GET it digital

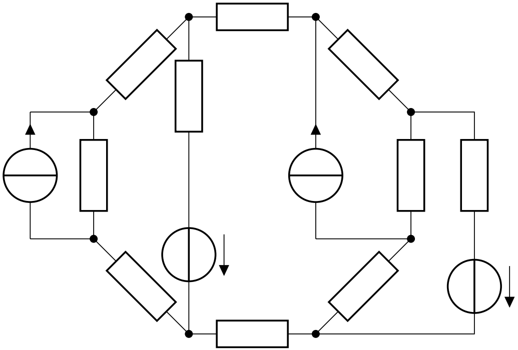
Modul 5: Erweiterte Gleichstromnetzwerke

Stand: 8. April 2026

Einleitung

In dem Modul 'Erweiterten Gleichstromnetzwerke' werden die folgenden Inhalte erläutert:

- Knoten- und Maschenregel
- Superposition
- Knotenpotentialanalyse
- Maschenstromanalyse



Die Analyse von Knoten und Maschen in elektrischen Netzwerken erfolgt durch die Kirchhoffschen Regeln.

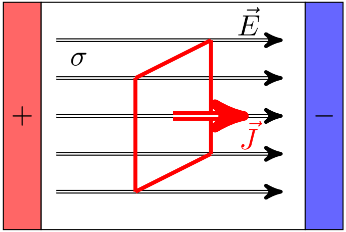
Lernziele: Knoten- und Maschenanalyse

Die Studierenden

1. kennen die grundlegenden Definitionen zur Beschreibung eines elektrischen Netzwerkes.
2. können die Knotenregel und die Maschenregel auf elektrische Netzwerke anwenden.

Elektrisches Feld $\vec{E}$ zwischen zwei geladenen Platten:

- Raum zwischen den Platten ist mit einem leitfähigen Material σ gefüllt
- Stromdichte $\vec{J}$ im elektrischen Feld
- Quellenfreiheit der Stromdichte (Kontinuitätsgleichung)

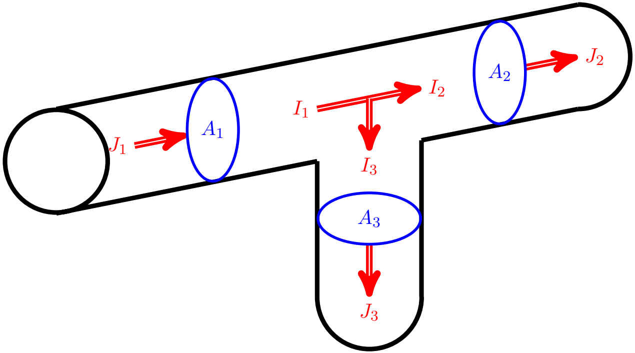


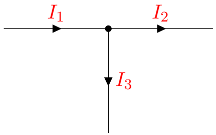
$$\oint \vec{J} d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad div \vec{J} = 0$$

Definierter Feldraum:

- Bekannte Flächen und Stromdichten
- Strom
- Netzwerk

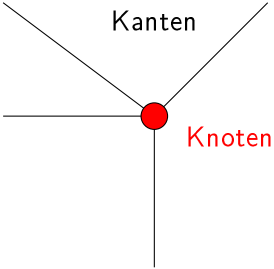
$$I_1 = \iint\limits_A \vec{J}_1 d\vec{A}$$





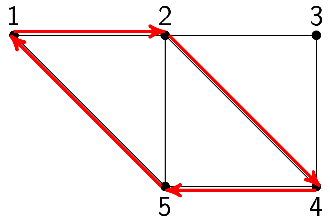
Beziehung zwischen Knoten und Ästen in der Graphentheorie:

- Kanten → Äste
- Knoten



Graph:

- Weg
- Weganfang = Wegende → Zyklus
- Kein kreuzender Zyklus → Kreis

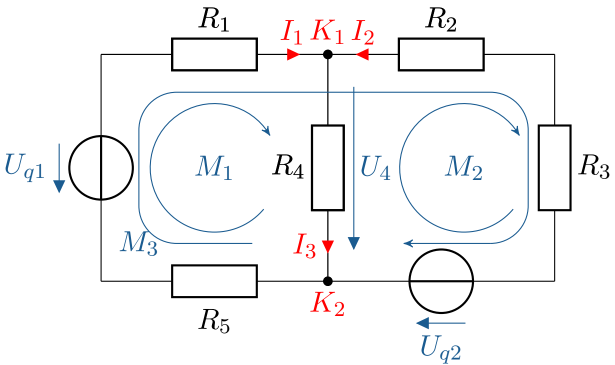


Zugehörige Adjazenz-Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} \color{blue}{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \color{blue}{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \color{blue}{1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \color{blue}{1} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \color{blue}{1} \end{bmatrix}$$

Merke: Graphentheorie

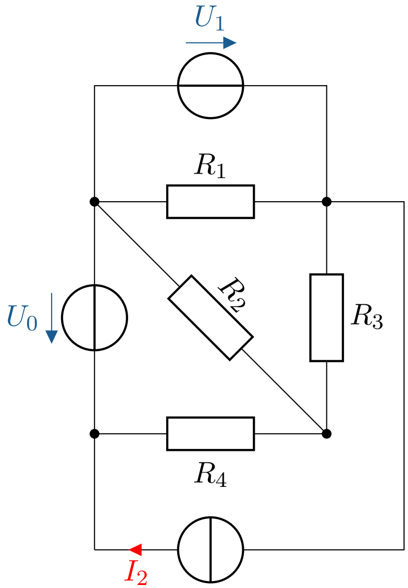
In der Graphentheorie werden Netzwerke mit Kanten und Knoten beschrieben. Bei der Analyse der Netzwerke werden Wege und Zyklen definiert. Ein durchgehender Zyklus mit einem identischen Startpunkt und Endpunkt wird als Kreis bezeichnet.

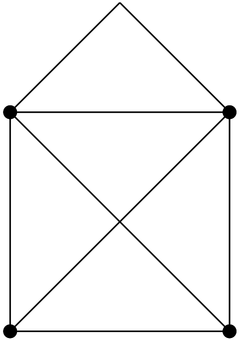

R_1
I_1
K_1
I_2
R_2
U_{q1}
M_1
R_4
U_4
M_2
R_3
M_3
I_3
R_5
K_2
U_{q2}

Merke: Knoten, Zweige und Maschen

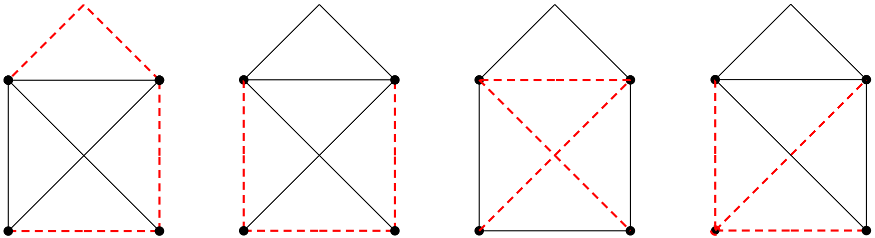
Elektrische Netzwerke werden analog zur Graphentheorie durch Knoten, Zweige und Maschen beschrieben.

Der vollständige Baum





Der vollständige Baum



- Baumzweige $\rightarrow$ k-1 des vollständigen Baumes
- die übrigen Zweige sind Verbindungszweige
- Ein Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten enthält $z - k + 1$ Verbindungszweige.

Merke: Der vollständige Baum

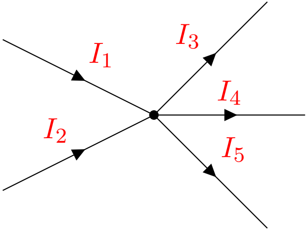
Mithilfe eines vollständigen Baumes werden alle Knoten miteinander durch Baumzweige verbunden. Es ergeben sich dabei immer k - 1 Baumzweige. Der vollständige Baum bildet keine Masche.

Knotenregel

- Die Summe aller Ströme an einem Knoten ist gleich Null.

$$\sum_{k=1}^{N} I_{\mathrm{k}} = 0$$

- Beispielnetzwerk:



- Summe aus Einströmungen und Ausströmungen gleich null:

$$\sum_{k=1}^{N} I_{\mathrm{k}} = 0 = I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5$$

Knotenregel

Merke: Knotenregel

Die Summe der zufließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden Ströme oder die Summe aller Ströme an einem Knoten ist Null:

$$\sum_{k=1}^{N} I_{\mathrm{k}} = 0$$

Maschenregel

Ringintegral über der Feldstärke:

- Bedingung: Keine zeitlich veränderte magnetische flussdichte und somit kein elektrisches Wirbelfeld.

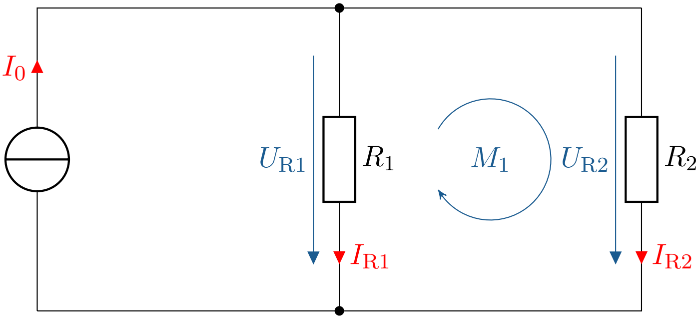
$$\oint_s \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad rot\vec{E} = 0$$

Maschenregel:

- Bei einem vollständigen Umlauf in einem elektrischen Netzwerk ist die Summe aller Spannungen gleich null.

$$\sum_{k=1}^{N} U_{\mathrm{k}} = 0$$

Maschenregel



$$\sum_{k=1}^{N} U_k = +U_{R2} - U_{R1} = 0$$

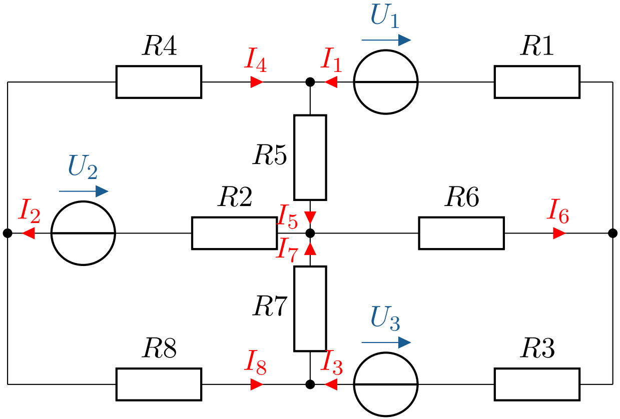
Merke: Maschenregel

In einer Masche ist die Summe aller Teilspannungen gleich Null:

$$\sum_{k=1}^{N} U_k = 0$$

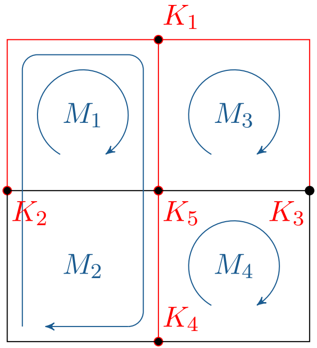
Ziel: Berechnung eines vollständigen Netzwerkes. Arbeitsschritte:

1. Vereinfachen des Netzwerkes.
2. Einzeichnen aller Strompfeile und Erstellen des Graphen.
3. Aufstellen von $k-1$ Knotengleichungen.
4. Aufstellen der $m = z - k + 1$ linear unabhängigen Maschengleichungen.
5. Lösen des Gleichungssystems mit der Dimension z.
6. Ggfs. rückgängig machen von Schritt 1.



U_1
$R4$
I_4
I_1
$R1$
$R5$
U_2
$R2$
$R6$
I_2
I_5
I_6
I_7
$R7$
U_3
$R8$
$R3$
I_8
I_3

Knoten- und Maschenanalyse

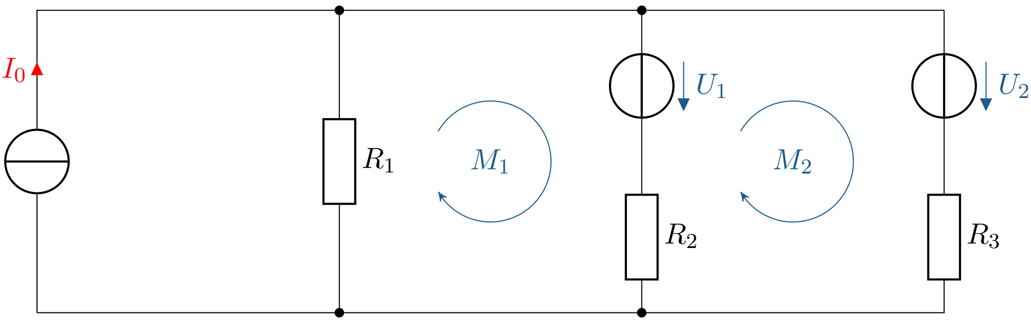


$$
\begin{aligned}
K_1 : &\quad I_1 + I_4 - I_5 = 0 \\
K_2 : &\quad I_2 - I_4 - I_8 = 0 \\
K_3 : &\quad -I_1 - I_3 + I_6 = 0 \\
K_4 : &\quad I_3 - I_7 + I_8 = 0 \\
M_1 : &\quad R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_5 I_5 - U_2 = 0 \\
M_2 : &\quad R_4 I_4 + R_5 I_5 - R_7 I_7 - R_8 I_8 = 0 \\
M_3 : &\quad -R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_6 I_6 + U_1 = 0 \\
M_4 : &\quad R_3 I_3 + R_6 I_6 + R_7 I_7 - U_3 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & R_2 & 0 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & 0 & -R_7 & -R_8 \\
-R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & R_7 & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ -U_1 \\ U_3
\end{pmatrix}
$$

Gegeben ist das angegebene elektrische Netzwerk. Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

a) Einzeichnen der Ströme und Spannungen
b) Aufstellen der Knotengleichungen
c) Aufstellen der Maschengleichung M_1
d) Aufstellen der Maschengleichung M_2 ohne den Ausdruck U_1



a) Angabe der Ströme und Spannungen:

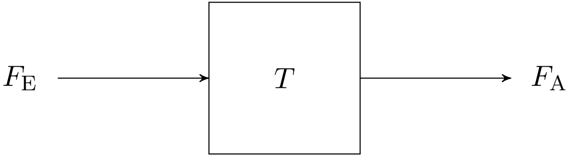
I_0 K_1 K_1 I_3

Lernziele: Superpositionsprinzip

Die Studierenden

- verstehen die Bedingungen der Systemtheorie für die Analyse von Gleichstromnetzwerken.
- können den Überlagerungssatz (das Superpositionsprinzip) auf elektrische Netzwerke anwenden.

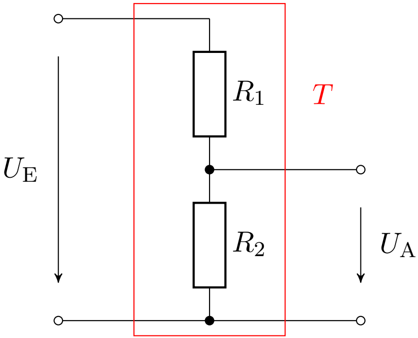
- Betrachtung einer Blackbox als System mit Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen.



- Transformation des Eingangssignals F_{E} in ein Ausgangssignal F_{A}.

$$F_{\mathrm{A}} = T(F_{\mathrm{E}})$$

- Beschreibung einer Black Box als elektrischen Netzwerk mit einer Eingangsspannung und einer Ausgangsspannung.

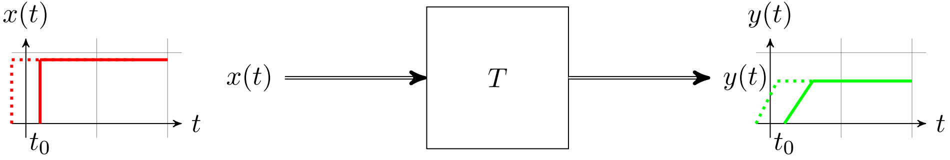


- Transformation der Eingangsspannung U_E in eine Ausgangsspannung U_A.

$$U_A = T(U_E) = U_E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

LTI-Systeme

- Kausale Systeme zeigen keine Sytemantwort vor der Anregung
- Zeitinvariante Systeme reagieren immer gleich auf ein Eingangssignal, unabhängig vom Zeitpunkt
- Lineares System $\rightarrow$ endliche Ausgangsamplitude bei endlicher Eingangsamplitude
- Zeitinvariante und lineare System werden als LTI-Systeme kategorisiert

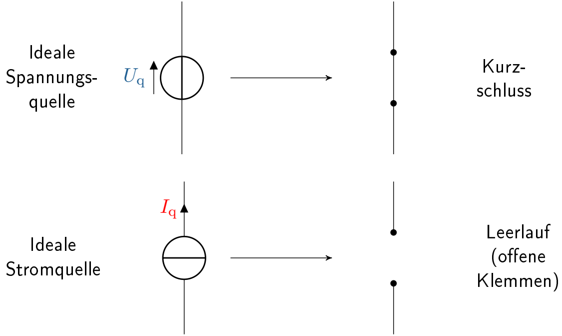


Merke: LTI-Systeme

LTI-Systeme stellen lineare und zeitinvariante Systeme dar. Gleichstromnetzwerke müssen als LTI-Systeme betrachtet werden, damit der Überlagerungssatz auf sie angewendet werden kann.

Bedinungen und Ausführung des Überlagerungssatzes:

- Vorausgesetzte Linearität
- Ausschalten der Quellen
- Ideale Spannungsquelle wird durch einen Kurzschluss ersetzt
- Ideale Stromquelle wird durch offene Klemmen, einen Leerlauf, ersetzt



Merke: Umwandlung von Quellen

Beim Ausschalten von Spannungsquellen und Stromquellen hinterlassen deaktivierte Spannungsquellen einen Kurzschluss und deaktivierte Stromquellen einen Leerlauf.

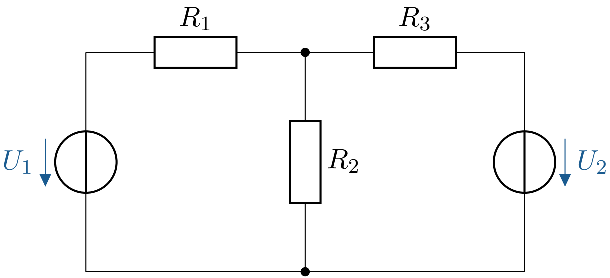
Zusammenfassung Überlagerungssatz

Annahme:

- Der Widerstand R wird durch die beiden Quellen Q_1 und Q_2 versorgt
- Separate Berechnung des Stromes durch R
- Gesamtstrom durch R ergibt sich aus der Summe der Ströme aus den beiden Quellen:

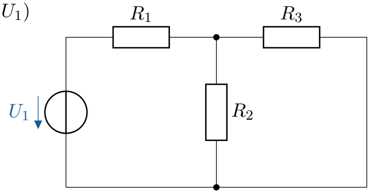
$$I_{\mathrm{R}} = f(Q_1, Q_2)$$

Berechnung eines Beispielnetzwerks:

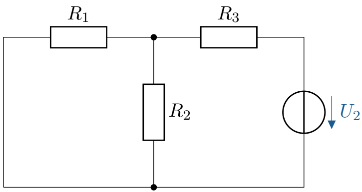


Beispiel Lösung

$U_1)$



$U_2)$



$$U_{\mathrm{R3}}(U_1) = U_1 \cdot \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}}$$

$$U_{\mathrm{R3}}(U_2) = U_2 \cdot \frac{R_{12}}{R_3 + R_{12}}$$

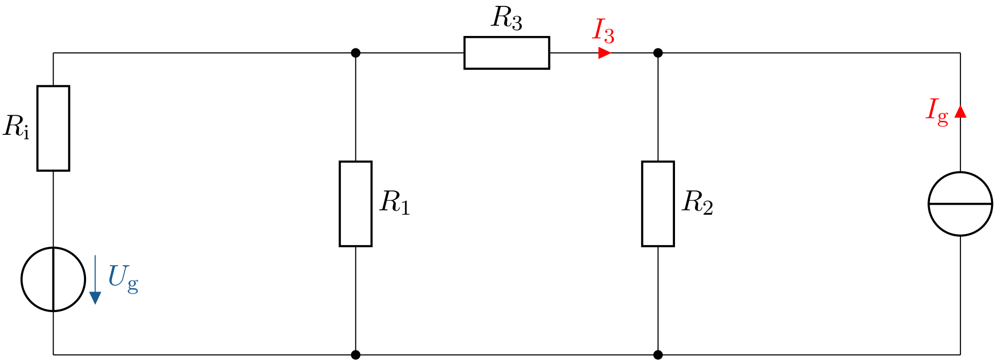
$$U_{\mathrm{R3}} = U_{\mathrm{R3}}(U_1) + U_{\mathrm{R3}}(U_2)$$

Merke: Überlagerungssatz

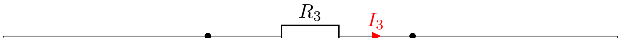
Lineare und zeitlich invariante elektrische Netzwerke mit mehr als einer Quelle können als Summe der Teilanalysen von jeder einzelnen Quelle bestimmt werden.

Anwendung des Superpositionsverfahrens (Überlagerungssatz):

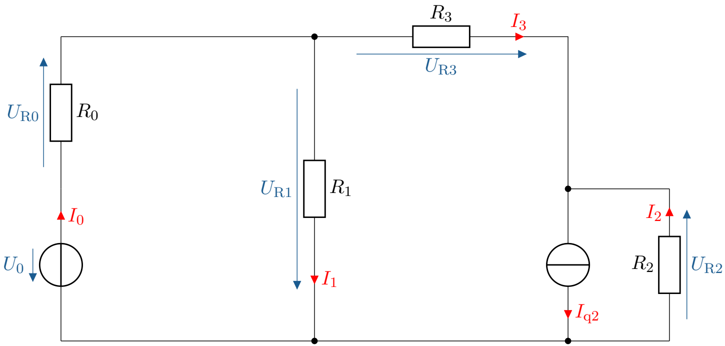
a) Einzeichnen der Ströme und Spannungen
b) Netzwerkberechnung I_3 für U_g
c) Netzwerkberechnung I_3 für I_g
d) Wie groß ist der Strom I_3



a) Angabe der Ströme und Spannungen:



- Vorbereitung des Netzwerkes
- Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale
- Zuordnung der Quellströme
- Aufstellung der Leitwertmatrix
- Aufstellung des Gleichungsystems

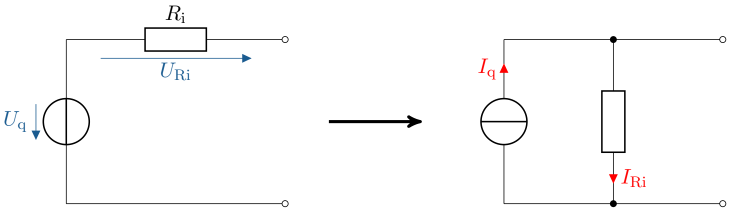


Lernziele: Knotenpotentialverfahren

Die Studierenden

- kennen die Schritte des Knotenpotentialverfahrens.
- können mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens elektrische Netzwerke analysieren.

- Umwandlung der Spannungsquelle in eine Stromquelle:



- Umrechnung der Spannungsquelle zur Stromquelle:

$$I_\mathrm{q} = U_\mathrm{q} \cdot G_\mathrm{i}$$

- Berechnung der Leitwerte:

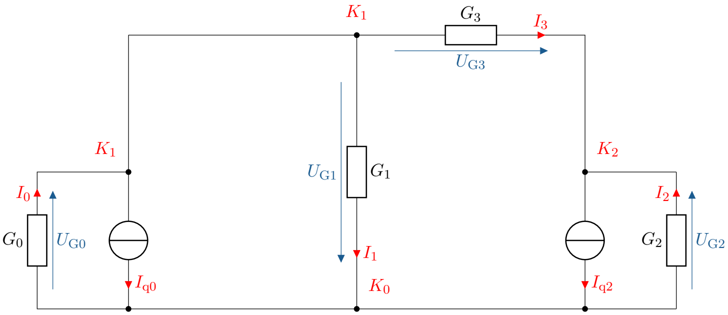
$$G_\mathrm{i} = \frac{1}{R_\mathrm{i}}$$

Merke: Knotenpotentialverfahren

Beim Knotenpotentialverfahren wird ein elektrisches Netzwerk mit Stromquellen und Leitwerten analysiert.

Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale

- Festlegung des Bezugsknoten K_0 und der fortlaufenden Knoten K_1 und K_2:



- Es werden $k-1$ Gleichungen benötigt. Es ergibt sich der nachfolgende Spannungsvektor:

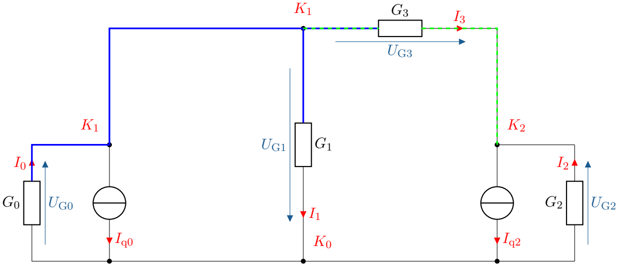
$$U_K = \begin{bmatrix} U_{K1-K0} \\ \\ U_{K2-K0} \end{bmatrix}$$

- Zuordnung der Quellströme für jeden Knoten
- Abfließende Quellströme weisen ein negatives Vorzeichen auf
- Zufließende Quellströme werden positiv notiert

$$I_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} -I_{\mathrm{q0}} \\ \\ -I_{\mathrm{q2}} \end{bmatrix}$$

Leitwertmatrix

- Hauptdiagonale mit den Leitwerten, welche direkt an den Knoten angrenzen
- Übrige Elemente mit den Leitwerten, welche direkt zwischen den Knoten liegen



$$G_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} G_0 + G_1 + G_3 & 0 \\ 0 & G_2 + G_3 \end{bmatrix}$$

Gleichungssystem aufstellen

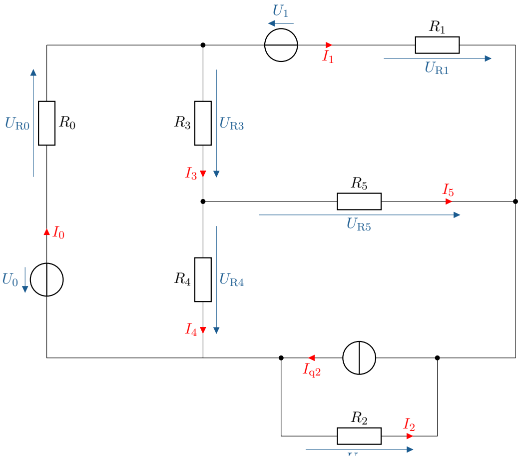
- Lösung des Gleichungssystems mit den Verfahren nach Gauß oder der Cramerschen Regel

$$\begin{bmatrix} G_0 + G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{\mathrm{K1-K0}} \\ U_{\mathrm{K2-K0}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{\mathrm{q0}} \\ -I_{\mathrm{q2}} \end{bmatrix}$$

Beispiel Knotenpotentialverfahren

Die folgenden Schritte sollen für das Knotenpotentialverfahren bearbeitet werden:

a) Vorbereitung des Netzwerkes
b) Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale
c) Zuordnung der Quellströme
d) Aufstellung der Leitwertmatrix
e) Gleichungssystem aufstellen



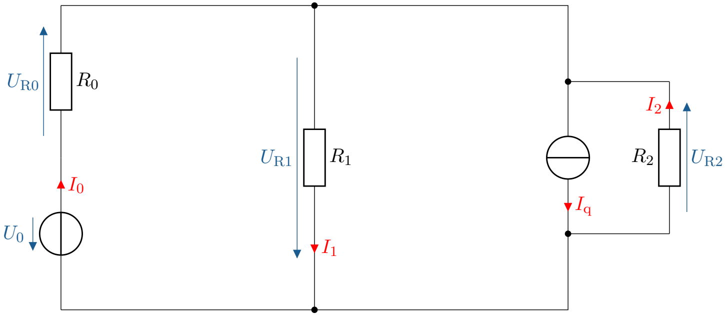
Lernziele Maschenstromverfahren

Lernziele: Maschenstromverfahren

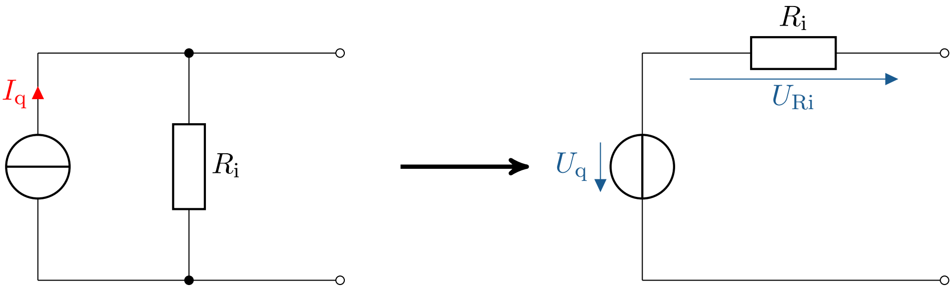
Die Studierenden

- kennen die Schritte des Maschenstromverfahrens.
- können mit Hilfe des Maschenstromverfahrens elektrische Netzwerke analysieren.

- Vorbereitung des Netzwerkes
- Maschen definieren
- Widerstandsmatrix bestimmen
- Quellenspannungen zuordnen
- Gleichungssystem aufstellen



- Umwandlung der Stromquellen in Spannungsquellen:



- Umrechnung der Stromwerte zu Spannungswerten:

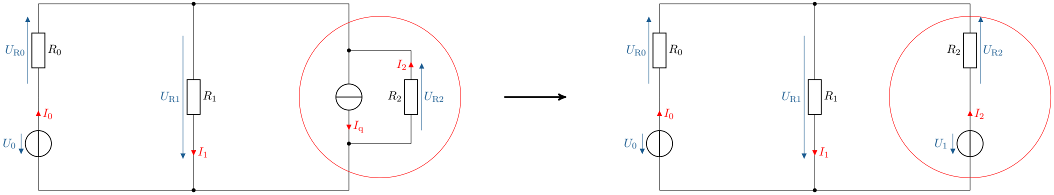
$$U_q = R_i \cdot I_q$$

- Berechnung der Leitwerte:

$$R_i = \frac{1}{G_i}$$

Umwandlung der Stromquelle in eine Spannungsquelle:

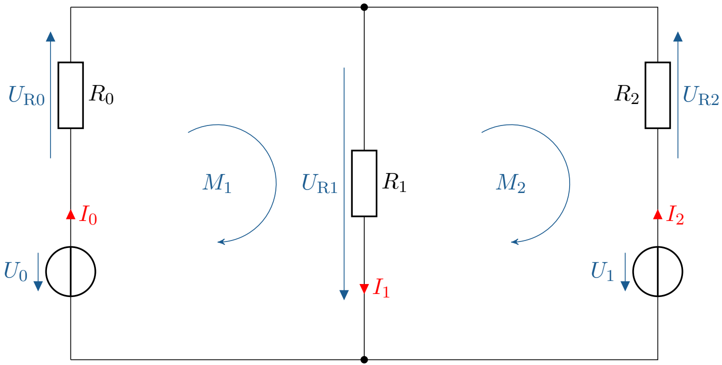
- Die Stromquelle mit einer Spannungsquelle ersetzen
- Aus dem Parallelwiderstand wird ein Reihenwiderstand



Merke: Maschenstromverfahren

Für das Maschenstromverfahren werden zur Analyse eines elektrischen Netzwerkes Spannungsquellen und Widerstandswerte benötigt.

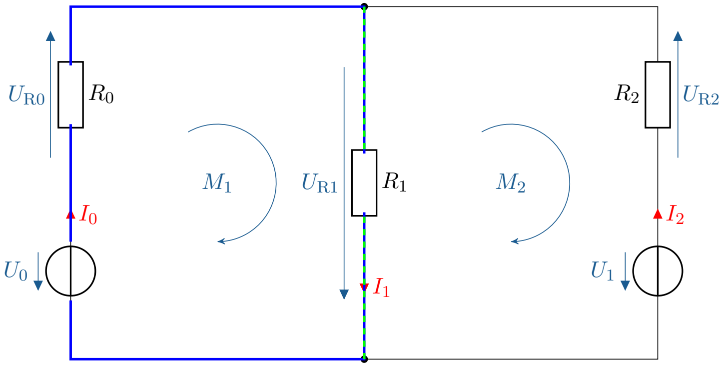
- Festlegung der Maschen und Maschenströme



$$I_M = \begin{bmatrix} I_{M1} \\ \\ I_{M2} \end{bmatrix}$$

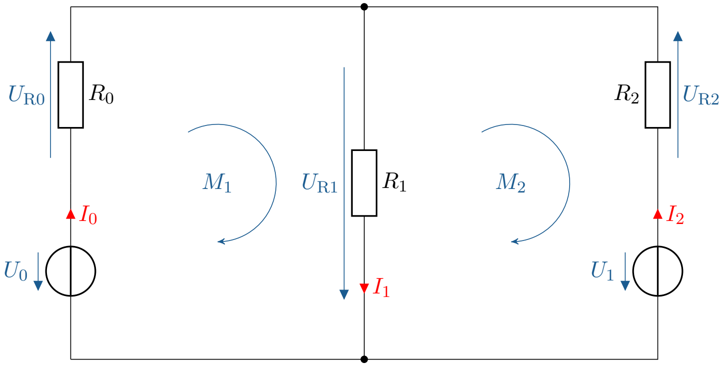
Widerstandsmatrix bestimmen

- Hauptdiagonale mit den Widerstandswerten, welche direkt an den Maschen liegen
- Übrige Elemente mit den Widerstandswerten, welche direkt zwischen beteiligten Maschen liegen



$$R_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quellenspannungen zuordnen



$$U_M = \begin{bmatrix} U_0 \\ -U_1 \end{bmatrix}$$

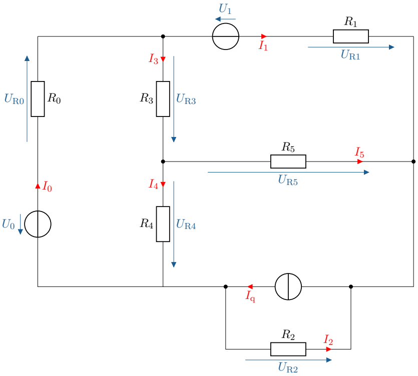
Gleichungssystem aufstellen

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{\mathrm{M1}} \\ I_{\mathrm{M2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ -U_1 \end{bmatrix}$$

Beispiel Maschenstromverfahren

Für die Maschenstromanalyse sollen die folgenden Schritte bearbeitet werden:

a) Vorbereitung des Netzwerkes
b) Maschen und Maschenströme definieren
c) Widerstandsmatrix bestimmen
d) Quellspannungen zuordnen
e) Gleichungssystem aufstellen



a) Vorbereitung des Netzwerkes: