 + U_3$$

4 Einfache Widerstandsnetzwerke

Elektrische Netzwerke setzen sich häufig aus einfacheren Teilschaltungen zusammen. Oft ist es hilfreich, diese Teilschaltungen zu identifizieren, zu vereinfachen und anschließend zur Gesamtschaltung zusammenzufassen. Solche Zusammenfassungen von Bauelementen sind grundsätzlich zulässig, sofern sich das **Klemmverhalten**, also das Verhalten zwischen Strom und Spannung zwischen den Anschlusspunkten, nicht ändert.

Lernziele: Einfache Widerstandsnetzwerke

Die Studierenden können

- Teilschaltungen in gleichstromnetzwerken identifizieren
- Widerstandsnetzwerke vereinfachen und zusammenfassen
- Kurzschluss- sowie Leerlaufdaten bestimmen
- Überlagerungsverfahren anwenden

4.1 Reihenschaltung von Widerständen

In einer Reihenschaltung werden alle Bauelemente vom gleichen Strom I durchflossen (siehe Abbildung 4.1).

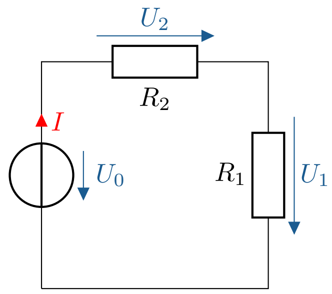


Abbildung 4.1: Reihenschaltung von zwei Widerständen und einer Spannungsquelle

Das Anwenden der Maschenregel (hier: Umlaufrichtung gegen den Uhrzeigersinn) führt zu folgender Maschengleichung:

$$U_0 - U_1 - U_2 = 0$$

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes können die Teilspannungen U_1 und U_2 als Produkt aus Stromstärke und Widerstand dargestellt werden:

$$U_0 - R_1 \cdot I - R_2 \cdot I = 0$$
$$U_0 - (R_1 + R_2) \cdot I = 0$$

Die Widerstände R_1 und R_2 lassen sich in diesem Beispiel durch Addition ihrer Widerstandswerte zu $R_1 + R_2 = R_{\text{ges}}$ zusammenfassen (Abbildung 4.2).

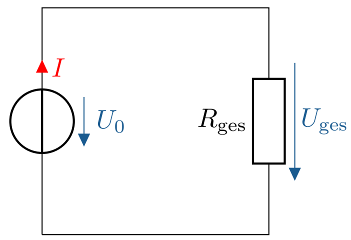


Abbildung 4.2: Zusammenfassen von R_1 und R_2 zu R_{ges}

Allgemein lässt sich die Gesamtspannung U_{ges} nach diesem Prinzip folgendermaßen zusammenfassen:

$$U_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} R_k \cdot I = R_{\text{ges}} \cdot I \tag{4.1}$$

Ein Koeffizientenvergleich der letzten beiden Terme von Gleichung 4.1 liefert das allgemeingültige Ergebnis, um Widerstände in einer Reihenschaltung zusammenzufassen:

Merke: Gesamtwiderstand einer Reihenschaltung

$$R_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{4.2}$$

Betrachtet man statt der Widerstandswerte R die Leitwerte $G = 1/R$ der Widerstände, ergibt sich für den Gesamtleitwert einer Reihenschaltung:

Merke: Gesamtleitwert einer Reihenschaltung

$$\frac{1}{G_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k} \tag{4.3}$$

4.2 Parallelschaltung von Widerständen

In einer Parallelschaltung von Widerständen liegt an allen Bauelementen die selbe Spannung an (siehe Abbildung 4.3):

$$U_1 = U_2 = U_0$$

Durch das Anwenden der Knotenregel lässt sich zeigen, dass sich der Gesamtstrom I_0 vor den Widerständen in die Teilströme I_1 und I_2 aufteilt:

$$I_0 - I_1 - I_2 = 0 \tag{4.4}$$

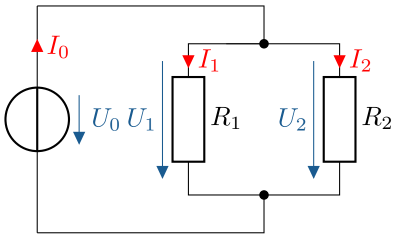


Abbildung 4.3: Parallelschaltung von zwei Widerständen und einer Spannungsquelle

Wie bei der Reihenschaltung im Kapitel 4.1 ist es auch bei der Parallelschaltung von Widerständen häufig von Vorteil, diese zu einem Gesamtwiderstand R_{ges} zusammenzufassen (siehe Abbildung 4.4):

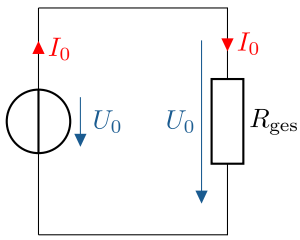


Abbildung 4.4: Zusammenfassung der parallel geschalteten Widerstände R_1 und R_2 aus Abbildung 4.3 zu R_{ges}

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes können die unbekannten Teilströme I_1 und I_2 aus der Knotenregel (Gleichung 4.4) quantifiziert werden:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_0}{R_2}$$

Eingesetzt in Gleichung 4.4 ergibt sich:

$$I_0 - \frac{U_0}{R_1} - \frac{U_0}{R_2} = 0$$

$$I_0 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot U_0 = 0$$

$$\rightarrow I_0 = U_0 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Ein Koeffizientenvergleich mit dem auf Abbildung 4.4 angewandten Ohmschen Gesetz ($I_0 = U_0 \cdot \frac{1}{R_{\text{ges}}}$) liefert für R_{ges} im gezeigten Fall von zwei parallel geschalteten WIderständen:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Das Ausmultiplizieren dieses Ausdrucks ergibt die in Rechnungen häufig genutzte Form:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.5}$$

Der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung aus beliebig vielen Widerständen lässt sich mit Hilfe der allgemeinen Formel für Parallelschaltungen ermitteln:

Merke: Gesamtwiederstand einer Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \tag{4.6}$$

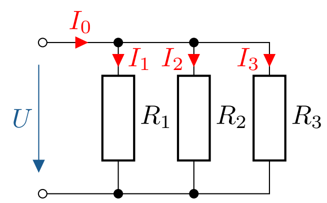
Da der elektrische Leitwert durch den Kehrwert des Widerstandes $G = 1/R$ beschrieben wird, ist der Gesamtleitwert einer Parallelschaltung von Widerständen oft leichter zu berechnen:

Merke: Gesamtleitwert einer Parallelschaltung

$$G_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} G_k \tag{4.7}$$

Beispiel 4.1: Parallelschaltung von Widerständen

Die drei Widerstände $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 100\,\text{k}\Omega$ werden wie in folgender Abbildung gezeigt parallel geschaltet. Wie groß ist der Gesamtwiderstand R_{ges} dieser Parallelschaltung?



Aufstellen der Gleichung für R_{ges} nach Gleichung 4.6:

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_n \frac{1}{R_n}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Einsetzen der Zahlenwerte und Lösung mittels Taschenrechner:

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{1\cdot 10^3\,\Omega} + \frac{1}{10\cdot 10^3\,\Omega} + \frac{1}{100\cdot 10^3\,\Omega}}$$

$$\rightarrow R_{\text{ges}} = 900{,}9\,\Omega$$

4.3 Spannungsteiler an Widerständen

Ein Anwendungsfall der Reihenschaltung von zwei Widerständen ist der Spannungsteiler. Er wird genutzt, um eine Eingangsspannung U_0 in zwei kleinere Teilspannungen aufzuteilen, und so eine genau definierte Ausgangsspannung U_2 bereitzustellen.

4.3.1 Der unbelastete Spannungsteiler

Zunächst sei der in Abbildung 4.5 dargestellte Spannungsteiler unbelastet, d.h. es ist kein Lastwiderstand an den offenen Klemmen angeschlossen. Alle Bauelemente werden vom gleichen Strom I durchflossen:

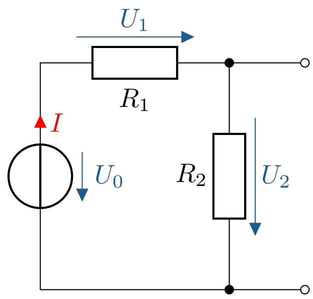


Abbildung 4.5: Unbelasteter Spannungsteiler

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2}$$

Durch Zusammenfassen der Reihenschaltung aus Widerständen ergibt sich:

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Spannungsterme ergibt sich die Verhältnisgleichung:

$$\frac{U_2}{R_2} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

Isolieren der Ausgangsspannung auf der linken Seite des Gleichheitszeichens führt letztendlich zur allgemeine Gleichung für den unbelasteten Spannungsteiler:

Merke: Unbelasteter Spannungsteiler

$$U_2 = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.8}$$

Beispiel 4.2: Unbelasteter Spannungsteiler

Eine Eingangsspannung von $U_0 = 24$ V soll mit einem Spannungsteiler auf $U_2 = 6$ V reduziert werden. Wie ist das Verhältnis der Widerstände von R_2 zu R_1 zu wählen? Wie groß sind die Widerstände R_1 und R_2 zu wählen, wenn der Gesamtstrom $I = 10$ mA betragen soll?

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{6\,\mathrm{V}}{24\,\mathrm{V}} = 0{,}25 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\rightarrow R_2 = 0.25(R_1 + R_2)$$

$$0.75\,R_2 = 0.25\,R_1$$

$$R_1 = 3\,R_2$$

Der Widerstand R_1 muss also drei mal so groß wie der Widerstand R_2 gewählt werden.

$$I = \frac{U_2}{R_2} \rightarrow R_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{5\,\mathrm{V}}{0.01\mathrm{A}} = 500\,\Omega$$

$$R_1 = 3 \cdot R_2 = 3 \cdot 500\,\Omega = 1500\,\Omega$$

4.3.2 Der belastete Spannungsteiler

Wird die Ausgangsseite des Spannungsteilers wie in Abbildung 4.6 belastet, also beispielsweise ein Lastwiderstand R_L hinzugefügt, so ergibt sich - von der Spannungsquelle aus gesehen - eine Parallelschaltung der Widerstände R_2 und R_L.

Wird der Ersatzwiderstand R_neu dieser Parallelschaltung über $\frac{1}{R_\mathrm{neu}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_\mathrm{L}}$ ermittelt, ändert sich das Verhältnis der Widerstände des Spannungsteilers, und folglich auch die Ausgangsspannung. Diese Änderung muss bei der Auslegung eines belasteten Spannungsteilers mit beachtet werden.

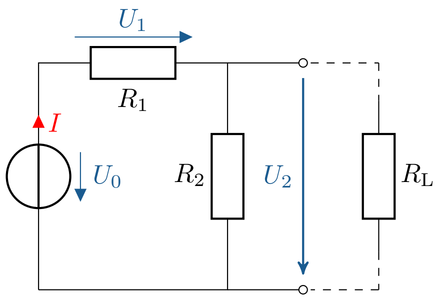


Abbildung 4.6: Mit dem Widerstand R_L belasteter Spannungsteiler

Beispiel 4.3: Belasteter Spannungsteiler

Ein Spannungsteiler soll eine Eingangsspannung von $U_0 = 20$ V auf die Ausgangsspannung von $U_2 = 5$ V reduzieren. Der Spannungsteiler wird mit $R_\mathrm{L} = 200\,\Omega$ belastet. Vorgegeben ist der Widerstand $R_1 = 300\,\Omega$.
Wie groß muss R_2 dimensioniert werden, um die gewünschte Ausgangsspannung zu erreichen?

Zunächst muss der benötigte Gesamtwert R_neu der Parallelschaltung aus R_L und R_2 berechnet werden:

$$U_2 = U_0 \cdot \frac{R_{\text{neu}}}{R_1 + R_{\text{neu}}}$$

$$R_{\text{neu}} = \frac{5\,\text{V}}{20\,\text{V}} \cdot (R_1 + R_{\text{neu}})$$

$$0.75 \cdot R_{\text{neu}} = 0.25 \cdot R_1 = 75\,\Omega$$

$$\rightarrow R_{\text{neu}} = 100\,\Omega$$

Der Widerstand R_1 ist mit Hilfe der Formel für Parallelschaltungen zu berechnen:

$$100\,\Omega = \frac{R_{\text{L}} \cdot R_2}{R_{\text{L}} + R_2} = \frac{200\,\Omega \cdot R_2}{200\,\Omega + R_2}$$

$$R_2 \cdot \frac{200\,\Omega}{100\,\Omega} = 2 \cdot R_2 = 200\,\Omega + R_2 \tag{4.9}$$

$$\rightarrow R_2 = 200\,\Omega$$

4.4 Stromteiler in Widerstandsnetzwerken

Eine wie in Abbildung ?? dargestellte Parallelschaltung von zwei Widerständen teilt einen in eine Schaltung fließenden Strom I_0 in zwei Teilströme I_1 sowie I_2. Eine solche Schaltung wird als Stromteiler bezeichnet.

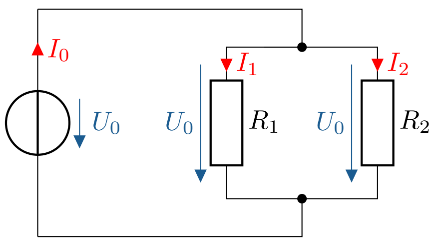


Abbildung 4.7: Stromteiler der Stromstärke I_0 in die Teilstromstärken I_1 und I_2, bestehend aus den parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2

An allen Bauelementen dieser Schaltung liegt die identische Ausgangsspannung U_0 an. Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes lässt sich diese Spannung über den Widerständen R_1 und R_2 auch als Produkt von Widerstandswert und der Stromstärke umschreiben:

$$U_0 = I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2$$

Durch das wie in Abbildung 4.4 beschriebene Zusammenfassen der Widerstände R_1 und R_2 zu R_{ges} lässt sich der Gesamtstrom I_0 in Abhängigkeit der Ausgangsspannung U_0 ermitteln:

$$U_0 = I_0 \cdot R_{\text{ges}}$$

Durch Gleichsetzen der beiden Stromterme ergibt sich folgendes Verhältnis zwischen I_0 und I_2

$$I_2 \cdot R_2 = I_0 \cdot R_{\text{ges}}$$

Die Parallelschaltung R_{ges} lässt sich wie in Gleichung 4.5 gezeigt direkt aus den beiden Widerstandswerten R_1 und R_2 errechnen:

$$I_2 \cdot R_2 = I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Das Kürzen von R_2 resultiert im Teilungsverhältnis der elektrischen Stromstärke am Stromteiler:

Merke: Stromteiler einer Parallelschaltung

$$I_2 = I_0 \cdot \frac{R_1}{R1 + R_2} \tag{4.10}$$

4.5 Besondere Betriebszustände aktiver Zweipole

Aktive Zweipole lassen sich zu **Ersatzspannungsquellen** beziehungsweise **Ersatzstromquellen** zusammenfassen. Dies kann vor allem zur Vereinfachung von elektrischen Netzwerken dienlich sein.

4.5.1 Kurzschluss- und Leerlaufversuch an der Ersatzspannungsquelle

Die reale Spannungsquelle

Eine **reale Spannungsquelle** besteht wie bereits aus Modul 3 *Elektrische Bauelemente* bekannt aus einer idealen Spannungsquelle U_0 sowie einem Innenwiderstand R_{i}.

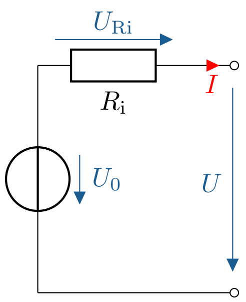


Abbildung 4.8: Aus einer idealen Spannungsquelle U_0 und einem Innenwiderstand R_{i} bestehende reale Spannungsquelle

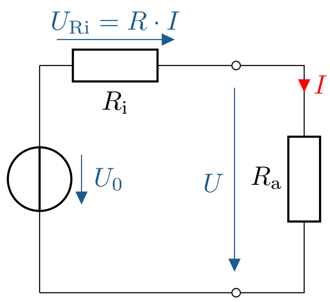


Abbildung 4.9: Mit einem Lastwiderstand R_{a} belastete reale Spannungsquelle

Ist die reale Spannungsquelle unbelastet, also kein Bauteil an den Ausgangsklemmen angeschlossen, fließt kein Strom I(siehe Abbildung 4.8).

$$I = 0$$

$$\rightarrow U_{\text{Ri}} = R_{\text{i}} \cdot I = 0$$

Da die Spannung über dem Innenwiderstand R_{i} 0 Volt beträgt, gilt für die Klemmspannung U:

$$U = U_0$$

Wird die reale Spannungsquelle wie in Abbildung 4.9 gezeigt mit einem Widerstand R_a belastet, fließt ein Strom $I > 0$ durch die Leitung.

Folglich fällt an dem Innenwiderstand R_i eine Spannung $U_{Ri} = R_i \cdot I$ ab, und die Klemmspannung beträgt

$$U = U_0 - U_{Ri}$$

Um den Spannungsabfall innerhalb der Spannungsquelle zu reduzieren, sollte der Innenwiderstand R_i möglichst klein gehalten werden:

$$U_0 << I \cdot R_i$$

Die Ersatzspannungsquelle

Jeder aktive Zweipol mit mindestens einer Quelle und beliebig vielen Widerständen kann zu einer Ersatzspannungsquelle (Abbildung 4.10) zusammengefasst werden. Wie bei einer realen Spannungsquelle genügt die Bestimmung einer idealen Spannungsquelle U_0 sowie eines zusammengefassten Innenwiderstandes R_i, um die Ersatzspannungsquelle vollständig zu charakterisieren. Sie verfügt nach außen hin über ein vollständig gleichwertiges Klemmverhalten wie die originale Schaltung an ihren zwei Anschlussklemmen.

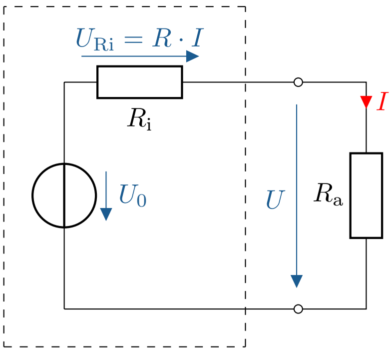


Abbildung 4.10: Die Ersatzspannungsquelle (gestrichelter Kasten) verfügt über das gleiche Ersatzschaltbild wie eine reale Spannungsquelle

Wie bei einer belasteten realen Spannungsquelle ist die resultierende Ausgangsspannung U sowohl vom Innenwiderstand R_i als auch vom Belastungsstrom I abhängig (Abbildung 4.11):

$$U = U_0 - I \cdot R_i$$

Die zur Charakterisierung notwendigen Parameter U_0 und R_i können mit Hilfe von zwei Versuchen ermittelt werden: dem Kurzschlussversuch sowie dem Leerlaufversuch.

Beim Leerlaufversuch werden die beiden Klemmen der Ersatzspannungsquelle offen gelassen (Abbildung 4.12).

Da durch die offenen Klemmen der Strom I durch den Widerstand R_i null Ampere beträgt, fällt auch keine Spannung über ihn ab. Die Leerlaufspannung ist also mit der Spannung U_0 identisch:

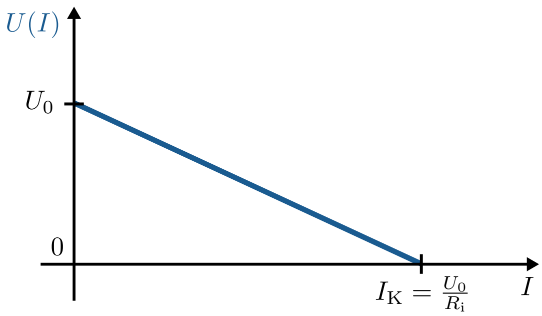


Abbildung 4.11: Die an den Klemmen der Ersatzspannungsquelle anliegende Spannung U in Abhängigkeit von der resultierenden Stromstärke I

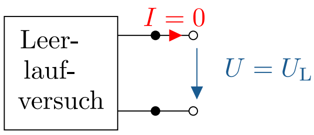


Abbildung 4.12: Ermittlung der Leerlaufspannung U_L einer Ersatzspannungsquelle

Merke: Leerlaufspannung einer Ersatzspannungsquelle

$$U_0 = U_\mathrm{L}$$

Beim Kurzschlussversuch werden die beiden Klemmen des aktiven Zweipols direkt kurzgeschlossen, sprich eine ideal leitende Verbindung zwischen ihnen hergestellt (Abbildung 4.13).

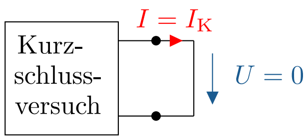


Abbildung 4.13: Ermittlung des Kurzschlussstromes I_K einer Ersatzspannungsquelle

Über dem so erzeugten Kurzschluss kann keine Ausgangsspannung U anliegen:

$$U = 0$$

Folglich fällt die gesamte von U_0 generierte Spannung am Innenwiderstand R_i ab. Dem Ohmschen Gesetz folgend bestimmt dieser damit den Kurzschlussstrom I_K.

$$U_\mathrm{Ri} = U_\mathrm{L} = R_\mathrm{Ri} \cdot I_\mathrm{K}$$

Der Kurzschlussstrom I_K beträgt folglich:

$$I_\mathrm{K} = \frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i}}$$

Somit kann der Innenwiderstand R_i folgendermaßen berechnet werden:

Merke: Innenwiderstand einer Ersatzspannungsquelle

$$R_\mathrm{i} = \frac{U_\mathrm{L}}{I_\mathrm{K}}$$

Achtung: U_L und I_K sind in zwei vollkommen unabhängigen Versuchen bestimmte Größen, die nicht gleichzeitig auftreten. Die Formel sieht also nur wie Ohmsches Gesetz am Widerstand R_i aus, ist es aber nicht.

4.5.2 Kurzschluss- und Leerlaufversuch an der Ersatzstromquelle

Die reale Stromquelle

Auch eine **reale Stromquelle** besteht aus einer idealen Stromquelle U_0 sowie einem Innenwiderstand R_i (siehe Abbildung 4.14). Dieser ist im Gegensatz zur realen Spannungsquelle jedoch parallel anstatt in Reihe zur Quelle geschaltet.

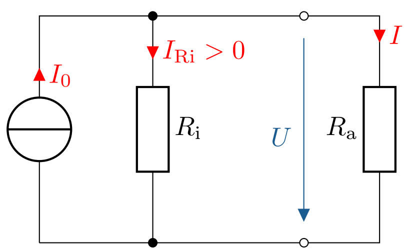


Abbildung 4.14: Aus einer idealen Stromquelle I_0 und einem Innenwiderstand R_i bestehende reale Stromquelle, welche mit einem Widerstand R_a belastet ist

Abhängig von der sich einstellenden Ausgangsspannung U fließt durch den endlichen Innenwiderstand R_i der Strom $I_\mathrm{Ri} = U/R_\mathrm{Ri}$, der Ausgangsstrom I ergibt sich also zu

Merke: Ausgangsstrom einer realen Stromquelle

$$I = I_0 - \frac{U}{R_\mathrm{i}}$$

Um die Reduktion den Ausgangsstroms I durch den Innenwiderstand zu reduzieren, sollte dieser möglichst groß gewählt werden:

$$I_0 >> \frac{U}{R_\mathrm{i}}$$

Die Ersatzstromquelle

Alternativ zur Ersatzspannungsquelle kann ein aktiver Zweipol auch als Ersatzstromquelle dargestellt werden (Abbildung 4.15). Auch sie kann durch eine ideale Stromquelle I_0 sowie einen zusammengefassten Innenwiderstand R_i vollständig charakterisiert werden.

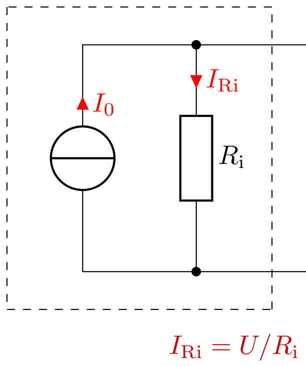


Abbildung 4.15: Die Ersatzstromquelle (gestrichelter Kasten) verfügt über das gleiche Ersatzschaltbild wie eine reale Stromquelle

Analog zur Ersatzspannungsquelle können auch hier die Parameter I_0 sowie R_i mit Hilfe des Leerlauf- und Kurzschlussversuchs bestimmt werden.

Beim **Leerlaufversuch** fließt der gesamte Strom I_0 durch den Innenwiderstand. An den dazu parallel anliegenden Klemmen stellt sich die folgende Leerlaufspannung U_L ein:

$$U_\mathrm{L} = R_\mathrm{i} \cdot I_0$$

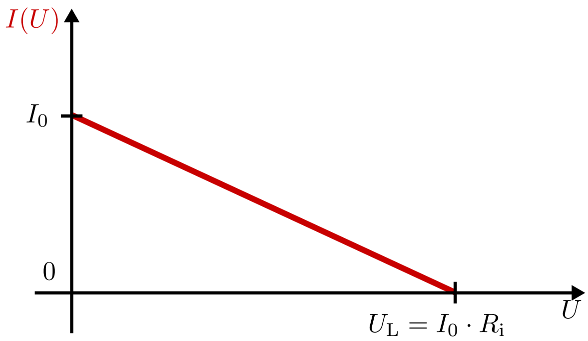


Abbildung 4.16: Die aus der Ersatzstromquelle herausfließende Stromstärke I in Abhängigkeit der sich einstellenden Spannung U

Beim **Kurzschlussversuch** werden die beiden Klemmen der Ersatzstromquelle kurzgeschlossen. Da die Spannung über dem Kurzschluss und somit auch über dem dazu parallelgeschalteten Innenwiderstand null Volt beträgt, fließt durch R_i kein Strom.

Der gesamte Strom I_0 fließt also durch den Kurzschluss:

Merke: Kurzschlussstrom einer Ersatzstromquelle

$$I_0 = I_\mathrm{K}$$

Mit $U_\mathrm{L} = R_\mathrm{i} \cdot I_0$ kann nun der Innenwiderstand bestimmt werden:

Merke: Innenwiderstand einer Ersatzstromquelle

$$R_\mathrm{i} = \frac{U_\mathrm{L}}{I_\mathrm{K}}$$

4.5.3 Umwandlung von Spannungs- und Stromquellen

Bei der Netzwerkanalyse kann es sinnvoll sein, Stromquellen in Spannungsquellen oder Spannungsquellen in Stromquellen umzuwandeln. Dies funktioniert sowohl für reale Strom- bzw. Spannungsquellen, als auch für Ersatzstrom- bzw. Ersatzspannungsquellen identisch. Dabei bleibt der Wert des Innenwiderstandes R_i identisch, seine Position im Ersatzschildbild ändert sich jedoch (siehe Abbildung ??)

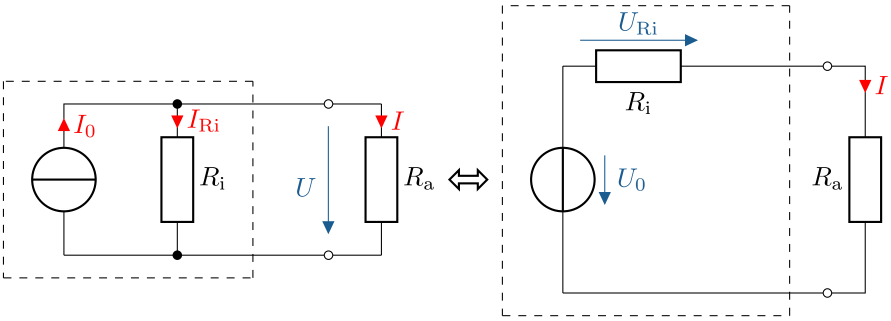


Abbildung 4.17: Umwandlung einer Ersatzstromquelle (links) in eine Ersatzspannungsquelle (rechts) und umgekehrt

Die Leerlaufspannung beziehungsweise der Kurzschlussstrom bleiben bei der Umwandlung der Quelle erhalten und werden auf die jeweils andere Quelle umgerechnet.

Achtung: Die Zählpfeile von ineinader umgewandelten Strom- und Spannungsquellen sind entgegengesetzt gerichtet!

Beim Umwandeln einer Stromquelle in eine Spannungsquelle beträgt die Spannung U_0:

Merke: Spannung einer umgewandelten Spannungsquelle

$$U_0 = I_0 \cdot R_\mathrm{i}$$

Die Stromstärke I_0 beträgt beim Umwandeln einer Spannungsquelle in eine Stromquelle:

Merke: Strom einer umgewandelten Stromquelle

$$I_0 = \frac{U_0}{R_\mathrm{i}}$$

5 Einfache Kondensatornetzwerke

Wie Widerstände lassen sich auch Kapazitäten zu Netzwerken zusammenschließen. Die einfachen Grundschaltungen, welche wiederum zu beliebig komplexen Netzwerken zusammengeschaltet werden können, werden nachfolgend vorgestellt.

5.1 Parallelschaltung von Kapazitäten

Sind in einer Schaltung mehrere Kapazitäten parallel zueinander geschaltet, lassen sie sich zu einer Gesamtkapazität zusammenfasssen (siehe Abbildung ??).

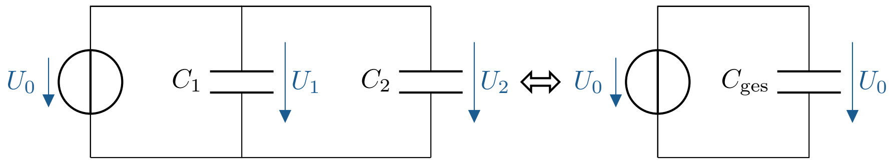


Abbildung 5.1: Zusammenfassen von zwei parallel geschalteten Kapazitäten C_1 und C_2 zu einer Gesamtkapazität C_{ges}

Dabei liegt an allen Einzelkapazitäten die gleiche Spannung an:

$$U_0 = U_1 = U_2$$

Die Ladung, welche auf jedem der Einzelkondensatoren gespeichert ist, kann wie folgt bestimmt werden:

$$Q_k = C_k \cdot U_0$$

Die Gesamtladung C_{ges} auf dem in Abbildung ?? Ersatzschaltbild entsprechend mit

$$Q_{\text{ges}} = C_{\text{ges}} \cdot U_0$$

Die Gesamtladung setzt sich aus der Summe der Einzelladungen zusammen:

$$Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = C_1 \cdot U_0 + C_2 \cdot U_0$$

$$Q_{\text{ges}} = (C_1 + C_2) \cdot U_0$$

Ein Quotientenvergleich mit der ursprünglichen Berechnung der Gesamtladung Q_{ges} zeigt nun:

$$\rightarrow C_1 + C_2 = C_{\text{ges}}$$

Auch für beliebig viele parallelgeschaltete Kapazitäten gilt, dass die Summe der Einzelkapazitäten die Gesamtkapazität ergibt:

Merke: Gesamtkapazität einer Parallelschaltung

$$C_{\text{ges}} = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

5.2 Reihenschaltung von Kapazitäten

Bei der Reihenschaltung von Kapazitäten teilt sich die gesamte an den Eingangsanschlüssen anliegende Spannung U_0 in die Teilspannungen U_k an den einzelnen Kapazitäten auf (Abbildung ??).

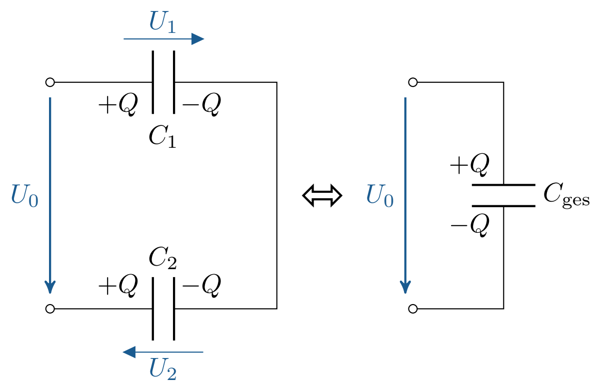


Abbildung 5.2: Zusammenfassen von zwei in Reihe geschalteten Kapazitäten C_1 und C_2 zu einer Gesamtkapazität C_{ges}

Auf den jeweils mit den Anschlussklemmen verbundenen Kondensatorplatten wird eine Ladung $\pm Q$ aufgeprägt. Beide Platten des selben Kondensators haben stets betragsgleiche Ladungen, was dazu führt, dass beide Kondensatoren an den Anschlussklemmen der Reihenschaltung auf beiden Platten die Ladung $\pm Q$ haben. Die äußere Platte des jeweils nächsten angeschlossenen Kondensators muss betragsmäßig identisch mit umgekehrten Vorzeichen geladen sein, da aus der ursprünglich elektrisch neutralen Verbindung keine Ladungsträger entweichen oder hinzugefügt werden können. Diesem Schema folgend besitzen alle Kondensatoren einer Reihenschaltung die gleiche Ladung Q.

Ausgehend von der Kondensator-Grundgleichung $Q = C \cdot U$ ergibt sich für die Teilspannungen, welche an den in Abbildung ?? gezeigten Kondensatoren abfallen:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \qquad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Eingesetzt in das Ergebnis des Maschenumlaufs der Ausgangsschaltung ergibt sich:

$$U_0 = U_1 + U_2 = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \cdot Q$$

Die Spannung U_0 im Ersatzschaltbild kann wie folgt berechnet werden:

$$U_0 = \frac{1}{C_{\text{ges}}} \cdot Q$$

Ein Quotientenvergleich offenbart:

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{\text{ges}}}$$

Allgemein gilt für eine Reihenschaltung aus beliebig vielen Kondensatoren:

Merke: Gesamtkapazität einer Reihenschaltung:

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \tag{5.1}$$

Bei zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren kann die Gesamtkapazität C_{ges} analog zur Parallelschaltung von Widerständen auch mit folgendem Ausdruck ermittelt werden:

$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

5.3 Spannungsteiler an Kapazitäten

Ähnlich wie beim Spannungsteiler an in zwei in Reihe geschalteten Widerständen lässt sich auch das Verhältnis der Teilspannung an zwei in Reihe geschalteten, identisch geladenen Kondensatoren ermitteln (siehe Abbildung ??).

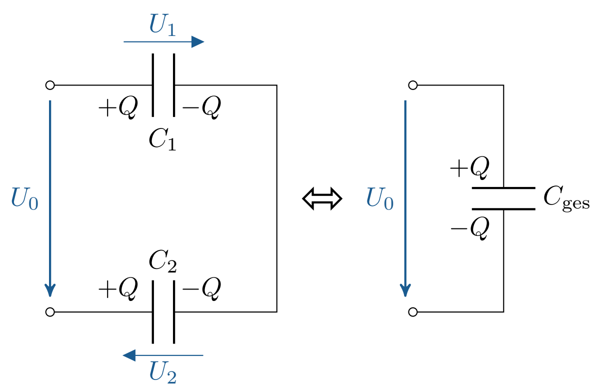


Abbildung 5.3: Spannungsteiler an einer Reihenschaltung von zwei Kapazitäten (links) sowie Ersatzschaltbild nach Zusammenfassen der Kapazitäten zu C_{ges}

Die Spannung U_1 kann wie folgt ermittelt werden:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}$$

Die Ladung Q ist unbekannt, jedoch sowohl bei beiden Kondensatoren C_1 und C_2 als auch in der Ersatzschaltung bei C_{ges} identisch:

$$Q = C_{\text{ges}} \cdot U_0 = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_0$$

Eingesetzt ergibt sich für U_1:

$$U_1 = \frac{1}{\cancel{C_1}} \cdot \frac{\cancel{C_1} \cdot C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_0 = U_0 \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Der Spannungsteiler für U_2 berechnet sich analog:

Merke:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \cdot U_0, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot U_0$$

6 Messen von Strom und Spannung

6.1 Spannungsmessung im Gleichstromkreis

Die elekrische Spannung, die über einem Bauelement über einer Zusammenschaltung mehrerer Bauelementen abfällt, kann mit Hilfe eines Spannungsmessgerätes (auch Voltmeter genannt) ermittelt werden. Dazu muss das Voltmeter **parallel** zu diesem Bauelement angebracht werden. Eine Unterbrechung des Stromkreises ist dazu in der Regel nicht notwendig.

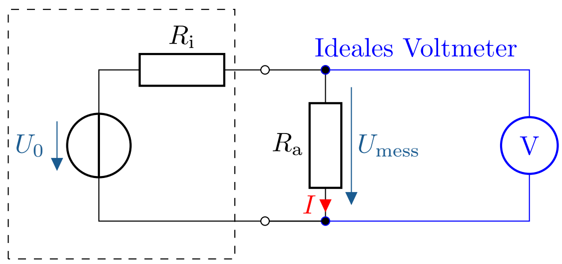


Abbildung 6.1: Eine reale Spannungsquelle (Kasten links) speist einen Lastwiderstand R_a. Die darüber abfallende Spannung wird mit einem idealen Voltmeter (blau) gemessen

Merke: Innenwiderstand ideales Voltmeter

Ein ideales Voltmeter (siehe Abbildung ??) besitzt einen unendlich hohen Innenwiderstand.

Folglich fließt kein Strom „am Lastwiderstand vorbei“ durch das Messgerät, und die Spannungsmessung erfolgt vollständig **rückwirkungsfrei**.

Ein reales Voltmeter besitzt einen endlichen Innenwiderstand R_{iV}, welcher parallel zum Voltmeter geschaltet ist (siehe Abbildung ??). Der durch diesen Innenwiderstand fließende Strom verfälscht das Messergebnis, weswegen dieser so hoch wie möglich sein sollte. In modernen, elektronischen Spannungsmessgeräten ist er üblicherweise in der Größenordnung von $10^6\,\Omega$ bis $10^9\,\Omega$

Die um den Messfehler durch den Innenwiderstand R_{iV} korrigierte Spannung U_{korr} lässt sich unter Kenntnis des Innenwiderstandes der Spannungsquelle R_i wie folgt berechnen:

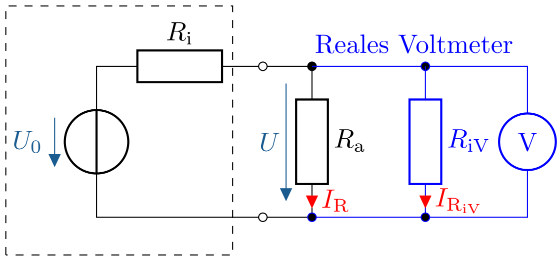


Abbildung 6.2: Messung der Spannung U über einem Lastwiderstand R_a durch ein reales Voltmeter mit endlichem Innenwiderstand R_{iV}

$$U_{korr} = U \cdot \left(1 + \frac{R_i || R_a}{R_{iV}}\right)$$

6.2 Strommessung im Gleichstromkreis

Die Stromstärke I, welche durch ein Bauelement fließt, lässt sich mit Hilfe eines Strommessgerätes (auch Amperemeter genannt) bestimmen. Im Gegensatz zur Spannungsmessung muss das Amperemeter **in Reihe** zum Bauelement geschaltet werden. Eine Unterbrechung des Stromkreises ist dazu erforderlich.

Merke: Innenwiderstand ideales Amperemeter

Ein ideales Ampereter (siehe Abbildung **??**) hat keinen Innenwiderstand.

Folglich kann der Strom rückwirkungsfrei durch es hindurchfließen.

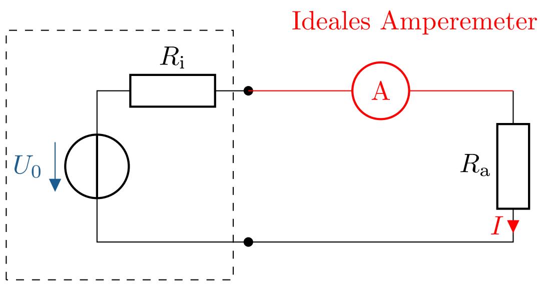


Abbildung 6.3: Eine reale Spannungsquelle (Kasten links) speist einen Lastwiderstand R_a. Der durch den Lastwiderstand fließende Strom I von einem idealen Amperemeter (rot) gemessen

Ein **reales Amperemeter** verfügt über einen in Reihe geschalteten Innenwiderstand R_{iA} (Abbildung 6.4). Auch hier wird das Messergebnis durch diesen Innenwiderstand beeinflusst. Je nach Messbereich liegt dieser bei elektronischen Amperemetern typischerweise im Bereich einiger $\mu\Omega$ bis weniger mΩ.

Unter Kenntnis der Innenwiderstände lässt sich auch beim Amperemeter der Messfehler herausrechnen. Die korrigierte Stromstärke I_{korr}, bei der der Einfluss des Messgerätes herausgerechnet wird, lässt sich mit Hilfe folgender Formel ermitteln:

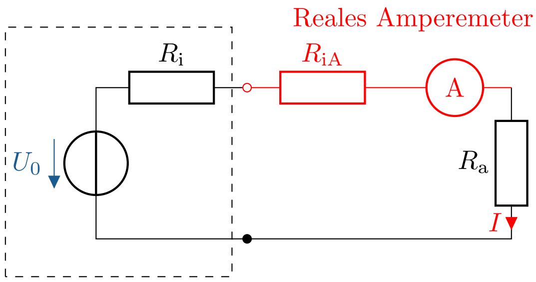


Abbildung 6.4: Messung der Stromstärke I durch einen Lastwiderstand R_{a} durch ein reales Amperemeter mit Innenwiderstand R_{iA} (rot)

$$I_{\mathrm{korr}} = I \cdot \left(1 + \frac{R_{\mathrm{iA}}}{R_{\mathrm{i}} + R_{\mathrm{a}}}\right)$$

6.3 Strom- und spannungsrichtiges Messen

Sollen sowohl die Spannung als auch die Stromstärke in einer Schaltung gemessen werden, beeinflussen sich die realen Messgeräte durch ihre Innenwiderstände gegenseitig. Abhängig von der Qualität der zur Verfügung stehenden Messgeräte und der Priorisierung der Messgrößen untereinander wird zwischen stromrichtiger und spannungsrichtiger Messung unterschieden.

6.3.1 Stromrichtiges Messen

Bei der **stromrichtigen** Messung (Abbildung 6.5), welche auch Spannungsfehler-Schaltung genannt wird, wird ein höherer Fokus auf die genaue Bestimmung der Stromstärke gelegt. Bei dieser Schaltung zeigt das Amperemeter den durch den Lastwiderstand fließenden Strom an, das Voltmeter misst jedoch die Summe der Spannungsabfälle von Amperemeter und Lastwiderstand:

$$U_{\mathrm{mess}} = U + U_{\mathrm{Amperemeter}}$$

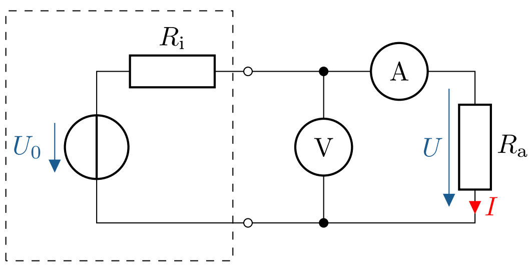


Abbildung 6.5: Stromrichtige Messschaltung zur Bestimmung der Stromstärke I sowie der Spannung U an einem Lastwiderstand R_{a}

Die Spannungsfehlerschaltung bietet sich tendenziell für Schaltungen mit verhätnismäßig hohen Lastwiderständen an. Als Faustregel für den Einsatz dieser Messchaltung dient häufig folgende Ungleichung:

$$R_{\mathrm{iA}} \ll R_{\mathrm{a}}$$

6.3.2 Spannungsrichtiges Messen

Im Gegensatz zur stromrichtigen Messchaltung misst das Voltmeter in der spannungsrichtigen Messschaltung die korrekte am Widerstand abfallende Spannung (siehe Abbildung ??). Das Amperemeter hingegen misst den Strom, welcher durch die Parallelschaltung aus Spannungsmesser und Lastwiderstand fließt. Diese Messanordnung ist zu empfehlen, wenn ein höherer Fokus auf die korrekte Messung der Spannung gelegt werden soll, oder für die Widerstände gilt:

$$R_{\mathrm{iV}} \gg R_{\mathrm{a}}$$

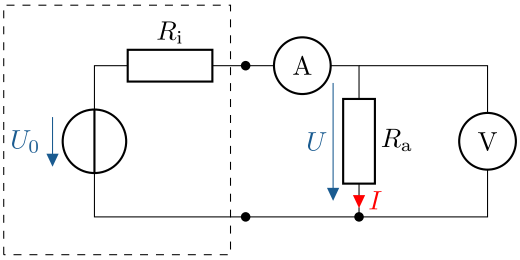


Abbildung 6.6: Stromrichtige Messchaltung zur Bestimmung der Stromstärke I sowie der Spannung U an einem Lastwiderstand R_a

Bei unklaren Verhältnissen, ob die stromrichtige oder die spannungsrichtige Messung verwendet werden sollte, kann folgende Faustregel verwendet werden:

Merke: Faustregel für strom-/spannungsrichtiges Messen

- Stromrichtig: $R_\mathrm{a} > \sqrt{R_{\mathrm{iA}} \cdot R_{\mathrm{iV}}}$
- Spannungsrichtig: $R_\mathrm{a} < \sqrt{R_{\mathrm{iA}} \cdot R_{\mathrm{iV}}}$

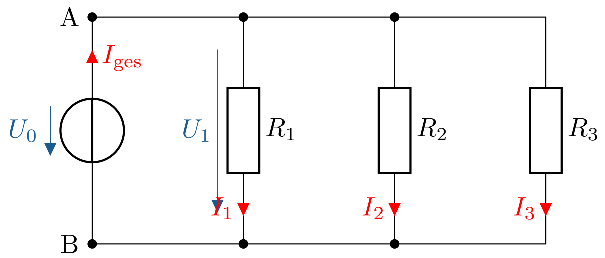
A Übungsaufgaben

A.1 Kirchhoffsche Gesetze

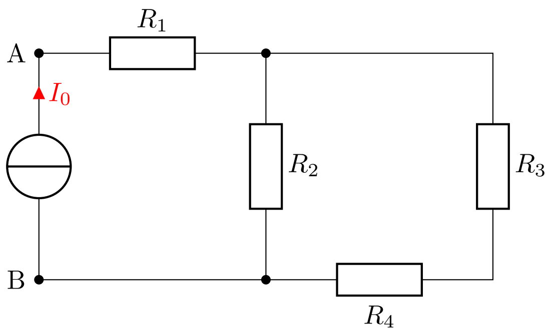
Berechnen Sie für die Schaltungen die Ströme, Spannungen und Leistungen an den Widerständen. Zeichnen Sie zu Ihren Ergebnissen alle Strom- und Spannungspfeile ein. Folgende Werte sind gegeben:

$U_0 = 12\ V; I_0 = 3\ A; R_1 = 2\ \Omega; R_2 = 4\ \Omega; R_3 = 3\ \Omega; R_4 = 3\ \Omega$

a)

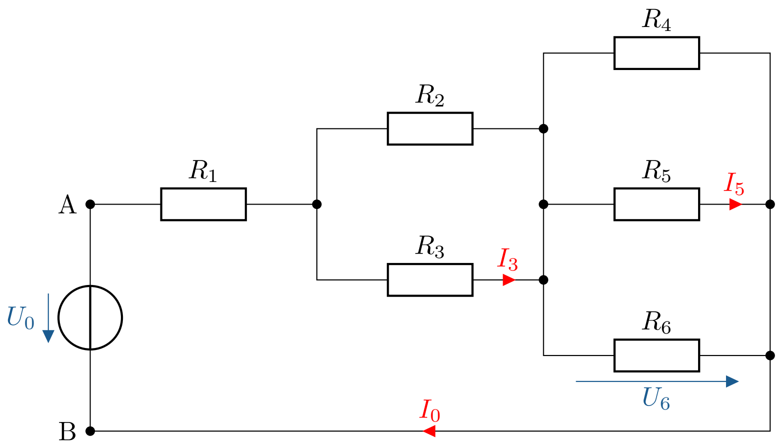


b)



A.2 Kirchhoffsche Gesetze 2

Berechnen Sie für die Schaltung den Gesamtwiderstand R_{ges} zwischen den Punkten A und B, die Ströme I_0, I_3, I_5 und die Spannung U_6. Folgende Werte sind gegeben:
$R_1 = 5\ \Omega; R_2 = 10\ \Omega; R_3 = 15\ \Omega; R_4 = 20\ \Omega; R_5 = 25\ \Omega; R_6 = 40\ \Omega; U_0 = 80\ V.$



A.3 Kirchhoffsche Gestze 3

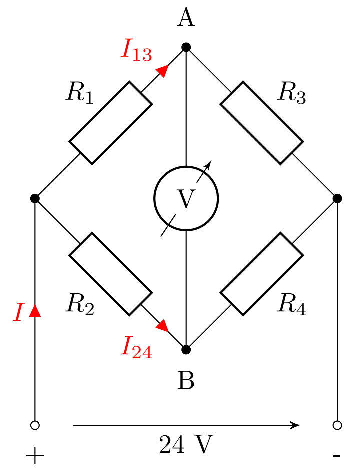
Für die Brückenschaltung sind folgende Werte gegeben: $R_1 = 4\ \mathrm{k\Omega}, R_2 = 20\ \mathrm{k\Omega}, R_3 = 6\ \mathrm{k\Omega}, R_4 = 20\ \mathrm{k\Omega}$.
Der Innenwiderstand des Voltmeters kann als unendlich groß angenommen werden. Berechnen Sie die folgenden Größen:

a) I_{13} und I_{24}

b) U_1, U_2, U_3 und U_4

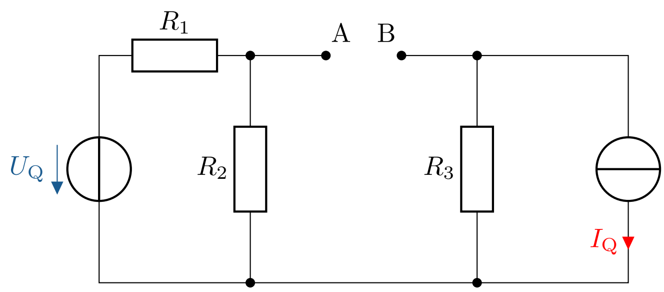
c) Die Spannung zwischen den Punkten A und B.

d) Wann wäre die Brücke abgeglichen, d. h. wann ist die Spannung zwischen den Punkten A und B Null? Stellen Sie die Abgleichbedingung in möglichst allgemeiner Form als Funktion der Widerstände R_1 bis R_4 dar.



A.4 Kirchhoffsche Gestze 4

Gegeben ist die dargestellte Schaltung aus den drei Widerständen R_1, R_2 und R_3 und den beiden Quellen U_Q und I_Q.



a) Bestimmen Sie den Innenwiderstand der Schaltung bezüglich der Klemmen A und B.

b) Berechnen Sie die Leerlaufspannung U_ABL zwischen den Klemmen A und B.

c) Geben Sie die Ersatzspannungsquelle für die Schaltung nach dem vorstehenden Bild an und kennzeichne die Größen.

d) Welche Verlustleistung P_V wird in der Schaltung nach dem vorstehenden Bild umgesetzt?

e) Die Klemmen A und B werden kurzgeschlossen. Welcher Strom I_K fließt durch diese Verbindung zwischen den Klemmen A und B?

f) Welche Spannung U_AB stellt sich ein, wenn an die Klemmen A und B ein Widerstand R angeschlossen wird? ($R_1 = R_2 = R_3 = R$)

B Lösungen zu den Übungsaufgaben

B.1 Kirchhoffsche Gesetze

Hier entsteht eine Musterlösung...

B.2 Kirchhoffsche Gesetze 2

Hier entsteht eine Musterlösung...

B.3 Kirchhoffsche Gestze 3

Hier entsteht eine Musterlösung...

B.4 Kirchhoffsche Gestze 4

Hier entsteht eine Musterlösung...

Index