GET it digital

Modul 5:

Erweiterte Gleichstromnetzwerke

Torben Meibeck M.Eng.
Dr.-Ing. Martin Kiel

Ein Kooperationsvorhaben
empfohlen durch die

DIGITALE
HOCHSCHULE
NRW

gefördert durch

Ministerium für
Kultur und Wissenschaft
des Landes Nordrhein-Westfalen

Stand: 8. April 2026

Das Werk ist online verfügbar unter:
https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-5-erweiterte-gleichstromnetzwerke
Projekthomepage:
https://getitdigital.uni-wuppertal.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Knoten- und Maschenanalyse **2**
2.1 Stromdichte im freien Raum . . . 2
2.2 Stromdichte im strukturierten Raum . . . 2
2.3 Exkurs: Graphentheorie . . . 3
2.4 Knoten, Zweig, Masche . . . 5
2.5 Der vollständige Baum . . . 6
2.6 Knotenregel . . . 7
2.7 Maschenregel . . . 8
2.8 Knoten- und Maschenanalyse . . . 9

3 Superpositionsprinzip **13**
3.1 Exkurs Systemtheorie . . . 13
3.2 Überlagerungssatz . . . 15

4 Knotenpotentialverfahren **20**
4.1 Vorbereitung des Netzwerkes . . . 20
4.2 Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale . . . 21
4.3 Zuordnung der Quellströme . . . 22
4.4 Leitwertmatrix . . . 22
4.5 Gleichungssystem aufstellen . . . 23

5 Maschenstromverfahren **26**
5.1 Vorbereitung des Netzwerkes . . . 26
5.2 Maschen definieren . . . 27
5.3 Widerstandsmatrix bestimmen . . . 28
5.4 Quellenspannungen zuordnen . . . 29
5.5 Gleichungssystem aufstellen . . . 29

A Übungsaufgaben **33**
A.1 Knoten- und Maschenanalyse 1 . . . 33
A.2 Knoten- und Maschenanalyse 2 . . . 33
A.3 Knoten- und Maschenanalyse 3 . . . 33
A.4 Superposition 1 . . . 34
A.5 Knotenpotentialverfahren 1 . . . 34
A.6 Knotenpotentialverfahren 2 . . . 35
A.7 Maschenstromverfahren 1 . . . 35
A.8 Maschenstromverfahren 2 . . . 36

B Lösungen zu den Übungsaufgaben **36**
B.1 Knoten- und Maschenanalyse 1 . . . 36
B.2 Knoten- und Maschenanalyse 2 . . . 36
B.3 Knoten- und Maschenanalyse 3 . . . 37
B.4 Superposition 1 . . . 38
B.5 Knotenpotentialverfahren 1 . . . 38
B.6 Knotenpotentialverfahren 2 . . . 39
B.7 Maschenstromverfahren 1 . . . 40
B.8 Maschenstromverfahren 2 . . . 40

Index **42**

1 Einleitung

Während die Berechnungen von Serienschaltungen ohne parallele geschaltete Bestandteile recht aufwendungsarm zu bewerkstelligen sind, wird die Analyse von Gleichstromnetzwerken mit Knoten, welche n Abzweigungen aufweisen, wobei die Anzahl der Zweige dabei $n \geq 2$ ist, bei steigender Knotenanzahl schnell unübersichtlich. Eine vielschichtige Betrachtung des Gleichstromnetzwerkes ist hier von Nöten. Für die Berechnung von Gleichstromnetzwerken stehen die folgenden Methoden zur Verfügung:

- Knoten- und Maschenregel
- Superposition
- Knotenpotentialanalyse
- Maschenstromanalyse

Auch die Analyse von elektrischen Netzwerken mit mehr als einer Strom- oder Spannungsquelle ist nicht trivial. Die Bestimmung aller Ströme und Spannungen des elektrischen Netzwerkes aus Abbildung 5.1 ist allein durch die Berechnungen von Serienschaltungen und Parallelschaltungen nicht möglich.

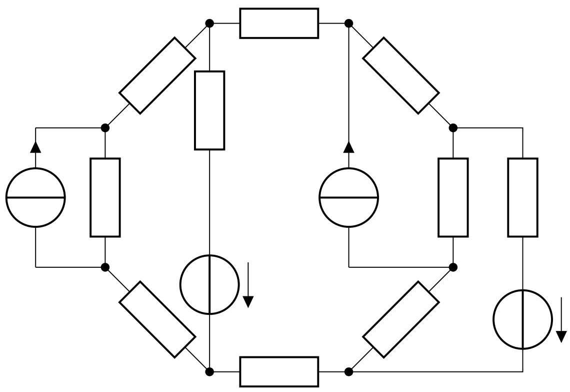


Abbildung 5.1: **Beispielnetzwerk.** Elektrisches Gleichstromnetzwerk mit einer Vielzahl an Widerständen, Stromquellen und Spannungsquellen.

2 Knoten- und Maschenanalyse

Bei der Betrachtung von elektrischen Netzwerken werden vor allem die Ströme in Knoten und die Spannungen in Maschen analysiert. Die Analyse von Knoten und Maschen in elektrischen Netzwerken erfolgt durch die beiden Kirchhoffsche Regeln.

Lernziele: Knoten- und Maschenanalyse

Die Studierenden

1. kennen die grundlegenden Definitionen zur Beschreibung eines elektrischen Netzwerkes.
2. können die Knotenregel und die Maschenregel auf elektrische Netzwerke anwenden.

2.1 Stromdichte im freien Raum

Gegebenheiten und Begriffe aus der Feldtheorie führen zu den Erklärungen im strukturierten Feldraum. Dazu werden in der Abbildung 5.2 eine positiv geladene Platte und eine negativ geladene Platte dargestellt, die sich gegenüberstehen. Der Raum zwischen den beiden Platten weist ein Elektrisches Feld $\vec{E}$ und ein Medium mit der Leitfähigkeit σ auf. Ladungsträger können sich in dem freien Raum bewegen. Es stellt sich eine gerichtete Bewegung von Ladungsträgern und damit eine Stromdichte $\vec{J}$ zwischen den Platten ein. Die Stromdichte ist dabei in der betrachteten Fläche quellenfrei.

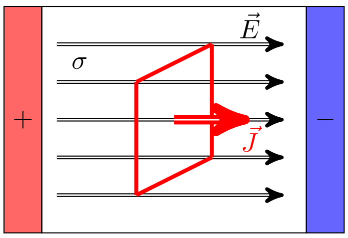


Abbildung 5.2: **Elektrisches Feld zwischen einer positiv geladenen und einer negativ geladenen Platte.** Die Stromdichte einer Beispielfläche im elektrischen Feld ist quellenfrei.

Die Quellenfreiheit der Stromdichte wird durch die Gleichung 5.1 verdeutlicht. Hier wird beschrieben, dass keine Quellen oder Senken existieren, da sich keine feldbildenden Ladungen im Raum befinden. Für diesen Fall ist die Stromdichte quellenfrei und es fließen dieselbe Anzahl an Ladungen in die Fläche hinein und wieder heraus. Mathematisch wird dies für die Betrachtung im freien Raum in der Kontinuitätsgleichung ausgedrückt:

$$\oint \vec{J} d\vec{A} = 0 \quad \rightarrow \quad div\vec{J} = 0 \tag{5.1}$$

2.2 Stromdichte im strukturierten Raum

Im strukturierten Feldraum (vgl. Abbildung 5.3) gilt ebenfalls die Quellenfreiheit der Stromdichte. Alle Ladungen, die in den Feldraum eindringen, müssen ihn auch wieder verlassen. Dies gilt auch für den Fall, dass ein elektrischer Leiter mehr als einen Ableiter aufweist. Es wird eine Zuleitung mit zwei Ableitungen angedeutet, bei dem sich die Ladungen auf die beiden Ableitungen aufteilen. Die Zylinder-Mantelflächen A_1, A_2 und A_3 definieren mit den angrenzenden Zylindern einen strukturierten Feldraum. Wie die Ladungen teilen sich die Stromdichten durch den strukturierten Raum auf. So ergibt sich die Stromdichte $\vec{J_1}$ aus der Summe der abfließenden Stromdichten $\vec{J_2}$ und $\vec{J_3}$.

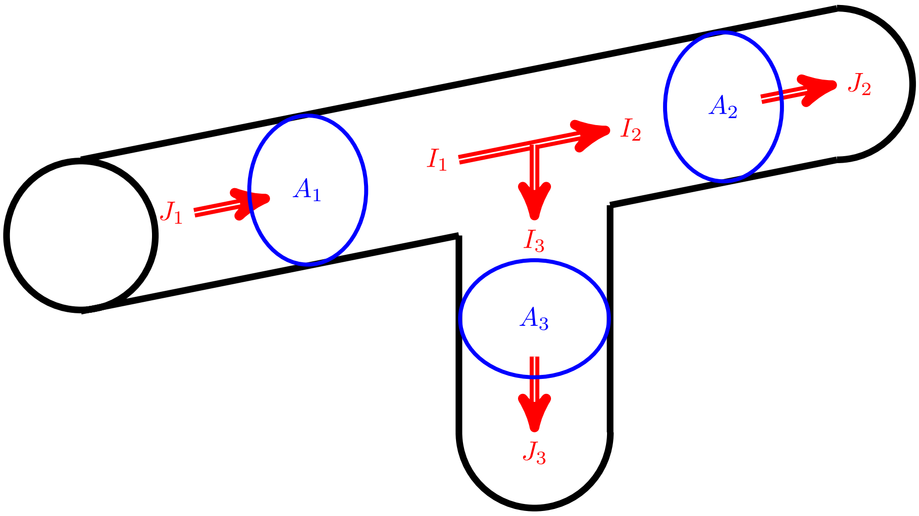


Abbildung 5.3: **Strukturierter Feldraum.** Vereinfachte Darstellung eines sich aufteilenden Leiters mit den Stromdichten J_1, J_2 und J_3 und den Flächen A_1, A_2 und A_3.

Da der Feldraum im Beispiel durch die Flächen strukturiert und der Querschnitt der Leitung definiert ist, lassen sich aus der Beziehung zwischen der Stromdichte und der Fläche die Ströme der Leitungen gemäß Gleichung 5.2 ermitteln.

$$I_1 = \iint_A \vec{J_1} d\vec{A} \tag{5.2}$$

Der Zusammenhang der Stromdichten zueinander lässt sich so auf die Ströme übertragen. Der Strom der Zuleitung I_1 ergibt sich aus der Summe der beiden Ableitungsströmen I_2 und I_3. Der Beispielleiter kann auch als vereinfachtes elektrisches Netzwerk dargestellt werden. Die ermittelten Ströme um den Verbindungspunkt K (Knoten) werden in der Abbildung 5.4 abgebildet.

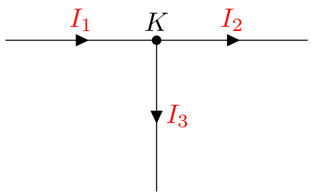


Abbildung 5.4: **Beispielknoten aus dem strukturierten Raum.** Aus den Stromdichten J_1, J_2 und J_3 ergeben sich um den Knoten K die Ströme I_1, I_2 und I_3.

2.3 Exkurs: Graphentheorie

In der Mathematik beschäftigt sich die Graphentheorie mit der Beschreibung von Knoten und Kanten, in der Kontenanalyse werden ebenfalls Knoten und Äste definiert. Durch die Graphentheorie können die Kanten und Knoten, welche in der Abbildung 5.5 dargestellt werden, sowie deren Eigenschaften miteinander in Beziehung gesetzt werden. Über die Kanten können mehrere Knoten miteinander verbunden werden.

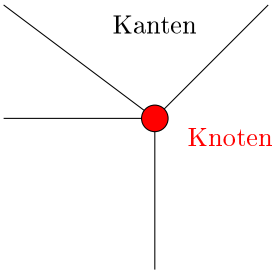


Abbildung 5.5: **Beispielknoten der Graphentheorie.** Knoten mit 4 Kanten zur Erläuterung von Knoten und Kanten in der Graphentheorie.

Werden mehrere Knoten mit ihren Kanten miteinander verbunden entsteht ein Graph. Mit diesem Graph kann exemplarisch ein elektrisches Netzwerk beschrieben werden. Das Beispiel eines Netzwerkes mit fünf Knoten und den zwischen den Knoten liegenden Kanten wird in der Abbildung 5.6 gezeigt. Wird ein Weg durch das Netzwerk gesucht ergeben sich unterschiedliche Möglichkeiten. Ein Weg vom Knoten 1 über die Knoten 2, 4 und 5 zurück zum Knoten 1 wird rot hinterlegt. Sind Anfang und Ende derselbe Knoten, so wird dieser Weg in der Graphentheorie auch als Zyklus bezeichnet. Jeder Zyklus, bei dem jeder Knoten bis auf den Anfang und das Ende nur einmal „besucht“ wird, nennt man einen „Kreis“. In elektrischen Netzwerken werden diese Kreise auch als Maschen bezeichnet.

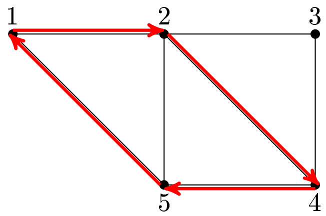


Abbildung 5.6: **Beispielnetzwerk der Graphentheorie.** Netzwerk mit 5 Knoten und zwischen den Knoten verlaufenden Kanten zur Erläuterung eines Zyklus in der Graphentheorie.

Um die Beziehung der Knoten untereinander zu erklären bietet sich in der Mathematik eine Matrix an. Die Knoten weisen eine differenzierte Anzahl von Kanten auf und nicht alle Knoten sind miteinander verbunden. Die Adjazenz-Matrix beschreibt die Beziehung der Knoten untereinander. Eine solche Adjazenz-Matrix wird in der Gleichung 5.3 für das beschriebene Beispielnetzwerk aufgestellt. Sie beschreibt damit vollständig den Graphen, abgesehen von der grafischen Repräsentanz in der 2D-Darstellung.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Merke: Graphentheorie

In der Graphentheorie werden Netzwerke mit Kanten und Knoten beschrieben. Bei der Analyse der Netzwerke werden Wege und Zyklen definiert. Ein durchgehender Zyklus mit einem identischen Startpunkt und Endpunkt wird als Kreis bezeichnet.

2.4 Knoten, Zweig, Masche

Ein elektrisches Netzwerk besteht aus Knoten, Zweigen und Maschen. Ein Zweig verbindet genau zwei Knoten durch ein oder mehrere Schaltungselemente miteinander. Durch alle Elemente eines Zweiges fließt der gleiche Strom. In Abbildung 5.7 existieren drei Zweige. Ein Zweig mit den Komponenten R_1, R_5 und $U_{\mathrm{q}1}$, ein Zweig mit dem Widerstand R_4 und ein Zweig mit den Komponenten R_2, R_3 und $U_{\mathrm{q}2}$.

Ein Knoten ist ein Punkt, an dem mindestens drei Anschlüsse der Schaltungselemente zusammenlaufen. Der Strom kann sich hier also aufteilen. Das elektrische Potential ist hierbei für alle verbundenen Anschlüsse identisch. Im Schaltplan wird ein Knoten durch einen ausgefüllten Kreis gekennzeichnet. Sind jedoch zwei oder mehrere dieser Kreise nur durch eine Leitung miteinander verbunden, handelt es sich um einen einzigen Knoten, da das Potential auch hier gleich ist. Ein Knoten wird mit K_n bezeichnet.

Eine Masche ist ein geschlossener Weg, der aus mindestens zwei Zweigen besteht. In dem Netz in Abbildung 5.7 können drei Maschen definiert werden:

- M_1 bestehend aus R_1, R_4, R_5 und $U_{\mathrm{q}1}$
- M_2 bestehend aus R_2, R_3, R_4 und $U_{\mathrm{q}2}$
- M_3 bestehend aus R_1, R_2, R_3, $U_{\mathrm{q}2}$, R_5 und $U_{\mathrm{q}1}$

Eine Masche wird mit M_n bezeichnet. Die Umlaufrichtung ist dabei von Bedeutung und wird mit einem Pfeil gekennzeichnet.

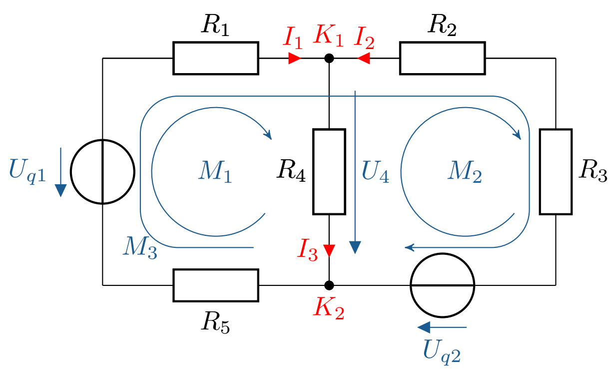


Abbildung 5.7: **Gleichstromnetzwerk.** Netzwerk mit Knoten, Zweigen und Maschen

Merke: Knoten, Zweige und Maschen

Elektrische Netzwerke werden analog zur Graphentheorie durch Knoten, Zweige und Maschen beschrieben.

2.5 Der vollständige Baum

Für die weitere Analyse des Netzwerkes ist es notwendig, die Netzwerkgleichungen zu ermitteln. Dieses lineare Gleichungssystem ist aber immer überbestimmt, weshalb es nötig wird, die Anzahl der Gleichungen zu reduzieren. Dabei ist es wichtig, die linear abhängigen Gleichungen zu identifizieren und zu eliminieren.

Die Knoten, Zweige und Maschen eines Netzwerkes können in einem Graph dargestellt werden, der nur die Verbindungen untereinander darstellt. Zur Darstellung des Graphen werden alle Zweige als Linien dargestellt, welche die Knoten verbinden. Der Inhalt des Zweiges ist dafür irrelevant. In Abbildung 5.8 ist ein beispielhaftes Netz mit dem sich ergebenden Graphen dargestellt.

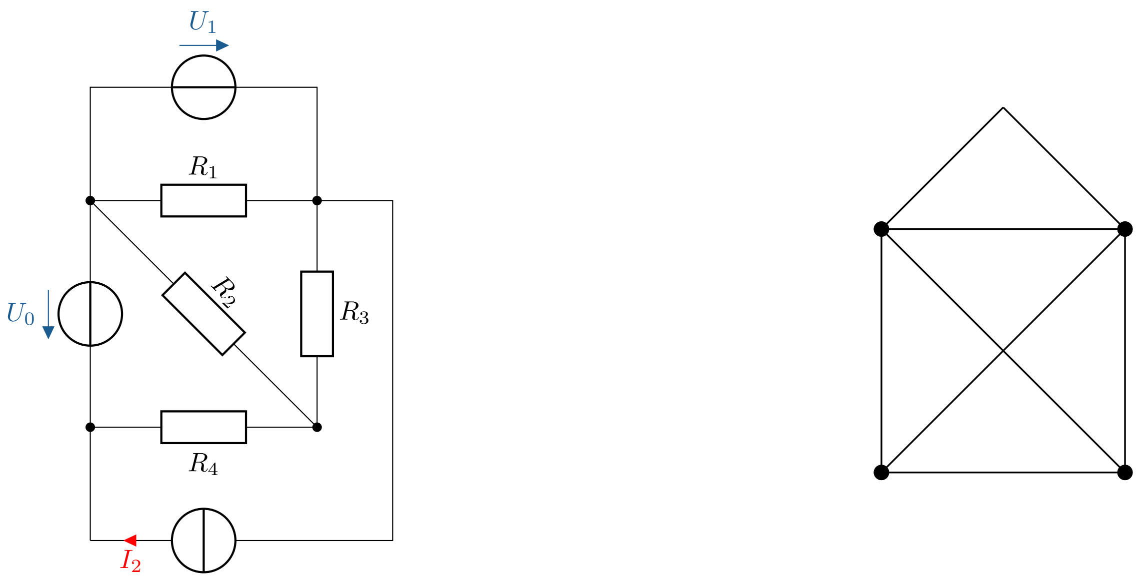


Abbildung 5.8: **Gleichstromnetzwerk und Graph.** Erzeugung des Graphen aus einem zu berechnenden Netzwerk

In diesem Graph kann ein vollständiger Baum aufgezeichnet werden, der alle Knoten enthält, aber selbst keine Masche bildet. Die Baumzweige verbinden also alle Knoten miteinander, bilden aber keine geschlossene Linie. Die Baumzweige können Abzweigungen bilden, ein Knoten kann also auch mehr als zwei Baumzweige berühren. In größeren Netzwerken gibt es mehrere Möglichkeiten für einen vollständigen Baum, die prinzipiell gleichwertig sind. Bei der Vorstellung der verschiedenen Berechnungsverfahren werden aber abhängig vom Verfahren bestimmte Kombinationen bevorzugt. Ein vollständiger Baum beinhaltet genau $k-1$ Zweige.

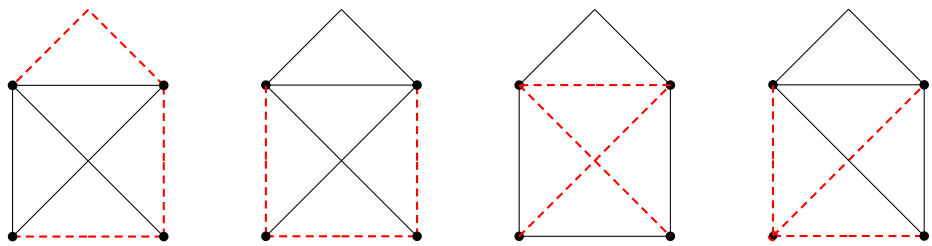


Abbildung 5.9: **Beispielbäume.** Beispiele für verschiedene in rot gezeichnete vollständige Bäume eines Netzes

Die Zweige, die zum Baum gehören, werden Baumzweige (rot), die anderen Verbindungszweige (schwarz) genannt. Um die linear unabhängigen Maschen zu finden, wird zu jedem Verbindungszweig eine Masche gebildet, die außer dem Verbindungszweig nur Baumzweige enthält.

- Ein Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten enthält $z - k + 1$ Verbindungszweige.

Merke: Der vollständige Baum

Mithilfe eines vollständigen Baumes werden alle Knoten miteinander durch Baumzweige verbunden. Es ergeben sich dabei immer k - 1 Baumzweige. Der vollständige Baum bildet keine Masche.

2.6 Knotenregel

Treffen sich mehr als zwei Leitungen an einem Punkt eines elektrischen Netzwerkes handelt es sich um einen Knotenpunkt K. Die Pfeilrichtung aus der Sicht des Knotens bestimmt das Vorzeichen des Stromes. Führt ein Strom in einen Knoten hinein, so zeigt der Strompfeil auf den Knoten und es handelt sich um eine Einströmung. Zeigt der Strompfeil aus dem Knoten heraus, wird der Strom aus dem Knoten herausgeführt und es handelt sich um eine Ausströmung. Die Knotenanalyse ergibt sich aus dem 1. Kirschhoff'schen Gesetz, welches besagt: Die Summe aller Ströme an einem Knoten ist Null (Gleichung 5.4). Dieses Gesetz folgt direkt aus der Kontinuitätsgleichung (vgl. Abschnitt Stromdichte im freien Raum)

$$\sum_{k=1}^{N} I_\mathrm{k} = 0 \tag{5.4}$$

So müssen sich für jeden Knoten die Summe der Stromstärken aus Einströmungen und Ausströmungen gegenseitig ausgleichen. In der Abbildung 5.10 sind ein Knoten K und die Ein- und Ausströmungen eingezeichnet. Bei den Strömen I_1 und I_2 handelt es sich um Einströmungen. Die drei Ströme I_3, I_4 und I_5 sind Ausströmungen.

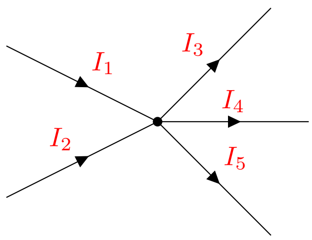


Abbildung 5.10: **Beispielknoten.** Knoten für die Knotenanalyse mit zwei einströmenden und drei ausströmenden Zweigen.

Werden die Ströme nacheinander aufgetragen und gleich Null gesetzt, ergibt sich die Gleichung 5.5. Je nachdem ob es sich um eine Einströmung oder eine Ausströmung handelt, wird das Vorzeichen gewählt. Einströmungen werden mit einem positiven und Ausströmungen mit einem negativen Vorzeichen behaftet.

$$\sum_{k=1}^{N} I_\mathrm{k} = 0 = I_1 + I_2 - I_3 - I_4 - I_5 \tag{5.5}$$

Merke: Knotenregel

Die Summe der zufließenden Ströme ist gleich der Summe der abfließenden Ströme oder die Summe aller Ströme an einem Knoten ist Null:

$$\sum_{k=1}^{N} I_{\mathrm{k}} = 0 \tag{5.6}$$

2.7 Maschenregel

Bewegt sich ein Teilchen zwischen zwei Punkten in einem elektrischen Feld, wird Arbeit verrichtet. Ist der Startpunkt identisch mit dem Endpunkt, muss ebenso viel Arbeit abgegeben wie aufgenommen werden. Die Summe der Arbeit ist in diesem Fall gleich Null. Wenn so ein kompletter Maschenumlauf entlang einer geschlossenen Strecke vollzogen wird, muss die Summe der Teilspannungen ebenfalls gleich Null sein. Vorausgesetzt wird hier, dass sich keine zeitlich veränderte magnetische Flussdichte ergibt und somit kein elektrisches Wirbelfeld entsteht (vgl. Gleichung 5.7). Die Gleichung beschreibt hier das Faradaysche Induktionsgesetz für statische Felder (hier: keine Änderung eines Magnetfeldes).

$$\oint_{s} \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \rightarrow \quad rot\vec{E} = 0 \tag{5.7}$$

Die Maschenanalyse besagt nach der 2. Kirchhoffschen Regel, dass bei einem vollständigen Umlauf (Masche) in einem elektrischen Netzwerk die Summe aller Spannungen gleich Null ist. Dies wird durch die Gleichung 5.8 verdeutlicht.

$$\sum_{k=1}^{N} U_{\mathrm{k}} = 0 \tag{5.8}$$

Innerhalb einer Masche werden die Spannungen mit einer gleichgerichteten Pfeilrichtung positiv gezählt, Spannungen mit der Umlaufrichtung entgegengesetzten Pfeilrichtung werden negativ gezählt. Ausgehend von den Stromverläufen und Potentialen aus der Abbildung 5.11 können die Spannungen der jeweiligen Zweige ermittelt werden. Oberhalb der Parallelschaltung der Widerstände gibt es keine Potentialdifferenz. Selbiges gilt für die elektrische Verbindung unterhalb der Parallelschaltung. Der Strom I_{R1} fließt durch den Widerstand R_1. So ergibt sich nach dem ohmschen Gesetz die Spannung U_{R1} über R_1. Äquivalent wird die Spannung U_{R2} über R_2 bestimmt.

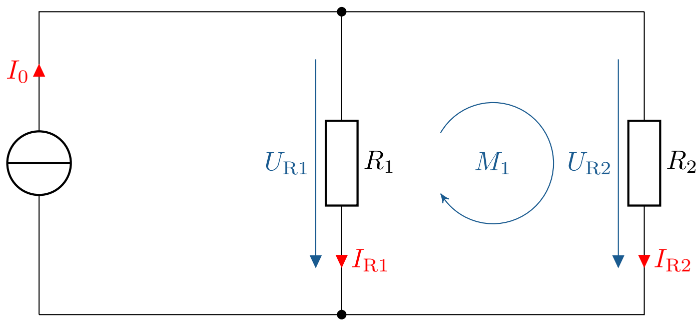


Abbildung 5.11: **Beispielnetzwerk mit einer Stromquelle und zwei parallelen Widerständen.** In der Masche M_1 müssen die Spannungen U_{R1} und U_{R2} identisch sein und sich ensprechend ihrer Richtungen in der Masche aufheben.

Gemäß des vorgestellten Netzwerkes und der Richtung der eingezeichneten Masche M_1 stellt sich der Zusammenhang nach Gleichung 5.9 ein. Die Spannung U_{R2} verläuft in derselben Richtung, wie die eingezeichnete Masche und wird mit einem positiven Vorzeichen behaftet. Die Spannung U_{R1} verläuft gegenläufig der Masche M_1 und wird somit negativ. In Summe müssen diese beiden Spannungen null ergeben.

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{N} U_{\mathrm{k}} = +U_{\mathrm{R2}} - U_{\mathrm{R1}} = 0 \tag{5.9}$$

Merke: Maschenregel

In einer Masche ist die Summe aller Teilspannungen gleich Null:

$$\sum_{k=1}^{N} U_k = 0 \tag{5.10}$$

2.8 Knoten- und Maschenanalyse

Bei der Knoten- und Maschenanalyse wird das vollständige Gleichungssystem bestehend aus Knoten- und Maschengleichungen aufgestellt und anschließend gelöst. Das Verfahren ist einfach, erzeugt jedoch für ein Netzwerk eine Anzahl Gleichungen, die der Anzahl der Zweige entspricht. Das Verfahren hat den folgenden Ablauf:

1. Vereinfachen des Netzwerkes.
2. Einzeichnen aller Strompfeile und Erstellen des Graphen.
3. Aufstellen von $k-1$ Knotengleichungen. Eine beliebige Knotengleichung kann weggelassen werden, da in einem Netzwerk mit k Knoten nur $k-1$ Knotengleichungen linear unabhängig voneinander sind. Prinzipiell ist es egal, welche Knotengleichung unberücksichtigt bleibt. Am geschicktesten wird die komplizierteste Gleichung gestrichen.
4. Aufstellen der $m = z - k + 1$ linear unabhängigen Maschengleichungen. Dabei werden die Gleichungen mit Hilfe des vollständigen Baumes erstellt.
5. Lösen des Gleichungssystems mit der Dimension z.
6. Ggfs. rückgängig machen von Schritt 1.

Es wird folgendes Beispielnetzwerk betrachtet:

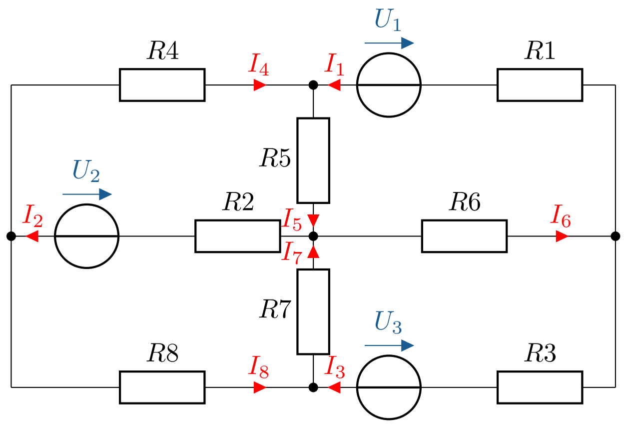


Abbildung 5.12: **Beispielnetzwerk zur Knoten- und Maschenanalyse.**

Der zugehörige Graph und die damit festgelegten Maschen werden in der Abbildung 5.13 dargestellt. Eine andere Aufstellung der Maschen ist möglich. Wie gezeigt, können Maschen auch über Zweige hinaus reichen.

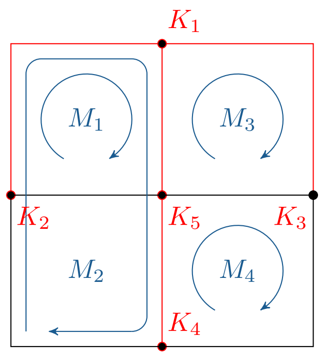


Abbildung 5.13: **Graph mit Maschen zum Beispiel.** Die Baumzweige werden rot und die Maschen blau gefärbt.

Das Netzwerk hat $z = 8$ Zweige, $k = 5$ Knoten. Es müssen daher $k - 1 = 4$ Knotengleichungen und $z - k + 1 = 4$ Maschengleichungen aufgestellt werden. Knoten 5 hat vier Zweige, die anderen nur drei. Daher wird die Knotengleichung von Knoten 5 weggelassen.

$$
\begin{aligned}
K_1 :&\quad I_1 + I_4 - I_5 = 0 \\
K_2 :&\quad I_2 - I_4 - I_8 = 0 \\
K_3 :&\quad -I_1 - I_3 + I_6 = 0 \\
K_4 :&\quad I_3 - I_7 + I_8 = 0 \\
M_1 :&\quad R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_5 I_5 - U_2 = 0 \\
M_2 :&\quad R_4 I_4 + R_5 I_5 - R_7 I_7 - R_8 I_8 = 0 \\
M_3 :&\quad -R_1 I_1 - R_5 I_5 - R_6 I_6 + U_1 = 0 \\
M_4 :&\quad R_3 I_3 + R_6 I_6 + R_7 I_7 - U_3 = 0
\end{aligned}
$$

Um das Gleichungssystem einfacher lösen zu können, und die Übersichtlichkeit zu erhöhen, kann es in Matrizenschreibweise dargestellt werden. Mit etwas Übung kann auch sofort die Matrizenschreibweise benutzt werden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & R_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & 0 & -R_7 & -R_8 \\ -R_1 & 0 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & R_7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ -U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem 8. Ordnung kann nun prinzipiell mit den aus der Mathematik bekannten Verfahren gelöst werden. Das wollen wir aber hier nicht tun, da im folgenden einfachere Verfahren vorgestellt werden, die besser zu berechnen sind.

Beispiel 5.1: Netzwerkanalyse

Gegeben ist das elektrische Netzwerk nach Abbildung 5.14. Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

a) Einzeichnen der Ströme und Spannungen
b) Aufstellen der Knotengleichungen
c) Aufstellen der Maschengleichung M_1
d) Aufstellen der Maschengleichung M_2 ohne den Ausdruck U_1

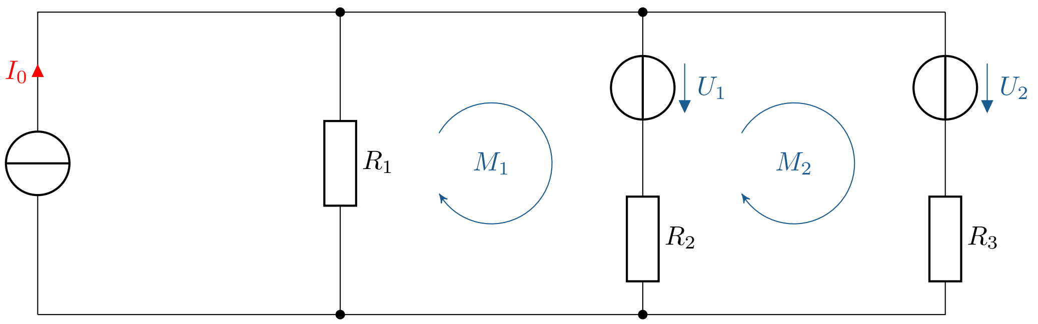
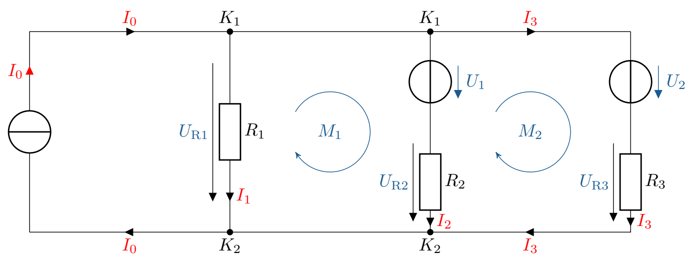


Abbildung 5.14: **Beispiel.** Netzwerkanalyse mit Kirchhoffschen Regeln.

a) Angabe der Ströme und Spannungen:



b) Knotengleichungen:

$$
\begin{aligned}
K_1 &: I_0 - I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\
K_2 &: -I_0 + I_1 + I_2 + I_3 = 0
\end{aligned}
$$

c) Aufstellen der Maschengleichung M_1 und M_2:

$$
\begin{aligned}
M_1 &: U_1 + U_{\mathrm{R2}} - U_{\mathrm{R1}} = 0 \\
M_2 &: U_2 + U_{\mathrm{R3}} - U_{\mathrm{R2}} - U_1 = 0
\end{aligned}
$$

d) Aufstellen der Maschengleichung M_2 ohne den Ausdruck U_1

$$
\begin{aligned}
M_1 &: U_1 = U_{\mathrm{R1}} - U_{\mathrm{R2}} \\
M_2 &: U_2 + U_{\mathrm{R3}} - U_{\mathrm{R2}} - (U_{\mathrm{R1}} - U_{\mathrm{R2}}) = 0 \\
M_2 &: U_2 + U_{\mathrm{R3}} - \cancel{U_{\mathrm{R2}}} - U_{\mathrm{R1}} + \cancel{U_{\mathrm{R2}}} = 0 \\
M_2 &: U_2 + U_{\mathrm{R3}} - U_{\mathrm{R1}} = 0
\end{aligned}
$$

3 Superpositionsprinzip

Nach der grundsätzlichen Analyse von Maschen und Knoten in elektrischen Netzwerken werden folgend zunehmend kompliziertere elektrische Netzwerke betrachtet. Hierzu wird das Überlagerungsverfahren nach Helmholtz verwendet. Das Überlagerungsverfahren wird auch als Superpositionsprinzip bezeichnet. Beim Superpositionsprinzip werden nacheinander alle Quellen einzeln ausgewertet und die Ergebnisse der einzelnen Berechnungen überlagert.

Lernziele: Superpositionsprinzip

Die Studierenden

- verstehen die Bedingungen der Systemtheorie für die Analyse von Gleichstromnetzwerken.
- können den Überlagerungssatz (das Superpositionsprinzip) auf elektrische Netzwerke anwenden.

3.1 Exkurs Systemtheorie

Wird in einem Modell lediglich das Einganssignal und das Ausgangssignal betrachtet, wird von einer Blackbox gesprochen. Hier ist keinerlei Information darüber gegeben, was zwischen diesen beiden Signalen passiert. Die Abbildung 5.15 beschreibt so ein Modell. Hier wird eine Black Box betrachtet, welche als Eingansgröße F_E und als Ausgangsgröße F_A aufweist. In der Blackbox wird das Eingangssignal in das Ausgangssignal transformiert. Das Bildnis insgesamt wird als System bezeichnet.

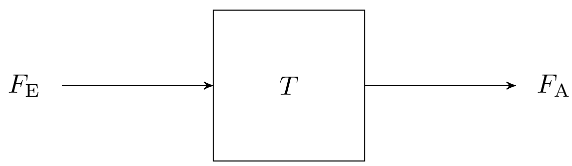


Abbildung 5.15: **Blackbox in der Systemtheorie.** Eine Blackbox mit linksseitiger Eingangsgröße und rechtsseitiger Ausgangsgrößen.

Ausgehend von der vorgestellten Blackbox lässt sich das Ausgangssignal F_A in der Abhängigkeit des Eingangssignals F_E bestimmen. Diese Transformation lässt sich durch die Gleichung 5.11 beschreiben.

$$F_\mathrm{A} = T(F_\mathrm{E}) \tag{5.11}$$

Ein elektrisches Netzwerk kann auch als solch ein System betrachtet werden. Das in der Abbildung 5.16 dargestellte elektrische Netzwerk verfügt über eine Eingangsspannung U_E als Eingangsgröße und eine Ausgangsspannung U_A als Ausgangsgröße. Die Blackbox, welche das zu transformierende System abbildet, setzt sich aus den beiden Widerständen R_1 und R_2 zusammen.

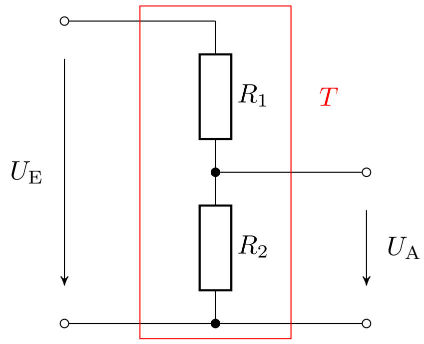


Abbildung 5.16: **Spannungsteiler als Blackbox.** Betrachtung eines elektrischen Netzwerkes als Blackbox mit Eingangsspannung und Ausgangsspannung.

Der Zusammenhang der Abhänigkeit des Ausgangssignals eines Systems vom Eingangssignal aus Gleichung 5.11 gilt weiterhin. Das Ausgangssignal lässt sich als Transformation des Eingangssignales wie in der Gleichung 5.12 beschreiben. Das Ausgangssignal ist gleich der Spannung, welche über dem Widerstand R_2 abfällt. Diese Spannung lässt sich aus dem Produkt der Eingangsspannung und dem Widerstandsverhältnis berechnen. Dieser Zusammenhang wurde auch bereits beim Spannungsteiler im Kapitel 4 behandelt.

$$U_{\mathrm{A}} = T(U_{\mathrm{E}}) = U_{\mathrm{E}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{5.12}$$

Kausalität

Beruht eine Ausgangsgröße ausschließlich aus der Transformation einer Eingangsgröße, so ergibt sich ein direktes Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung. Dies bedingt auch, dass die Ausgangsgröße vor einer Anregung keine sich ändernde Systemantwort liefert. Ein System, in welchem diese Bedingungen vorherrschen, wird als kauseles System bezeichnet (vgl. Abbildung 5.17). So zeigt beispielsweise eine Gleichspannungsanregung eines Systems eine zeitlich indifferente Gleichstromantwort. Ein System, welches sich anders verhält, wird als nicht kausales Systeme bezeichnet. Wenn für $t < t_0$ der Wert des Eingangssignals Null ist, muss der Wert des Ausgangssignals für denselben Zeitraum ebenfalls Null sein, damit es die Bedingungen eins kausalen Systems erfüllt.

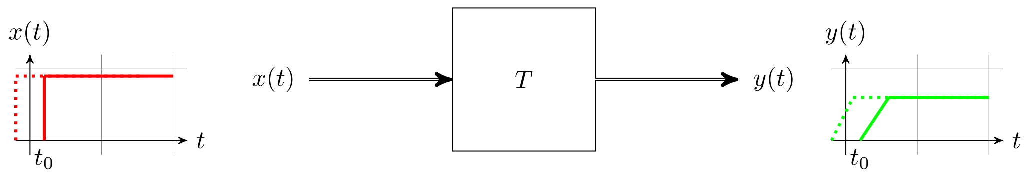


Abbildung 5.17: **Transformation eines kausalen Systems.** Aus $x(t)$ transformiertes System zu $y(t)$ für ein kausales System.

Zeitinvarianz

Reagiert das Ausgangssignal eines Systems zeitlich immer gleich auf ein Eingangssignal, so wird von einem zeitinvarianten Systemen gesprochen. Verschiebt sich der Zeitpunkt des Eingangssignals beispielsweise um t_0, so muss weiterhin bei zeitinvarianten Systemen das Ausgangssignal immer gleich, ausgehend vom Eingangssignal, reagieren.

Die Stabilität eines Systems beschreibt ebenfalls einen Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal und dem Ausgangssignal. Stellt sich bei einem Eingangssignal mit endlicher Amplitude ein nicht über alle Grenzen wachsendes Ausgangssignal ein, ist das System stabil. Wächst das Ausgangssignal nach der Inaktivierung des Eingangssignales weiter, ist das Systen instabil.

$$T(\alpha \cdot u_e) = \alpha \cdot T(u_e) \tag{5.13}$$

Linearität

Ist die Reaktion des Ausgangssignals zu der Anregung des Eingangssinals proportional, wird das System als **lineares** System beschrieben (Gleichung 5.13). Wirken zwei überlagerte Eingangssignale in ein System, so können sie in diesem Fall separat betrachtet und aufsummiert werden. Auf diese Weise können auch die Transformationen der Eingangssignale, wie in der Gleichung 5.14, getrennt betrachtet werden.

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \tag{5.14}$$

Systeme, die sowohl zeitinvariant, als auch linear sind, werden als LTI-Systeme (Linear Time Invariant) bezeichnet. Die Systeme in diesem betrachteten Modul werden in Näherung als LTI-Systeme betrachtet. Bauelemente, welche Nichtlinearitäten aufweisen, werden beispielsweise im Kapitel über periodische Größen behandelt.

Merke: LTI-Systeme

LTI-Systeme stellen lineare und zeitinvariante Systeme dar. Gleichstromnetzwerke müssen als LTI-Systeme betrachtet werden, damit der Überlagerungssatz auf sie angewendet werden kann.

3.2 Überlagerungssatz

Sind die elektrischen Netzwerke als betrachtete Systeme auf ihre vorhandene Linearität geprüft, kann der Überlagerungssatz angewendet werden. Hier können verschiedene Quellen von einander getrennt betrachtet werden. Auf diese Weise werden beim Überlagerungssatz alle Quellen ausgeschaltet und reihenweise die einzelnen Quellen eingeschaltet. Beim Ausschalten von Quellen werden Stromquellen und Spannungsquellen verschieden umgewandelt. Beim Ausschalten einer idealen Spannungsquelle entsteht nach Abbildung 5.18 am Ort der Spannungsquelle ein Kurzschluss.

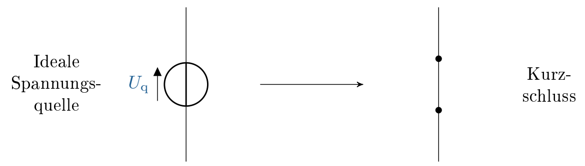


Abbildung 5.18: **Umwandlung einer Spannungsquelle.** Wird eine Spannungsquelle deaktiviert, verbleibt ein Kurzschluss. Mit diesem Kurzschluss erfolgt die weitere Netzwerkberechnung.

Eine Stromquelle hinterlässt beim Ausschalten lediglich offene Klemmen (Abbildung 5.19). Dieser Leerlauf verhindert die weitere Betrachtung dieses Pfades im Netzwerk.

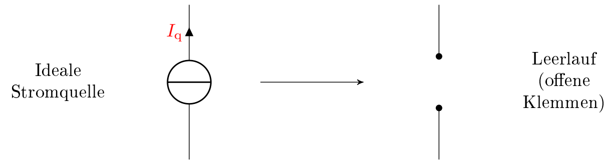


Abbildung 5.19: **Umwandlung einer Stromquelle.** Die Deaktivierung einer Stromquelle hinterlässt offene Klemmen.

Merke: Umwandlung von Quellen

Beim Ausschalten von Spannungsquellen und Stromquellen hinterlassen deaktivierte Spannungsquellen einen Kurzschluss und deaktivierte Stromquellen einen Leerlauf.

Sind bis auf eine Quelle alle anderen Quellen ausgeschaltet, wird das elektrische Netzwerk für die übriggebliebene Quelle analysiert. Das wird dann aufeinanderfolgend mit jeder Quelle durchgeführt. Am Ende werden die Einzelwirkungen als Summe betrachtet. Beispielsweise lässt sich der Strom I_R durch einen Widerstand R, welcher von zwei Quellen Q_1 und Q_2 versorgt wird, durch die Summe der Teilströme der beiden Quellen erklären (vgl. Gleichung 5.15).

$$I_R = f(Q_1,Q_2) \tag{5.15}$$

Zur Verdeutlichung des Überlagerungssatzes wird in der Abbildung 5.20 ein elektrisches Netzwerk mit zwei Spannungsquellen und drei Widerständen abgebildet. Um dieses Netzwerk mit mehr als einer Quelle zu berechnen, wird das Netzwerk für beide Spannungsquellen einzeln betrachtet.

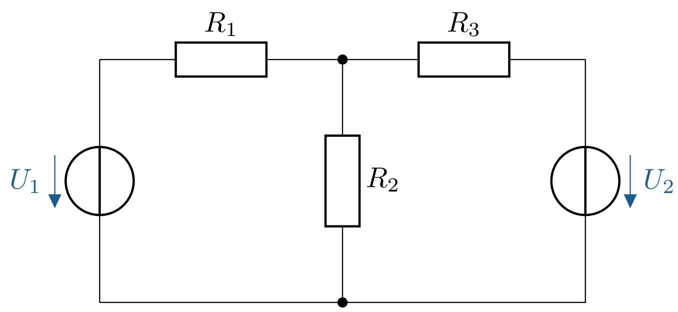


Abbildung 5.20: **Elektrisches Netzwerk mit zwei Spannungsquellen zur Erklärung des Überlagerungssatzes.** Die Spannungsquellen sollen nacheinander für das elektrische Netzwerk analysiert werden.

Das vorgestellte elektrische Netzwerk wird in der Abbildung 5.21 noch einmal jeweils für die Berechnung der beiden Spannungsquellen seperat angezeigt. Für die Netzwerkbetrachtung mit der Spannungsquelle U_1 wird die Spannungsquelle U_2 kurzgeschlossen. Die beiden Widerstände R_2 und R_3 liegen nun parallel zueinander. Die Spannung von U_1 verteilt sich nun über R_1 und die Parallelschaltung R_{23}. Äquivalent dazu wird bei der Betrachtung des Netzwerkes für die Spannungsquelle U_2 die Spannungsquelle U_1 kurzgeschlossen. Nun bilden die beiden Widerstände R_1 und R_2 eine Parallelschaltung. Die Spannung der Spannungsquelle U_2 verteilt sich über die Parallelschaltung R_{12} und den Widerstand R_3.

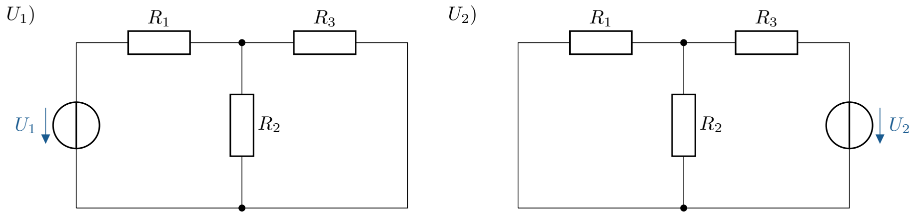


Abbildung 5.21: **Elektrisches Netzwerk mit zwei Spannungsquellen zur Erklärung des Überlagerungssatzes.** Links wird das Netzwerk für die Analyse der Spannungsquelle U_1 und rechts für die Spannungsquelle U_2 gezeigt.

In der Gleichung 5.16 und der Gleichung 5.17 werden die Spannungen für die beiden Spannungsquellen U_1 und U_2 am Widerstand R_3 separat bestimmt. In der Gleichung 5.18 werden die beiden Spannungen über den Widerstand R_3 dann nach dem Überlagerungssatz aufsummiert.

$$U_{\mathrm{R3}}(U_1) = U_1 \cdot \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} \tag{5.16}$$

$$U_{\mathrm{R3}}(U_2) = U_2 \cdot \frac{R_{12}}{R_3 + R_{12}} \tag{5.17}$$

$$U_{\mathrm{R3}} = U_{\mathrm{R3}}(U_1) + U_{\mathrm{R3}}(U_2) \tag{5.18}$$

Merke: Überlagerungssatz

Lineare und zeitlich invariante elektrische Netzwerke mit mehr als einer Quelle können als Summe der Teilanalysen von jeder einzelnen Quelle bestimmt werden.

Beispiel 5.2: Superpositionsverfahren

Gegeben ist das elektrische Netzwerk nach Abbildung 5.22. Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

Anwendung des Superpositionsverfahrens (Überlagerungssatz):

a) Einzeichnen der Ströme und Spannungen

b) Netzwerkberechnung I_3 für U_g

c) Netzwerkberechnung I_3 für I_g

d) Wie groß ist der Strom I_3

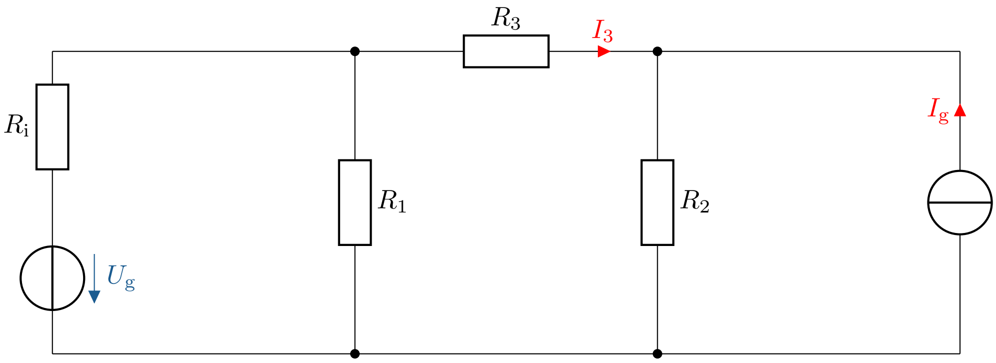
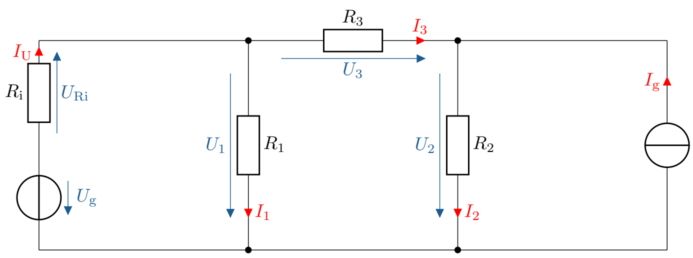
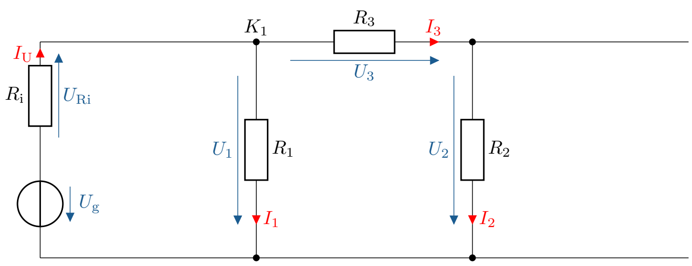


Abbildung 5.22: **Beispiel.** Netzwerkanalyse mit Kirchhoffschen Regeln.

a) Angabe der Ströme und Spannungen:

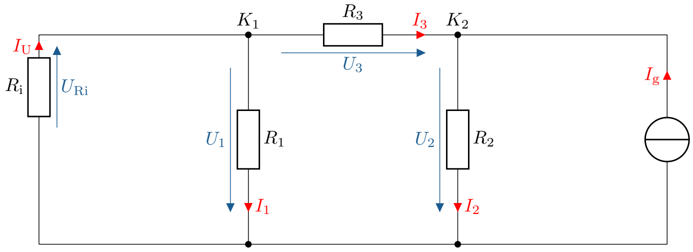


b) Netzwerkberechnung $I_3(U_g)$ für U_g:



$$K_1 : I_{\text{ges}} = I_1 + I_3$$
$$I_{\text{ges}} = \frac{U_{\text{g}}}{R_{\text{ges}}} = \frac{U_{\text{g}}}{R_{\text{i}} + \frac{R_1 \cdot (R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}}$$
$$\frac{I_3}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$
$$I_3(U_{\text{g}}) = I_{\text{ges}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U_{\text{g}}}{R_{\text{i}} + \frac{R_1 \cdot (R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}$$

c) Netzwerkberechnung $I_3(I_{\text{g}})$ für I_{g}:



$$K_2 : I_{\text{ges}} = I_{\text{g}} = I_2 - I_3$$
$$\frac{-I_3}{I_{\text{ges}}} = \frac{R_2}{(R_1||R_{\text{i}}) + R_2 + R_3}$$
$$I_3(I_{\text{g}}) = -I_{\text{g}} \cdot \frac{R_2}{(R_1||R_{\text{i}}) + R_2 + R_3}$$

d) Wie groß ist der Strom $I_3(U_{\text{g}}, I_{\text{g}})$?

Superposition:

$$I_3(U_{\text{g}}, I_{\text{g}}) = I_3(U_{\text{g}}) + I_3(I_{\text{g}})$$
$$I_3(U_{\text{g}}, I_{\text{g}}) = \frac{U_{\text{g}}}{R_{\text{i}} + \frac{R_1 \cdot (R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} + (-I_{\text{g}} \cdot \frac{R_2}{(R_1||R_{\text{i}}) + R_2 + R_3})$$

4 Knotenpotentialverfahren

Die Analyse eines elektrischen Netzwerkes kann mitunter aufwendig werden. Mit größer werdendem Netzwerk steigt auch der Aufwand zur Analyse. Auch reichen unter Umständen die bisher vorgestellten Analysemethoden zu Knoten- und Maschenanalyse nicht aus, um alle Größen eines elektrischen Netzwerkes zu bestimmen. Hier bietet das Knotenpotentialverfahren eine Möglichkeit zur Analyse. Beim Knotenpotentialverfahren werden ausgehend von einem Bezugspotential, mit der Zuordnung 0V, alle übrigen Potentiale bestimmt. Mithilfe des Knotenpotentialverfahrens wird folgend das elektrische Netzwerk aus der Abbildung 5.23 analysiert.

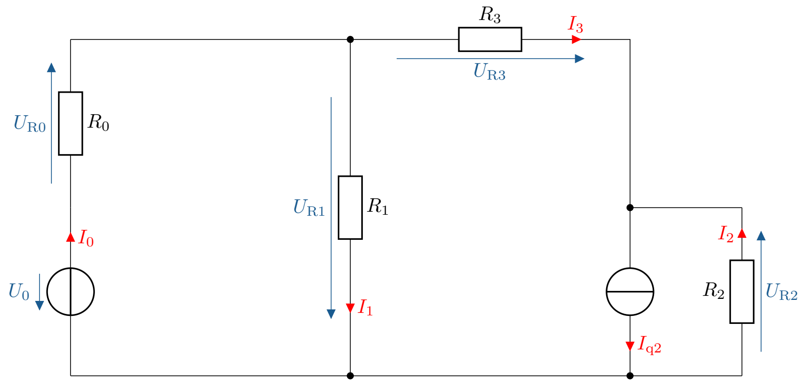


Abbildung 5.23: **Netzwerk für das Knotenpotentialverfahren.** Elektrisches Netzwerk mit einer Spannungsquelle, einer Stromquelle und vier Widerständen. Anhand des Netzwerkes wird das Knotenpotentialverfahren erläutert.

Lernziele: Knotenpotentialverfahren

Die Studierenden

- kennen die Schritte des Knotenpotentialverfahrens.
- können mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens elektrische Netzwerke analysieren.

4.1 Vorbereitung des Netzwerkes

Das Knotenpotentialverfahren arbeitet mit Stromquellen und Leitwerten. Das vorgestellte Netzwerk weist neben der Stromquelle eine Spannungsquelle und Widerstandswerte auf. Diese gilt es umzuwandeln. Die Spannungsquelle wird wie in der Abbildung 5.24 zu einer Stromquelle transformiert. Dabei wird aus dem Reihenwiderstand der Spannungsquelle ein Parallelwiderstand für die Stromquelle.

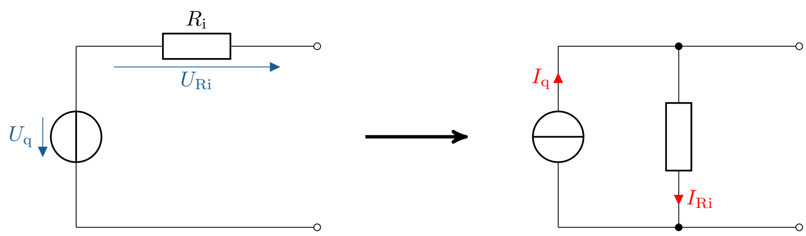


Abbildung 5.24: **Umwandlung einer Spannungsquelle.** Umwandlung einer Spannungsquelle mit Reihenwiderstand zur Stromquelle mit Parallelwiderstand.

Bei der Umwandlung der Spannungsquellen in Stromquellen müssen auch die Spannungswerte der Spannungsquellen in Stromwerte überführt werden. Dies erfolgt nach Gleichung 5.19.

$$I_\mathrm{q} = U_\mathrm{q} \cdot G_\mathrm{i} \tag{5.19}$$

Da bei dem Knotenpotentialverfahren nicht die Widerstandswerte der Komponenten verwendet werden, sondern die Leitwerte, werden alle Widerstandswerte nach Gleichung 5.20 in Leitwerte umgerechnet.

$$G_\mathrm{i} = \frac{1}{R_\mathrm{i}} \tag{5.20}$$

In der Abbildung 5.25 wird die Umwandlung der Spannungsquellen aus dem angegeben Netzwerk in eine äquivalente Stromquellen dargestellt. Aus der Spannungsquelle U_0 und dem Widerstand R_0 wird die Stromquelle $I_{\mathrm{q}0}$ und dazu der parallel liegende Leitwert G_0. Die restlichen Widerstände werden ebenfalls in Leitwerte überführt.

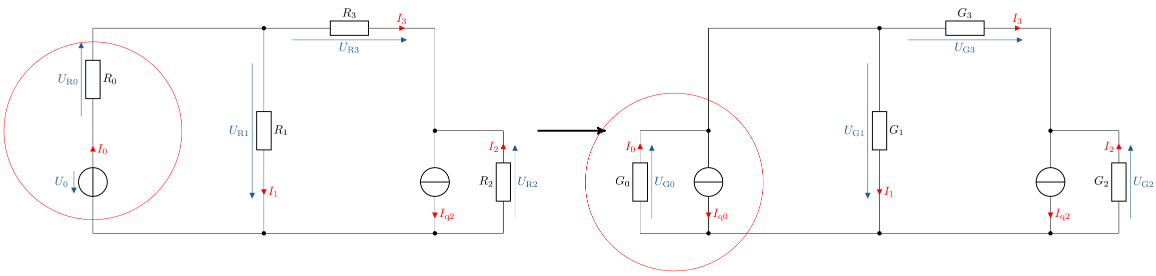


Abbildung 5.25: **Umwandlung des Netzwerkes für das Knotenpotentialverfahren.** Die Spannungsquelle U_0 wird zu der Stromquelle $I_{\mathrm{q}0}$, außerdem werden die Widerstandsangaben R zu Leitwerten G.

Merke: Knotenpotentialverfahren

Beim Knotenpotentialverfahren wird ein elektrisches Netzwerk mit Stromquellen und Leitwerten analysiert.

4.2 Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale

Nun müssen die Knoten bestimmt werden. Hierzu legen wir einen Bezugsknoten mit dem Index 0, also K_0, fest. Weiter werden alle Knoten fortlaufend nummeriert. Das elektrische Netzwerk mit den nummerierten Knoten wird in der Abbildung 5.26 abgebildet. Die eingezeichneten Knoten ohne Komponenten zwischen den nummerierten Knoten weisen das identische Potential auf und bilden somit einen Knoten.

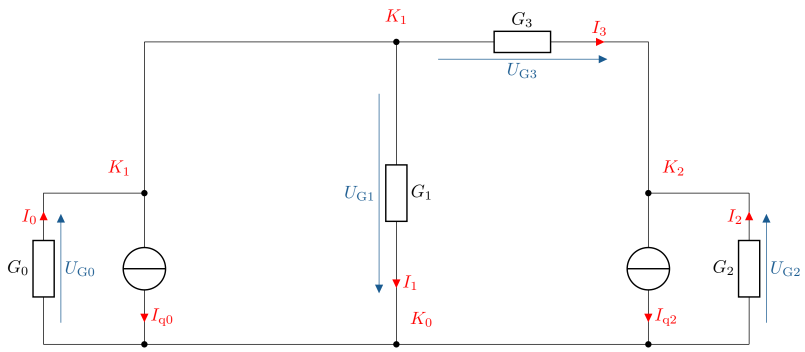


Abbildung 5.26: **Umgewandeltes Netzwerk.** Festlegung des Bezugsknotens K_0 und der fortlaufenden Knoten K_1 und K_2.

Um die Knotenpotentiale festzulegen, werden alle Potentiale der Knoten K_1 und K_2 auf den Bezugsknoten bezogen. Zur Durchführung des Knotenpotentialverfahrens werden $k-1$ Gleichungen benötigt. Auf das angegebene Netzwerk bezogen, ergeben sich somit zwei Gleichungen, welche in vektorieller Schreibweise nach Gleichung 5.21 notiert werden. Hier wird das Potential für den Knoten K_1 über die Spannung vom Knoten K_1 zum Bezugknoten definiert. Daraus ergibt sich die Notation $U_{\mathrm{K1-K0}}$. Selbiges wird für den Knoten K_2 durchgeführt. Hier wird die Spannung $U_{\mathrm{K2-K0}}$ definiert.

$$U_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} U_{\mathrm{K1-K0}} \\ \\ U_{\mathrm{K2-K0}} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

4.3 Zuordnung der Quellströme

Für die festgelegten Knoten, abgesehen vom Bezugsknoten, müssen die abfließenden und zufließende Ströme festgehalten werden. Jede Stromquelle an den Knoten wird notiert. Hier werden zufließende Stromquellen mit einem positiven Vorzeichen und abfließende Stromquellen mit einem negativen Vorzeichen versehen. Aus dem Knoten K_1 fließt der Strom der Stromquelle $-I_{\mathrm{q0}}$, dieser Strom wird mit einem negativen Vorzeichen versehen. Aus dem Knoten K_2 fließt der Strom der Stromquelle $-I_{\mathrm{q2}}$ heraus, dieser wird ebenfalls mit einem negativen Vorzeichen versehen. Nach Gleichung 5.22 ergibt sich der Vektor für die Quellströme.

$$I_{\mathrm{K}} = \begin{bmatrix} -I_{\mathrm{q0}} \\ \\ -I_{\mathrm{q2}} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

4.4 Leitwertmatrix

Nach der Umwandlung der Widerstandswerte in Leitwerte, wird mit den Leitwerten die Leitwertmatrix erstellt. Hierzu werden wieder die Knoten abgesehen vom Bezugsknoten untersucht. Hierfür wird das vorgestellte elektrische Netzwerk noch einmal in der Abbildung 5.27 mit farbig hervorgehobenen Zweigen gezeigt. Über die Hauptdiagonale werden die Leitwerte der Knoten notiert. Für jeden Knoten werden die Leitwerte der direkt angrenzenden Komponenten aufgeschrieben. Für den Knoten K_1 wären das die an dem blau hervorgehobenen Zweig angrenzenden Leitwerte G_0, G_1 und G_3 und für den Knoten K_2 die Leitwerte G_2 und G_3. Abseits der Hauptdiagonalen auf den anderen Elementen der Leitwertmatrix werden die Leitwerte protokolliert, welche direkt zwischen den Knoten liegen. Zwischen den Knoten K_1 und K_2 liegt auf direktem Wege der in grün hervorgehobenen Zweig mit dem Leitwert G_3. Liegen zwischen den betrachteten Knoten weitere Knoten, so sind diese nicht direkt miteinander Verbunden und in das Element der Leitwertmatrix wird eine 0 eingetragen. Die auf diese Weise angefertigte Leitwertmatrix wird in der Gleichung 5.23 veranschaulicht.

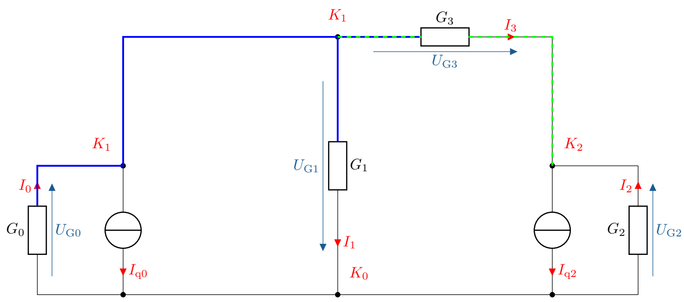


Abbildung 5.27: **Elektrisches Netzwerk mit hervorgehobenen Zweigen.** Erstellung der Leitwertmatrix für das Knotenpotentialverfahren

$$G_K = \begin{bmatrix} G_0 + G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

4.5 Gleichungssystem aufstellen

Nachdem der Vektor der Knotenpotentiale, der Vektor der Quellströme und die Leitwertmatrix bestimmt wurden, wird aus diesen Gleichungen das Gleichungssystem des Knotenpotentialverfahrens aufgestellt, welches in der Gleichung 4.5 angezeigt wird.

$$\begin{bmatrix} G_0 + G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{K1-K0} \\ U_{K2-K0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{q0} \\ -I_{q2} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

Das Gleichungssystem des Knotenpotentialverfahrens kann anschließend exemplarisch mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren gelöst werden. Durch das Umstellen der Gleichung nach den gesuchten Knotenpotentialen können diese identifiziert werden. Ist so beispielsweise in dem untersuchten Netzwerk die Spannung über den Widerstand R_1 berechnet worden, kann der Strom durch den Widerstand bestimmt werden. Als Alternative zum Gaußschen Eliminationsverfahren wäre noch die Cramersche Regel zu nennen um lineare Gleichungssysteme zu lösen.

Beispiel 5.3: Knotenpotentialverfahren

Analyse des elektrischen Netzwerk aus der Abbildung 5.28 mittels des Knotenpotentialverfahrens.

Die folgenden Schritte sollen für das Knotenpotentialverfahren bearbeitet werden:

a) Vorbereitung des Netzwerkes
b) Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale
c) Zuordnung der Quellströme
d) Aufstellung der Leitwertmatrix
e) Gleichungssystem aufstellen

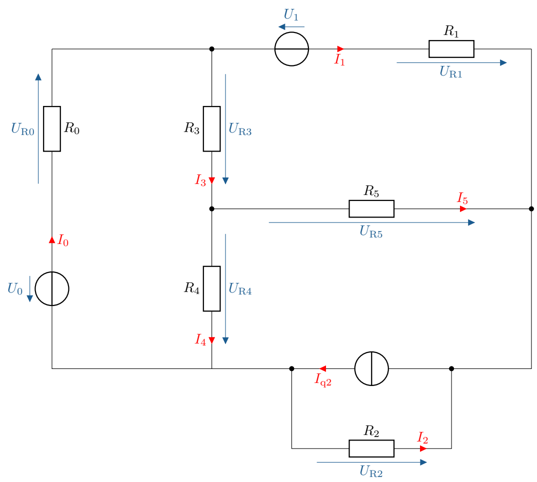
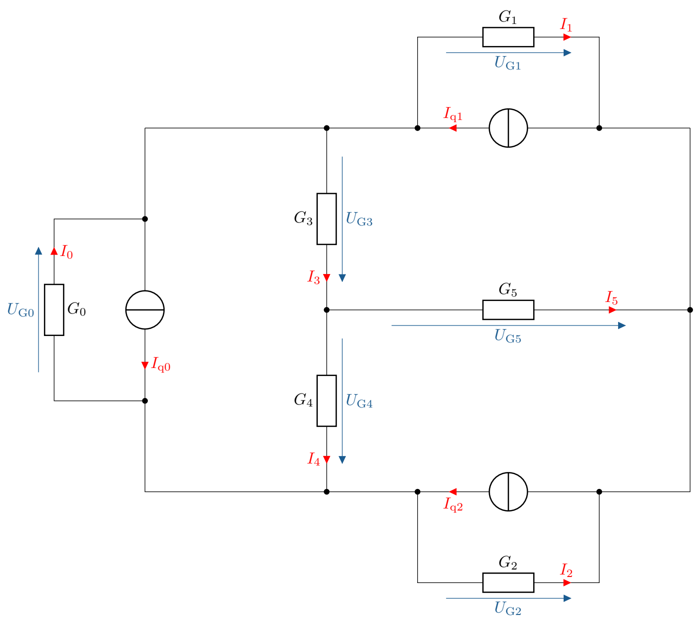
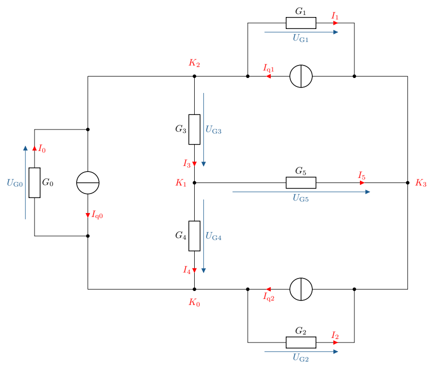


Abbildung 5.28: **Beispiel.** Knotenpotentialverfahren an einem elektrischen Netzwerk.

a) Vorbereitung des Netzwerkes:



b) Bestimmung der Knoten und der Knotenpotentiale:



$$U_\mathrm{K} = \begin{bmatrix} U_\mathrm{K1-K0} \\ U_\mathrm{K2-K0} \\ U_\mathrm{K3-K0} \end{bmatrix}$$

c) Zuordnung der Quellströme:

$$I_\mathrm{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_\mathrm{q0} + I_\mathrm{q1} \\ -I_\mathrm{q1} - I_\mathrm{q2} \end{bmatrix}$$

d) Bestimmung der Leitwertmatrix:

$$G_\mathrm{K} = \begin{bmatrix} G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 & -G_5 \\ -G_3 & G_0 + G_1 + G_3 & -G_1 \\ -G_5 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_5 \end{bmatrix}$$

e) Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{bmatrix} G_3 + G_4 + G_5 & -G_3 & -G_5 \\ -G_3 & G_0 + G_1 + G_3 & -G_1 \\ -G_5 & -G_1 & G_1 + G_2 + G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_\mathrm{K1-K0} \\ U_\mathrm{K2-K0} \\ U_\mathrm{K3-K0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_\mathrm{q0} + I_\mathrm{q1} \\ -I_\mathrm{q1} - I_\mathrm{q2} \end{bmatrix}$$

Lernziele: Maschenstromverfahren

Die Studierenden

- kennen die Schritte des Maschenstromverfahrens.
- können mit Hilfe des Maschenstromverfahrens elektrische Netzwerke analysieren.

5 Maschenstromverfahren

Neben der Knotenpotentialanalyse zur Untersuchung von elektrischen Netzwerken kann auch das Maschenstromverfahren zur Berechnung herangezogen werden. Beim Maschenstromverfahren wird ein Gleichungssystem aufgestellt, mit welchem die Maschenströme ermittelt werden können. Um das Gleichungssystem des Maschenstromverfahrens aufstellen zu können, müssen einige Vorbereitungen getroffen werden. In den folgenden Schritten soll das elektrische Netzwerk aus der Abbildung 5.29 mittels des Maschenstromverfahrens berechnet werden.

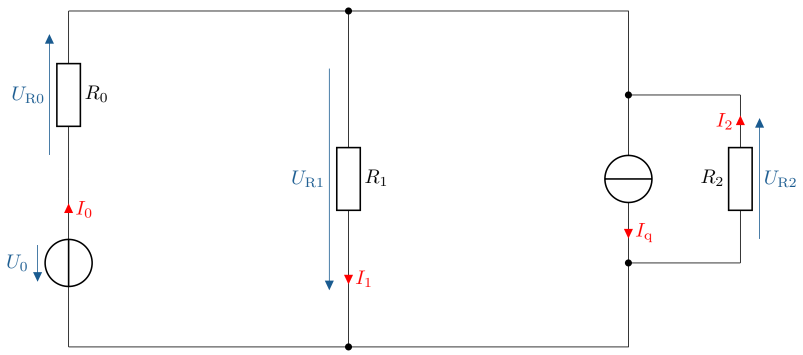


Abbildung 5.29: **Netzwerk für das Maschenstromverfahren.** Elektrisches Netzwerk mit einer Spannungsquelle, einer Stromquelle und drei Widerständen. Anhand des Netzwerkes wird das Maschenstromverfahren erläutert.

5.1 Vorbereitung des Netzwerkes

Das Maschenstromverfahren arbeitet mit Spannungsquellen und Widerstandswerten. Hierfür müssen eventuelle Stromquellen in Spannungsquellen transformiert werden. Diese Art der Umwandlung einer Stromquelle in eine Spannungsquelle wird noch einmal in der Abbildung 5.30 dargestellt. Hier wird aus der Stromquelle und dem parallel liegenden Innenwiderstand eine Spannungsquelle mit einem in reihe liegenden Innenwiderstand.

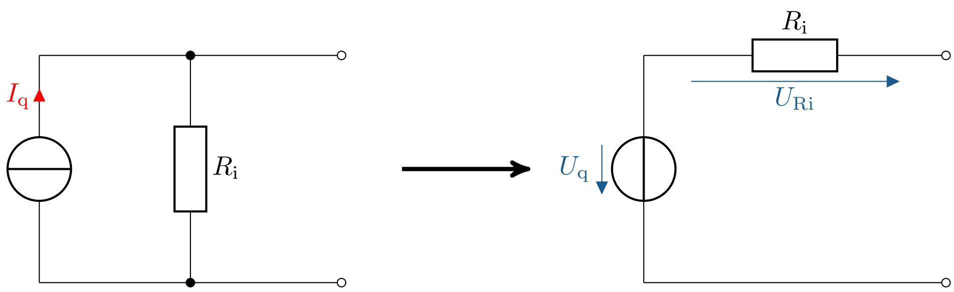


Abbildung 5.30: **Umwandlung einer Stromquelle.** Umwandlung einer Stromquelle mit Parallelwiderstand zur Spannungsquelle mit Serienwiderstand.

Die Gleichung 5.25 zeigt die Berechnung des Spannungswertes der Spannungsquelle aus dem angegebenen Stromwert der Stromquelle und dem Widerstandswert des Innenwiderstands.

$$U_\mathrm{q} = R_\mathrm{i} \cdot I_\mathrm{q} \tag{5.25}$$

Außerdem müssen mögliche Leitwerte von elektrischen Widerständen in Widerstandswerte geändert werden. In der Gleichung 5.26 wird gezeigt, wie der Widerstandswert aus dem Kehrwert des Leitwerts ermittelt wird.

$$R_\mathrm{i} = \frac{1}{G_\mathrm{i}} \tag{5.26}$$

In der Abbildung 5.31 wird die Umwandlung der Stromquelle des vorgestellten Netzwerkes in eine Spannungsquelle durchgeführt. Aus der Parallelschaltung der Stromquelle und des Widerstandes R_2 wird eine Reihenschaltung bestehend aus der neuen Spannungsquelle und dem Widerstand R_2.

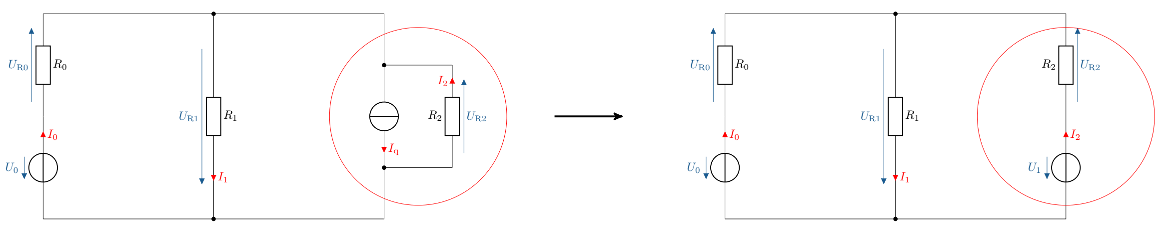


Abbildung 5.31: **Umwandlung einer Stromquelle in einem elektrischen Netzwerk.** Umwandlung der Stromquelle mit Parallelwiderstand des zu berechnenden Netzwerkes in eine Spannungsquelle mit Reihenwiderstand. Die Transformation der Quelle findet im roten Kreis statt.

Merke: Maschenstromverfahren

Für das Maschenstromverfahren werden zur Analyse eines elektrischen Netzwerkes Spannungsquellen und Widerstandswerte benötigt.

5.2 Maschen definieren

Für die Maschenstromanalyse müssen die Maschen festgelegt werden. Über den Maschen werden die Maschenströme festgelegt. Außerdem werden den Maschen die Widerstände zugeordnet. In der Abbildung 5.32 wird das vorgestellte Netzwerk mit den eingezeichneten Maschen M_1 und M_2 dargestellt.

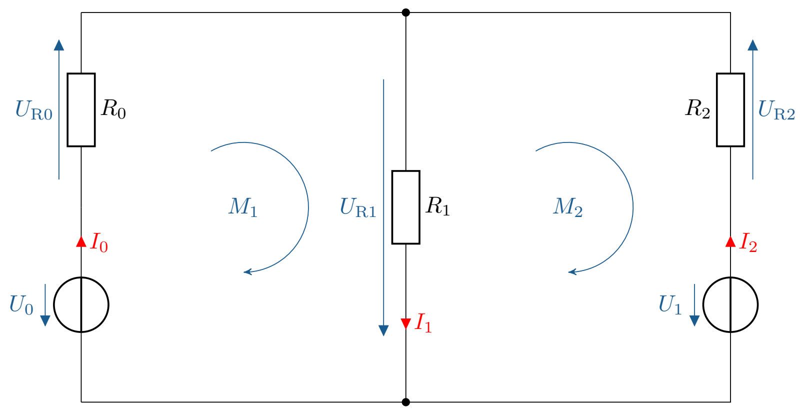


Abbildung 5.32: **Maschen im elektrischen Netzwerk.** Festlegung der Maschen M_1 und M_2 sowie der zugehörigen Maschenströme.

Durch alle Komponenten welche sich an der Masche M_1 befinden, fließt der Maschenstrom I_{M1}. So wie auch alle Komponenten an der Masche M_2 von dem Maschenstrom I_{M2} durchflossen werden. Die beiden Maschenströme I_{M1} und I_{M2} werden vektoriell in der Gleichung 5.27 notiert.

$$I_{\text{M}} = \begin{bmatrix} I_{\text{M1}} \\ I_{\text{M2}} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

5.3 Widerstandsmatrix bestimmen

In der Masche M_1 trifft der Maschenstrom I_{M1} auf die beiden Widerstände R_0 und R_1. Die Masche M_1 wird in der Abbildung 5.33 in blau dargestellt. Der Maschenstrom I_{M2} der Masche M_2 durchfließt die Widerstände R_1 und R_2. Der Widerstand R_1 ist somit teil der beiden Maschen M_1 und M_2 und wird von beiden Maschenströmen durchflossen. Wird ein Widerstand von mehreren Maschenströmen durchflossen gilt dieser als Kopplungswiderstand zwischen den Maschen.

In der Widerstandsmatrix nach Gleichung 5.28 werden die Widerstände der Maschen und die Kopplungswiderstände zugeordnet. Hier werden die Umlaufwiderstände aus den Maschen in die Hauptdiagonale eingetragen. Das heißt, dass die Reihenschaltung $R_0 + R_1$ das Element der ersten Spalte und Zeile für die erste Masche wird. Die Reihenschaltung $R_1 + R_2$ wird in das Element der zweiten Spalte und Zeile für die zweite Masche eingetragen. In die übrigen Elemente der Widerstandsmatrix werden die Kopplungswiderstände zwischen den jeweiligen Maschen eingetragen. Der Kopplungswiderstand bekommt ein positives Vorzeichen, wenn beide Maschenströme in die selbe Richtung fließen und ein negatives, wenn diese entgegengesetzt fließen. Die Widerstandsmatrix wird in der Wechselstromtechnik auch als Maschenimpedanzmatrix bezeichnet.

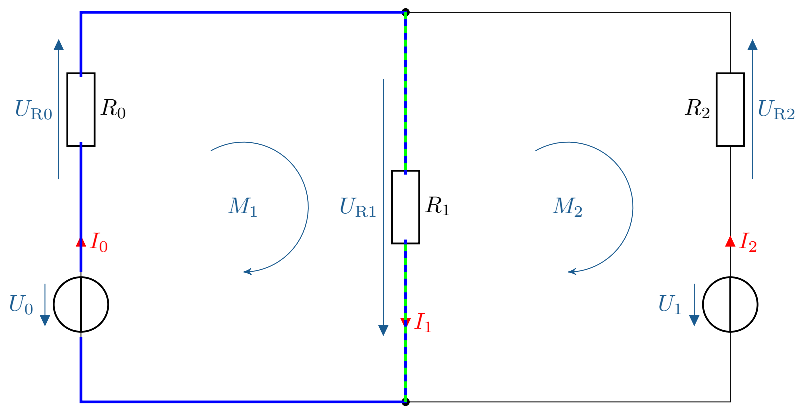


Abbildung 5.33: **Festlegung der Zweige.** Elektrisches Netzwerk mit hervorgehobenen Zweigen zur Erstellung der Widerstandsmatrix für das Maschenstromverfahren

$$R_M = \begin{bmatrix} R_0 + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

5.4 Quellenspannungen zuordnen

Den Maschen müssen die Spannungsquellen, die sogennanten Quellspannungen zugeordnet werden. In der Masche M_1 liegt die Quellenspannung U_0. Die Masche M_2 weist die Quellenspannung U_1 auf. Bei übereinstimmender Richtung von Spannungspfeil und Maschenrichtung ergibt sich ein negatives Vorzeichen für die Quellspannungen. Sind die Richtungen von Spannungspfeil und dem Maschenumlauf entgegengesetzt wird das Vorzeichen der Quellspannung positiv. Für den Fall, dass in einer Masche keine Quelle vohanden ist, wird eine 0 eingetragen.

$$U_M = \begin{bmatrix} U_0 \\ -U_1 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

5.5 Gleichungssystem aufstellen

Nach dem ohmschen Gesetz wird die elektrische Spannung als Produkt aus dem elektrischen Widerstand und Strom berechnet. Bei der Maschenstromanalyse werden zur Berechnung des Vektors der Maschenströme I_M die Widerstandsmatrix R_M und der Vektor der Quellspannungen U_M verwendet. Das Gleichungssystem wird in der Gleichung 5.30 abgebildet.

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ -U_1 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Die gesuchte Größen werden aus den Maschenströmen berechnet. Beispielsweise werden die Ströme I_0, I_1 und I_2 gesucht. Die Ergebnisse der Maschenströme sind mit den Strömen gleichzusetzen, welche lediglich von einem Maschenstrom durchflossen werden. In dem vorgestellten elektrischen Netzwerk beträgt der Strom der Masche $M_1 : I_{M1} = I_0$ und der Masche $M_2 : I_{M2} = -I_2$. Der Strom durch den Widerstand R_1 lässt sich beispielsweise über die Knotengleichung berechnen: $I_1 = I_0 + I_2$.

Beispiel 5.4: Maschenstromverfahren

Analyse des elektrischen Netzwerk aus der Abbildung 5.34 mittels der Maschenstromanalyse.

Für die Maschenstromanalyse sollen die folgenden Schritte bearbeitet werden:

a) Vorbereitung des Netzwerkes
b) Maschen und Maschenströme definieren
c) Widerstandsmatrix bestimmen
d) Quellspannungen zuordnen
e) Gleichungssystem aufstellen

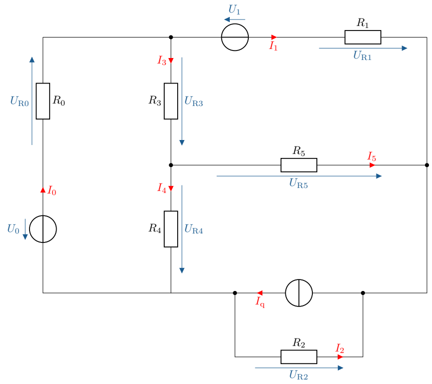
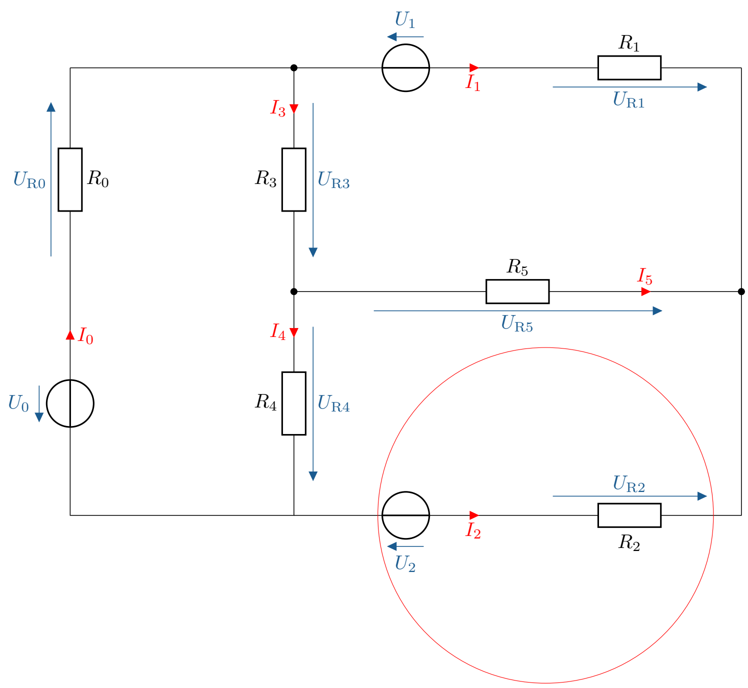
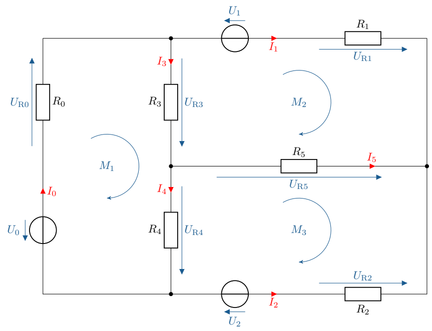


Abbildung 5.34: **Beispiel.** Maschenstromanalyse an einem elektrischen Netzwerk.

a) Vorbereitung des Netzwerkes:



b) Maschen und Maschenströme definieren:



$$I_M = \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix}$$

c) Widerstandsmatrix bestimmen:

$$R_M = \begin{bmatrix} R_0 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_4 \\ -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 \end{bmatrix}$$

d) Quellspannungen zuordnen:

$$U_M = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix}$$

e) Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_4 \\ -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix}$$

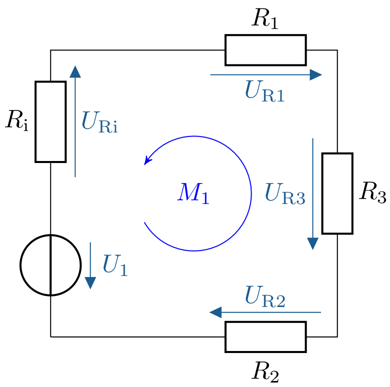
Ströme Berechnen:

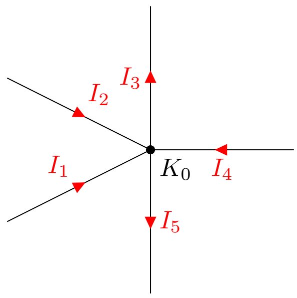
$$\begin{aligned} I_3 &= I_0 - I_1 \\ I_4 &= I_3 - I_5 \\ I_0 &= I_4 - I_2 \\ -I_5 &= I_2 + I_1 \end{aligned}$$

A Übungsaufgaben

A.1 Knoten- und Maschenanalyse 1

Gegeben sind unten stehende Netzwerke.



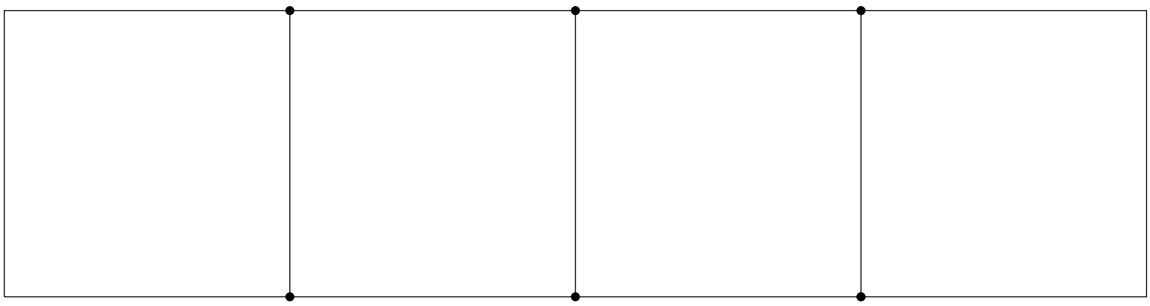


a) Stellen Sie die Maschengleichung für die Masche M_1 auf!

b) Stellen Sie die Knotengleichung für den Knoten K_0 auf!

A.2 Knoten- und Maschenanalyse 2

Gegeben ist unten stehendes Netzwerk.

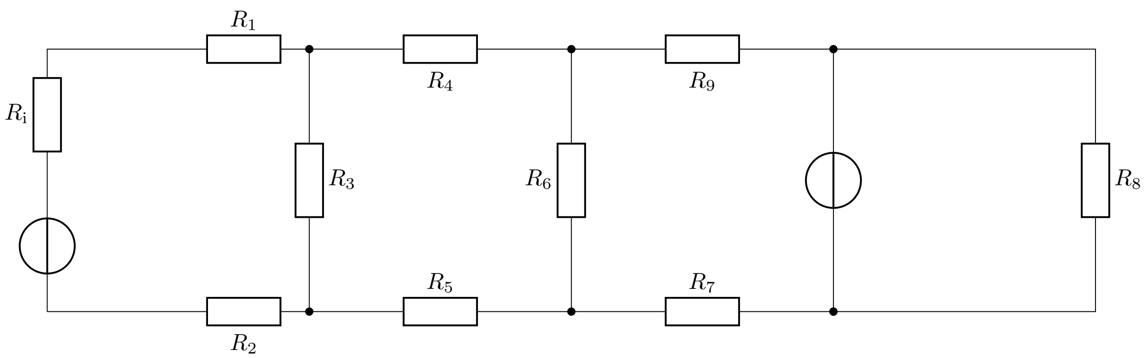


a) Wie viele Knoten, Zweige und Maschen werden zur Analyse benötigt?

b) Zeichnen Sie einen vollständigen Baum zu dem angegebenen Netzwerk.

A.3 Knoten- und Maschenanalyse 3

Gegeben ist unten stehendes Netzwerk.



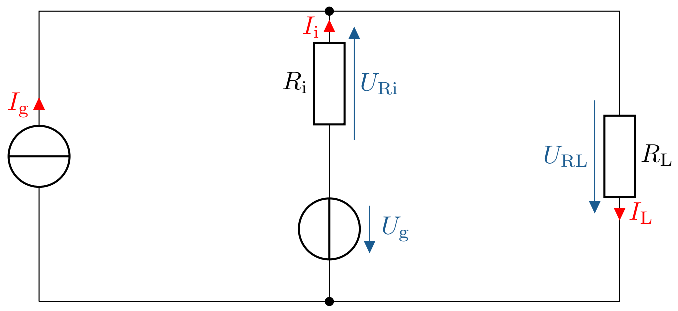
a) Markieren und bennen Sie alle Ströme und Spannungen!

b) Stellen Sie die Gleichungen für alle Knoten auf!

c) Stellen Sie die Gleichungen für alle Maschen auf!

A.4 Superposition 1

Gegeben ist unten stehendes Netzwerk.



Bestimmen Sie mit Hilfe des Superpositionsverfahrens die Spannung, die über dem Widerstand R_L abfällt. Befolgen Sie hierzu die folgenden Schritte:

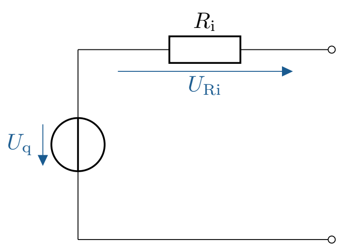
a) Bestimmen Sie den Anteil von U_g.

b) Bestimmen Sie den Anteil von I_g.

c) Führen Sie die Ergebnisse durch den Überlagerungssatz zusammen.

A.5 Knotenpotentialverfahren 1

Gegeben ist das Netzwerk einer realen Spannungsquelle $U_\mathrm{q} = 3{,}6\ V$ mit einem Innenwiderstand von $R_\mathrm{i} = 0{,}2\ \Omega$.



Wandeln Sie die angegebene reale Spannungsquelle in eine reale Stromquelle um. Befolgen Sie hierzu die folgenden Schritte:

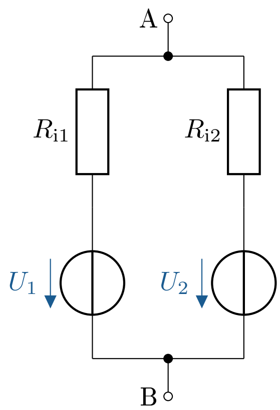
a) Bestimmen Sie den Leitwert des Widerstandwertes.

b) Wandeln Sie die reale Spannungsquelle in eine reale Stromquelle um.

c) Berechnen Sie den Stromwert der umgewandelten Stromquelle.

A.6 Knotenpotentialverfahren 2

Im folgenden Netzwerk werden zwei parallel verschaltete Ersatzschaltbilder von Batteriezellen dargestellt. Sie bestehen aus den Spannungsquellen U_1 und U_2 sowie den Innenwiderständen R_{i1} und R_{i2}. Führen Sie die Analyse mit dem Knotenpotentialverfahren durch.



a) Formen Sie das Netzwerk um, sodass das Knotenpotentialverfahren anwendbar wird.

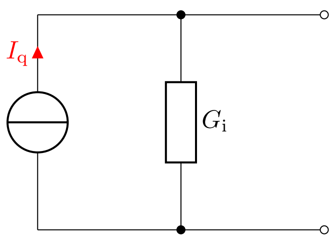
b) Stellen Sie die Kontenadmittanzmatrix (KAM) auf.

c) Stellen Sie den Vektor der Knoteneinströmungen (I) auf.

d) Lösen Sie das Gleichungssystem und berechnen Sie die Spannung U_0 zwischen den Klemmen A und B.

A.7 Maschenstromverfahren 1

Gegeben ist das Netzwerk einer realen Stromgquelle $I_\mathrm{q} = 6\ A$ mit einem Leitwert von $G_\mathrm{i} = \frac{2}{3}\ S$.



Wandeln Sie die angegebene reale Stromquelle in eine reale Spannungsquelle um. Befolgen Sie hierzu die folgenden Schritte:

a) Bestimmen Sie den Widerstandswert des Leitwertes.

b) Wandeln Sie die reale Stromquelle in eine reale Spannungsquelle um.

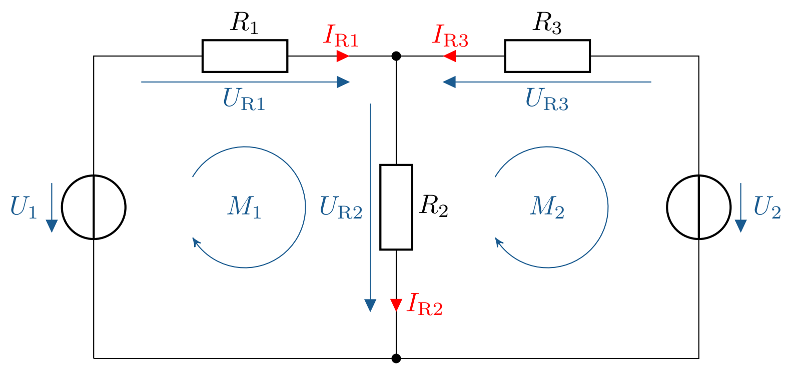
c) Berechnen Sie die Spannung der umgewandelten Spannungsquelle.

A.8 Maschenstromverfahren 2

Im folgenden Netzwerk wird ein Netzwerk bestehend aus drei Widerständen und zwei Spannungsquellen dargestellt. Führen Sie die Analyse des Netzwerkes mit dem Maschenstromverfahren durch.

Werte:

$$R_1 = 4{,}7\,\mathrm{k\Omega} \quad R_2 = 3{,}3\,\mathrm{k\Omega} \quad R_3 = 2{,}2\mathrm{k\Omega} \quad U_1 = 24\,\mathrm{V} \quad U_2 = 12\,\mathrm{V}$$



a) Vorbereitung des Netzwerkes

b) Maschen und Maschenströme definieren

c) Widerstandsmatrix bestimmen

d) Quellspannungen zuordnen

e) Gleichungssystem aufstellen

B Lösungen zu den Übungsaufgaben

B.1 Knoten- und Maschenanalyse 1

a) Maschengleichungen:

$$M_1 : U_1 - U_{\mathrm{Ri}} - U_{\mathrm{R1}} - U_{\mathrm{R2}} - U_{\mathrm{R3}} = 0$$

b) Knotengleichungen:

$$K_0 : +I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

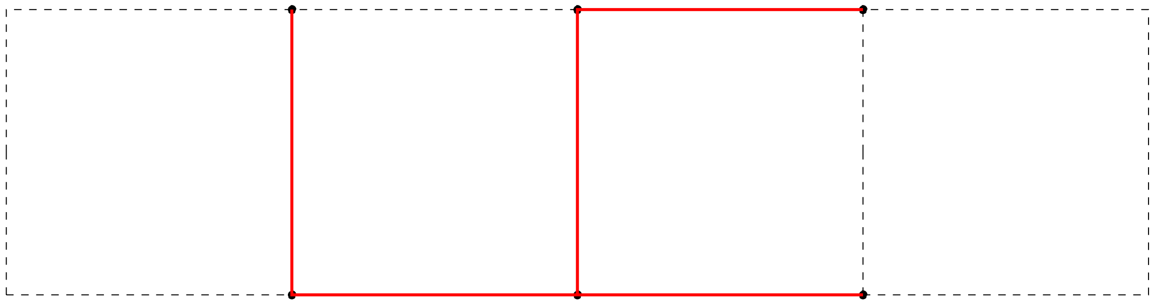
B.2 Knoten- und Maschenanalyse 2

a) Das Netzwerk verfügt über:

- Knoten: k=6

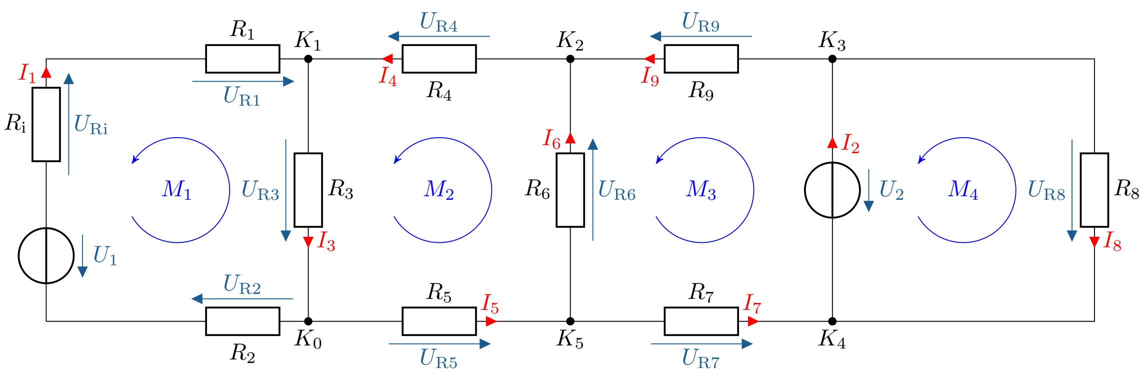
- Zweige: k-1=5
- Maschen: 4

b) Vollständiger Baum:



B.3 Knoten- und Maschenanalyse 3

a) Netzwerk mit Strömen und Spannungen:



b) Knotengleichungen:

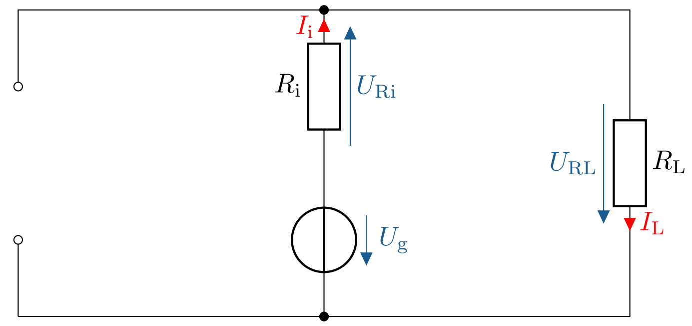
$$\begin{aligned}
K_0 &: -I_1 + I_3 - I_5 = 0 \\
K_1 &: +I_1 - I_3 + I_4 = 0 \\
K_2 &: -I_4 + I_6 + I_9 = 0 \\
K_3 &: +I_2 - I_8 - I_9 = 0 \\
K_4 &: -I_2 - I_7 + I_8 = 0 \\
K_5 &: +I_5 - I_6 - I_7 = 0
\end{aligned}$$

c) Maschengleichungen:

$$\begin{aligned}
M_1 : U_1 - U_{Ri} - U_{R1} - U_{R2} - U_{R3} &= 0 \\
M_2 : U_{R3} + U_{R4} + U_{R5} + U_{R6} &= 0 \\
M_3 : -U_{R6} + U_{R7} - U_2 + U_{R9} &= 0 \\
M_4 : U_2 - U_{R8} &= 0
\end{aligned}$$

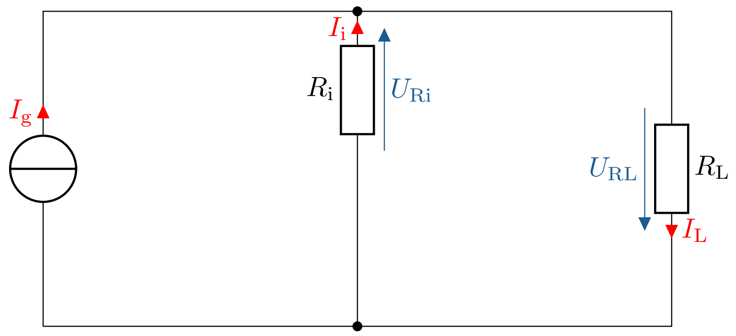
B.4 Superposition 1

a) Anteil von U_g:



$$U_\mathrm{RL}(U_\mathrm{g}) = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \cdot U_\mathrm{g}$$

b) Anteil von I_g:



$$U_\mathrm{RL}(I_\mathrm{g}) = \frac{R_\mathrm{i} \cdot R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \cdot I_\mathrm{g}$$

c) Überlagerungssatz:

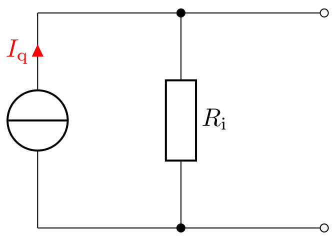
$$U_\mathrm{RL} = U_\mathrm{RL}(U_\mathrm{g}) + U_\mathrm{RL}(I_\mathrm{g}) = \frac{R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \cdot U_\mathrm{g} + \frac{R_\mathrm{i} \cdot R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{L}} \cdot I_\mathrm{g}$$

B.5 Knotenpotentialverfahren 1

a) Leitwert:

$$G_\mathrm{i} = \frac{1}{R_\mathrm{i}} = \frac{1}{0{,}2\ \Omega} = 5\ \mathrm{S}$$

b) Stromquelle:

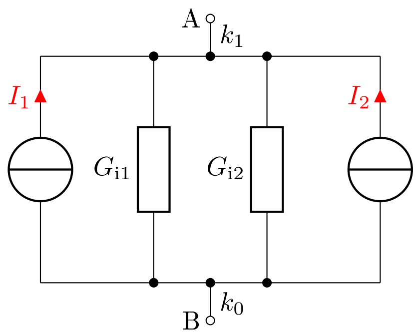


c) Stromwert:

$$I_q = U_q \cdot G_i = 3{,}6\ \mathrm{V} \cdot 5\ \mathrm{S} = 72\ \mathrm{A}$$

B.6 Knotenpotentialverfahren 2

a) Umwandlung:



$$I_1 = \frac{U_1}{R_{i1}} = \frac{0{,}8\ V}{4{,}8\ \Omega} = 166\ mA \qquad I_2 = \frac{U_2}{R_{i2}} = \frac{1{,}5\ V}{0{,}8\ \Omega} = 1{,}875\ A$$

$$G_{i1} = \frac{1}{R_{i1}} = \frac{1}{4{,}8\ \Omega} = 208\ m\Omega \qquad G_{i2} = \frac{1}{R_{i2}} = \frac{1}{0{,}8\ \Omega} = 1{,}25\ \Omega$$

b) Kontenadmittanzmatrix:

$$KAM = (G_{i1} + G_{i2}) = 208\ m\Omega + 1{,}25\ \Omega$$

c) Vektor der Knoteneinströmungen:

$$I = (I_1 + I_2) = 166\ mA + 1{,}875\ A$$

d) Gleichungssystem lösen:

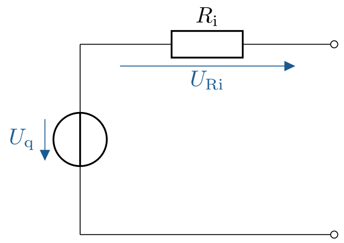
$$\begin{aligned} KAM \cdot U &= I \\ (G_{i1} + G_{i2}) \cdot U_0 &= (I_1 + I_2) \\ (208\ m\Omega + 1{,}25\ \Omega) \cdot U_0 &= (166\ mA + 1{,}875\ A) \\ U_0 = \frac{I_1 + I_2}{G_{i1} + G_{i2}} &= \frac{166\ mA + 1{,}875\ A}{208\ m\Omega + 1{,}25\ \Omega} = 1{,}4\ V \end{aligned}$$

B.7 Maschenstromverfahren 1

a) Widerstandswert:

$$R_\mathrm{i} = \frac{1}{G_\mathrm{i}} = \frac{1}{\frac{2}{3}\ S} = 1{,}5\ \Omega$$

b) Spannungsquelle:



c) Spannungswert

$$U_\mathrm{q} = R_\mathrm{i} \cdot I_\mathrm{q} = 1{,}5\ \Omega \cdot 6\ \mathrm{A} = 9\ \mathrm{V}$$

B.8 Maschenstromverfahren 2

a) Vorbereitung des Netzwerkes:
Das Netzwerk besteht aus:

- Zwei Spannungsquellen: U_1 und U_2,
- Drei Widerständen: R_1, R_2, R_3,
- Drei mögliche Maschen.

Es sind Spannungsquellen und Widerstandswerte vorhanden.

b) Maschen und Maschenströme definieren:

- M_1: Maschenstrom in der linken Masche,
- M_2: Maschenstrom in der rechten Masche,
- Der Strom I_R2 durch R_2 ergibt sich zu:

$$I_\mathrm{R2} = \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix}$$

c) Widerstandsmatrix bestimmen:

$$\mathbf{R_M} = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$

Einsetzen der Werte:

$$\mathbf{R_M} = \begin{bmatrix} 4{,}7\ \Omega + 3{,}3\ \Omega & -3{,}3\ \Omega \\ -3{,}3\ \Omega & 3{,}3\ \Omega + 2{,}2\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}0\ \Omega & -3{,}3\ \Omega \\ -3{,}3\ \Omega & 5{,}5\ \Omega \end{bmatrix}$$

d) Quellspannungen zuordnen:

$$\mathbf{U_M} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24\ V \\ -12\ V \end{bmatrix}$$

e) Gleichungssystem aufstellen:

$$\mathbf{R_M} \cdot \mathbf{I_M} = \mathbf{U_M},$$

wobei:

$$\mathbf{R_M} = \begin{bmatrix} 8{,}0\ \Omega & -3{,}3\ \Omega \\ -3{,}3\ \Omega & 5{,}5\ \Omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I_M} = \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U_M} = \begin{bmatrix} 24\ V \\ -12\ V \end{bmatrix}.$$

Das Lösen des Gleichungssystems liefert:

$$I_{M1} = 2{,}79\,\mathrm{mA} \quad \text{und} \quad I_{M2} = -0{,}507\,\mathrm{mA}$$

Daraus ergeben sich:

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{R1}} &= I_{\mathrm{M1}} = 2{,}79\ mA \\ I_{\mathrm{R2}} &= I_{\mathrm{M1}} + (-I_{\mathrm{M2}}) = 2{,}79\ mA + 0{,}507\ mA = 3{,}297\ mA \\ I_{\mathrm{R3}} &= -I_{\mathrm{M2}} = 0{,}507\ mA \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{R1}} &= R_1 \cdot I_{\mathrm{R1}} = 4{,}7\ k\Omega \cdot 2{,}79\ mA = 13{,}12\ V \\ U_{\mathrm{R2}} &= R_2 \cdot I_{\mathrm{R1}} = 3{,}3\ k\Omega \cdot 3{,}297\ mA = 10{,}88\ V \\ U_{\mathrm{R3}} &= R_3 \cdot I_{\mathrm{R1}} = 2{,}2\ k\Omega \cdot 0{,}507\ mA = 1{,}12\ V \end{aligned}$$

Überprüfung der Maschen:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_{\mathrm{R1}} + U_{\mathrm{R2}} = 24\ V \\ U_2 &= U_{\mathrm{R2}} + U_{\mathrm{R3}} = 12\ V \end{aligned}$$

Index

G

Graphentheorie . . . 3

K

Knoten . . . 5
Knoten- und Maschenanalyse . . . 2
Knotenpotentialanalyse . . . 20

M

Masche . . . 5
Maschenstromanalyse . . . 26

S

Superpositionsprinzip . . . 13

U

Überlagerungssatz . . . 15

V

vollständiger Baum . . . 6

Z

Zweig . . . 5