#### **GET** it digital

### Modul 5: Erweiterte Gleichstromnetzwerke



Stand: 19. Oktober 2025

#### Lizenz



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: "GET it digital Modul 5: Erweiterte Gleichstromnetzwerke" von T. Meibeck, M. Kiel Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de

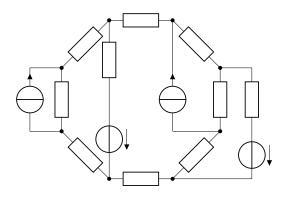
Das Werk ist online verfügbar unter:

https://getit digital.uni-wuppertal.de/module/modul-5-erweiterte-gleichstromnetzwerke

### **Einleitung**

In dem Modul 'Erweiterten Gleichstromnetzwerke' werden die folgenden Inhalte erläutert:

- Knoten- und Maschenregel
- Superposition
- Knotenpotentialanalyse
- Maschenstromanalyse



Die Analyse von Knoten und Maschen in elektrischen Netzwerken erfolgt durch die Kirchhoffschen Regeln.

### Lernziele: Knoten- und Maschenanalyse

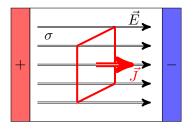
#### Die Studierenden

- kennen die grundlegenden Definitionen zur Beschreibung eines elektrischen Netzwerkes.
- 2. können die Knotenregel und die Maschenregel auf elektrische Netzwerke anwenden.

#### Stromdichte im freien Raum

Elektrisches Feld  $\vec{E}$  zwischen zwei geladenen Platten:

- ightharpoonup Raum zwischen den Platten ist mit einem leitfähigen Material  $\sigma$  gefüllt
- ightharpoonup Stromdichte  $\vec{J}$  im elektrischen Feld
- Quellenfreiheit der Stromdichte (Kontinuitätsgleichung)

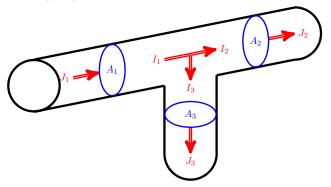


$$\oint \vec{J}d\vec{A} = 0 \quad \to \quad div\vec{J} = 0$$

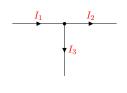
#### Stromdichte im strukturierten Raum

#### Definierter Feldraum:

- Bekannte Flächen und Stromdichten
- Strom
- Netzwerk



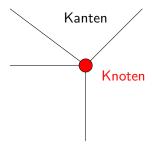
$$I_1 = \iint\limits_A \vec{J_1} d\vec{A}$$



## Exkurs: Graphentheorie

Beziehung zwischen Knoten und Ästen in der Graphentheorie:

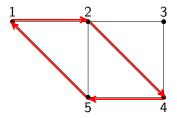
- ightharpoonup Kanten ightarrow Äste
- Knoten



## Exkurs: Graphentheorie

#### Graph:

- Weg
- ightharpoonup Weganfang = Wegende ightarrow Zyklus
- ▶ Kein kreuzender Zyklus → Kreis



### Zugehörige Adjazenz-Matrix:

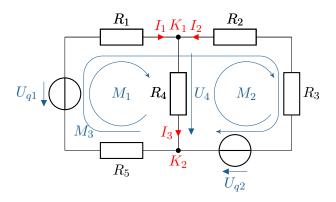
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### Graphentheorie



In der Graphentheorie werden Netzwerke mit Kanten und Knoten beschrieben. Bei der Analyse der Netzwerke werden Wege und Zyklen definiert. Ein durchgehender Zyklus mit einem identischen Startpunkt und Endpunkt wird als Kreis bezeichnet.

# Knoten, Zweig, Masche

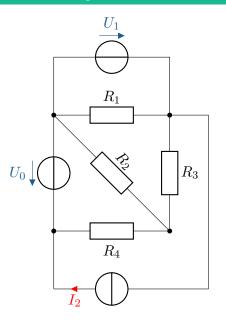


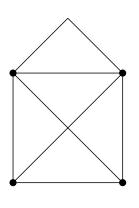
### Knoten, Zweige und Maschen



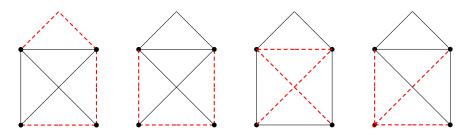
Elektrische Netzwerke werden analog zur Graphentheorie durch Knoten, Zweige und Maschen beschrieben.

# Der vollständige Baum





## Der vollständige Baum



- ightharpoonup Baumzweige ightarrow k-1 des vollständigen Baumes
- die übrigen Zweige sind Verbindungszweige
- lacktriangle Ein Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten enthält z-k+1 Verbindungszweige.

### Der vollständige Baum



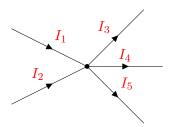
Mithilfe eines vollständigen Baumes werden alle Knoten miteinander durch Baumzweige verbunden. Es ergeben sich dabei immer k - 1 Baumzweige. Der vollständige Baum bildet keine Masche.

### Knotenregel

Die Summe aller Ströme an einem Knoten ist gleich Null.

$$\sum_{k=1}^{N} I_{k} = 0$$

Beispielnetzwerk:



▶ Summe aus Einströmungen und Ausströmungen gleich null:

$$\sum_{k=1}^{N} I_{k} = 0 = I_{1} + I_{2} - I_{3} - I_{4} - I_{5}$$

## Knotenregel

## Merke: Knotenregel

Die Summe der zufließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden Ströme oder die Summe aller Ströme an einem Knoten ist Null:

$$\sum_{k=1}^{N} I_{k} = 0$$

### Maschenregel

#### Ringintegral über der Feldstärke:

Bedingung: Keine zeitlich veränderte magnetische flussdichte und somit kein elektrisches Wirbelfeld.

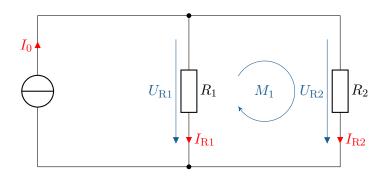
$$\oint_{s} \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \to \quad rot \vec{E} = 0$$

#### Maschenregel:

▶ Bei einem vollständigen Umlauf in einem elektrischen Netzwerk ist die Summe aller Spannungen gleich null.

$$\sum_{k=1}^{N} U_{k} = 0$$

## Maschenregel



$$\sum_{k=1}^{N} U_{k} = +U_{R2} - U_{R1} = 0$$

## Maschenregel

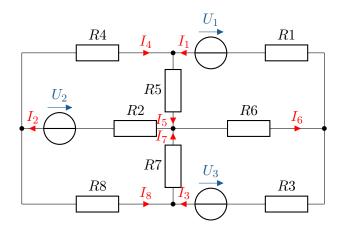
# Merke: Maschenregel

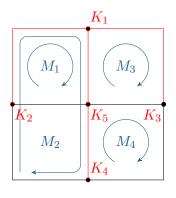
In einer Masche ist die Summe aller Teilspannungen gleich Null:

$$\sum_{k=1}^{N} U_k = 0$$

Ziel: Berechnung eines vollständigen Netzwerkes. Arbeitsschritte:

- 1. Vereinfachen des Netzwerkes.
- 2. Einzeichnen aller Strompfeile und Erstellen des Graphen.
- **3.** Aufstellen von k-1 Knotengleichungen.
- **4.** Aufstellen der m = z k + 1 linear unabhängigen Maschengleichungen.
- **5.** Lösen des Gleichungssystems mit der Dimension z.
- **6.** Ggfs. rückgängig machen von Schritt 1.





$$K_1: I_1 + I_4 - I_5 = 0$$

$$K_2: I_2 - I_4 - I_8 = 0$$

$$K_3: -I_1 - I_3 + I_6 = 0$$

$$K_4: I_3 - I_7 + I_8 = 0$$

$$M_1: R_2I_2 + R_4I_4 + R_5I_5 - U_2 = 0$$

$$M_2: R_4I_4 + R_5I_5 - R_7I_7 - R_8I_8 = 0$$

$$M_3: -R_1I_1 - R_5I_5 - R_6I_6 + U_1 = 0$$

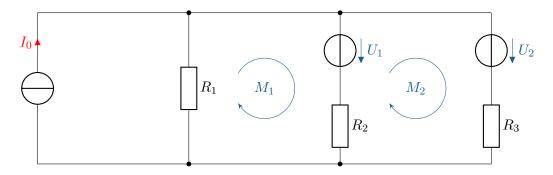
$$M_4: R_3I_3 + R_6I_6 + R_7I_7 - U_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & 0 & -R_7 & -R_8 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & R_7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ -U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

### Beispiel Netzwerkanalyse

Gegeben ist das angegebene elektrische Netzwerk. Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

- a) Einzeichnen der Ströme und Spannungen
- b) Aufstellen der Knotengleichungen
- c) Aufstellen der Maschengleichung  $M_1$
- d) Aufstellen der Maschengleichung  $M_2$  ohne den Ausdruck  $U_1$



a) Angabe der Ströme und Spannungen:

 $I_0$ 

 $K_1$ 

 $K_1$ 

 $I_3$ 

## Superpositionsprinzip

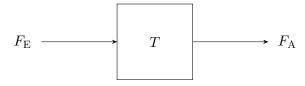
## Lernziele: Superpositionsprinzip

#### Die Studierenden

- verstehen die Bedingungen der Systemtheorie für die Analyse von Gleichstromnetzwerken.
- ▶ können den Überlagerungssatz (das Superpositionsprinzip) auf elektrische Netzwerke anwenden.

### Exkurs Systemtheorie

▶ Betrachtung einer Blackbox als System mit Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen.

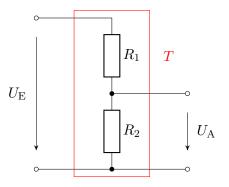


lacktriangle Transformation des Eingangssignals  $F_{
m E}$  in ein Ausgangssignal  $F_{
m A}$ .

$$F_{\rm A} = T(F_{\rm E})$$

#### Black Box

Beschreibung einer Black Box als elektrischen Netzwerk mit einer Eingangsspannung und einer Ausgangsspannung.

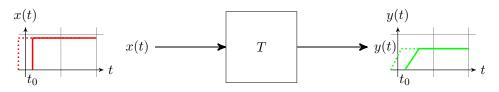


lacktriangle Transformation der Eingangsspannung  $U_{
m E}$  in eine Ausgangsspannung  $U_{
m A}$ .

$$U_{\rm A} = T(U_{\rm E}) = U_{\rm E} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

### LTI-Systeme

- Kausale Systeme zeigen keine Sytemantwort vor der Anregung
- ➤ Zeitinvariante Systeme reagieren immer gleich auf ein Eingangssignal, unabhängig vom Zeitpunkt
- lacktriangle Lineares System ightarrow endliche Ausgangsamplitude bei endlicher Eingangsamplitude
- Zeitinvariante und lineare System werden als LTI-Systeme kategorisiert



## LTI-Systeme

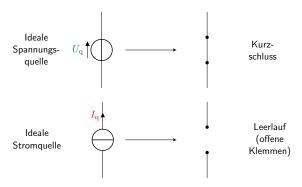


LTI-Systeme stellen lineare und zeitinvariante Systeme dar. Gleichstromnetzwerke müssen als LTI-Systeme betrachtet werden, damit der Überlagerungssatz auf sie angewendet werden kann.

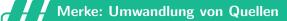
# Überlagerungssatz

### Bedinungen und Ausführung des Überlagerungssatzes:

- Vorausgesetzte Linearität
- Ausschalten der Quellen
- ▶ Ideale Spannungsquelle wird durch einen Kurzschluss ersetzt
- ▶ Ideale Stromquelle wird durch offene Klemmen, einen Leerlauf, ersetzt



## Umwandlung von Quellen



Beim Ausschalten von Spannungsquellen und Stromquellen hinterlassen deaktivierte Spannungsquellen einen Kurzschluss und deaktivierte Stromquellen einen Leerlauf.

# Zusammenfassung Überlagerungssatz

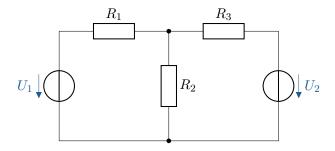
#### Annahme:

- lacktriangle Der Widerstand R wird durch die beiden Quellen  $Q_1$  und  $Q_2$  versorgt
- ightharpoonup Separate Berechnung des Stromes durch R
- ightharpoonup Gesamtstrom durch R ergibt sich aus der Summe der Ströme aus den beiden Quellen:

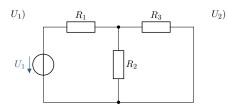
$$I_{\mathbf{R}} = f(Q_1, Q_2)$$

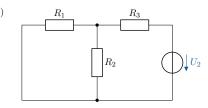
# Beispiel

#### Berechnung eines Beispielnetzwerks:



# Beispiel Lösung





$$U_{R3}(U_1) = U_1 \cdot \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}}$$

$$U_{R3}(U_2) = U_2 \cdot \frac{R_{12}}{R_3 + R_{12}}$$

$$U_{R3} = U_{R3}(U_1) + U_{R3}(U_2)$$

# Überlagerungssatz

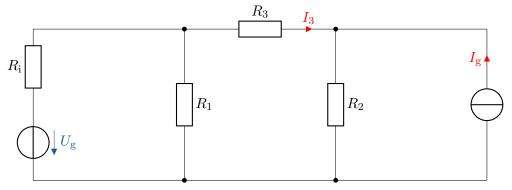


Lineare und zeitlich invariante elektrische Netzwerke mit mehr als einer Quelle können als Summe der Teilanalysen von jeder einzelnen Quelle bestimmt werden.

# Beispiel Superpositionsverfahren

Anwendung des Superpositionsverfahrens (Überlagerungssatz):

- a) Einzeichnen der Ströme und Spannungen
- b) Netzwerkberechnung  $I_3$  für  $U_{\rm g}$
- c) Netzwerkberechnung  $I_3$  für  $I_{
  m g}$
- d) Wie groß ist der Strom  $I_3$

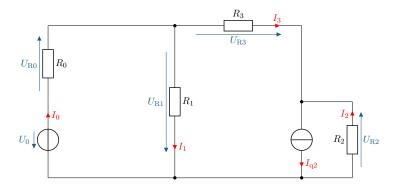


a) Angabe der Ströme und Spannungen:



### Knotenpotentialverfahren

- Vorbereitung des Netzwerkes
- ▶ Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale
- Zuordnung der Quellströme
- Aufstellung der Leitwertmatrix
- Aufstellung des Gleichungsystems



### Lernziele Knotenpotentialverfahren

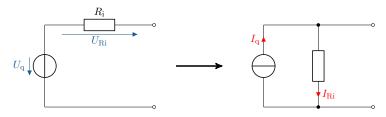
### Lernziele: Knotenpotentialverfahren

#### Die Studierenden

- kennen die Schritte des Knotenpotentialverfahrens.
- ▶ können mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens elektrische Netzwerke analysieren.

## Vorbereitung des Netzwerkes

Umwandlung der Spannungsquelle in eine Stromquelle:



► Umrechnung der Spannungsquelle zur Stromquelle:

$$I_{\mathbf{q}} = U_{\mathbf{q}} \cdot G_{\mathbf{i}}$$

► Berechnung der Leitwerte:

$$G_{\rm i} = \frac{1}{R}$$

# Knotenpotentialverfahren

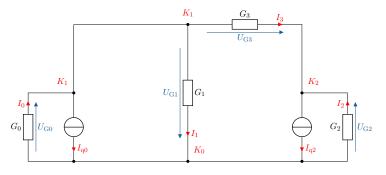


### Merke: Knotenpotentialverfahren

Beim Knotenpotentialverfahren wird ein elektrisches Netzwerk mit Stromquellen und Leitwerten analysiert.

### Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale

Festlegung des Bezugsknoten  $K_0$  und der fortlaufenden Knoten  $K_1$  und  $K_2$ :



Es werden k-1 Gleichungen benötigt. Es ergibt sich der nachfolgende Spannungsvektor:

$$U_{K} = \begin{bmatrix} U_{K1-K0} \\ U_{K2-K0} \end{bmatrix}$$

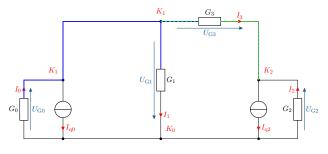
### Zuordnung der Quellströme

- ► Zuordnung der Quellströme für jeden Knoten
- ▶ Abfließende Quellströme weisen ein negatives Vorzeichen auf
- Zufließende Quellströme werden positiv notiert

$$I_{\rm K} = \begin{bmatrix} -I_{\rm q0} \\ -I_{\rm q2} \end{bmatrix}$$

#### Leitwertmatrix

- ▶ Hauptdiagonale mit den Leitwerten, welche direkt an den Knoten angrenzen
- ▶ Übrige Elemente mit den Leitwerten, welche direkt zwischen den Knoten liegen



$$G_{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 $G_{K} = \begin{bmatrix} G_{0} + G_{1} + G_{3} & 0 \\ 0 & G_{2} + G_{3} \end{bmatrix}$ 

### Gleichungssystem aufstellen

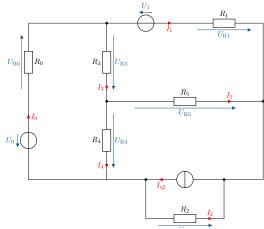
 Lösung des Gleichungssystems mit den Verfahren nach Gauß oder der Cramerschen Regel

$$\begin{bmatrix} G_0 + G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{K1-K0} \\ U_{K2-K0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{q0} \\ -I_{q2} \end{bmatrix}$$

# Beispiel Knotenpotentialverfahren

Die folgenden Schritte sollen für das Knotenpotentialverfahren bearbeitet werden:

- a) Vorbereitung des Netzwerkes
- b) Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale
- c) Zuordnung der Quellströme
- d) Aufstellung der Leitwertmatrix
- e) Gleichungssystem aufstellen



#### Lernziele Maschenstromverfahren

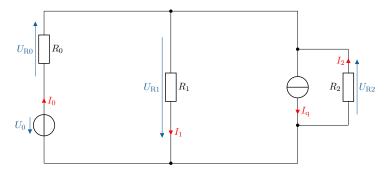
### Lernziele: Maschenstromverfahren

#### Die Studierenden

- kennen die Schritte des Maschenstromverfahrens.
- ▶ können mit Hilfe des Maschenstromverfahrens elektrische Netzwerke analysieren.

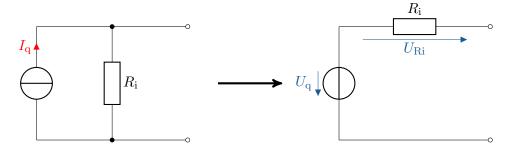
### Maschenstromverfahren

- Vorbereitung des Netzwerkes
- Maschen definieren
- Widerstandsmatrix bestimmen
- Quellenspannungen zuordnen
- ► Gleichungssystem aufstellen



## Vorbereitung des Netzwerkes

Umwandlung der Stromquellen in Spannungsquellen:



Umrechnung der Stromwerte zu Spannungswerten:

$$U_{\mathbf{q}} = R_{\mathbf{i}} \cdot I_{\mathbf{q}}$$

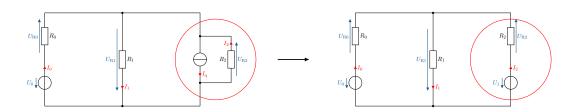
Berechnung der Leitwerte:

$$R_{\rm i} = \frac{1}{G_{\rm i}}$$

# Vorbereitung des Netzwerkes

Umwandlung der Stromquelle in eine Spannungsquelle:

- ▶ Die Stromquelle mit einer Spannungsquelle ersetzen
- Aus dem Parallelwiderstand wird ein Reihenwiderstand



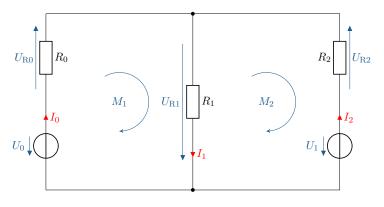
### Maschenstromverfahren



Für das Maschenstromverfahren werden zur Analyse eines elektrischen Netzwerkes Spannungsquellen und Widerstandswerte benötigt.

### Maschen definieren

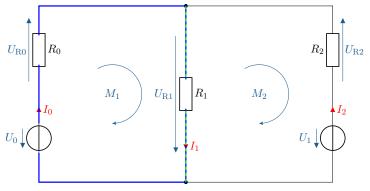
Festlegung der Maschen und Maschenströme



$$I_{
m M} = egin{bmatrix} I_{
m M1} \ I_{
m M2} \end{bmatrix}$$

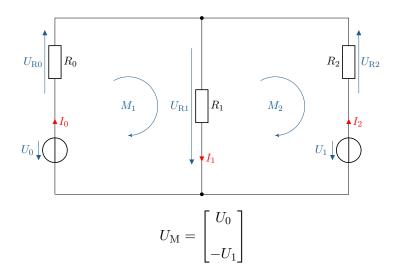
### Widerstandsmatrix bestimmen

- Hauptdiagonale mit den Widerstandswerten, welche direkt an den Maschen liegen
- Übrige Elemente mit den Widerstandswerten, welche direkt zwischen beteiligten Maschen liegen



$$R_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Quellenspannungen zuordnen



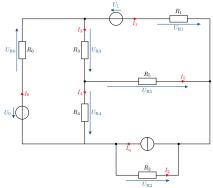
### Gleichungssystem aufstellen

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ -U_1 \end{bmatrix}$$

### Beispiel Maschenstromverfahren

Für die Maschenstromanalyse sollen die folgenden Schritte bearbeitet werden:

- a) Vorbereitung des Netzwerkes
- b) Maschen und Maschenströme definieren
- c) Widerstandsmatrix bestimmen
- d) Quellspannungen zuordnen
- e) Gleichungssystem aufstellen



a) Vorbereitung des Netzwerkes:

 $U_1$