

GET it digital

Modul 7: Periodische Größen



Stand: 8. April 2026



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 7: Periodische Größen“ von T. Meibeck, S. Kempen Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

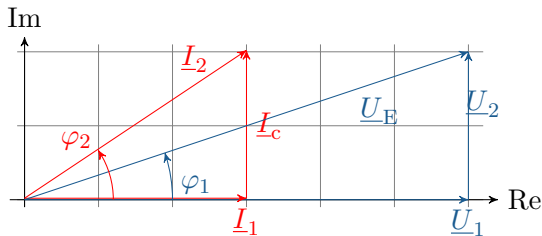
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Das Werk ist online verfügbar unter:

<https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-7-periodische-groessen>

Eine Sinusschwingung weist über der Zeit unterschiedliche Spannungswerte auf. Wiederholen sich die exakten Sinusschwingungen, handelt es sich um einen zeitlich periodischen Vorgang. Im Modul 7 'Periodische Größen' werden die folgenden Themengebiete behandelt:

- ▶ Zeigerdiagramm
- ▶ Komplexe Wechselstromrechnung
- ▶ Effektivwert
- ▶ Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung
- ▶ Drehstrom
- ▶ Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem



Lernziele: Komplexe Zahlen

Die Studierenden können

- ▶ mit Zahlen in der komplexen Ebene umgehen.
- ▶ Zeigerdiagramme von komplexen Zahlen darstellen.
- ▶ komplexe Zahlen berechnen.

In der komplexen Zahlenebene wird die imaginäre Einheit j eingeführt, um mit komplexen Zahlen zu rechnen.

$$j = \sqrt{-1}$$

Das Quadrieren der imaginären Einheit ergibt wiederum -1.

$$j^2 = -1$$

Kartesische Koordinaten mit dem Realteil und dem Produkt aus imaginärer Einheit und Imaginärteil:

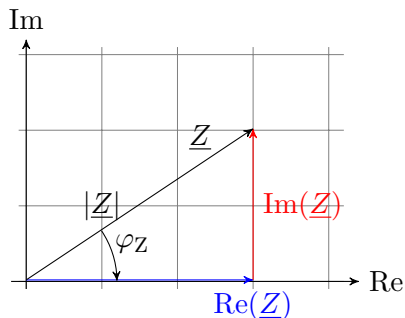
$$\underline{Z} = \textit{Realteil} + j \cdot \textit{Imaginärteil}$$

Der Realteil wird mit Re und der Imaginärteil mit Im abgekürzt:

$$\underline{Z} = \text{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \text{Im}(\underline{Z})$$

Verwendung der komplexenen Ebene:

- ▶ Der Realteil Re wird auf der vertikalen und der Imaginärteil Im auf der horizontalen Achse aufgetragen
- ▶ Kartesische Koordinaten: $\text{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \text{Im}(\underline{Z})$
- ▶ Polar-Koordinaten: $|\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \varphi_Z}$



- ▶ Euler'sche Formel:

$$e^{j\chi} = \cos(\chi) + j \cdot \sin(\chi)$$

- ▶ Kartesische Koordianten:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot \cos(\varphi) + j \cdot |\underline{Z}| \cdot \sin(\varphi) = \operatorname{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z})$$

- ▶ Polar-Koordinaten:

$$\underline{Z} = \sqrt{(\operatorname{Re}(\underline{Z}))^2 + (\operatorname{Im}(\underline{Z}))^2} \cdot e^{j \cdot \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})}\right)} = |\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \varphi}$$



Merke: Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Darstellung:

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z})$$

Polarform:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

Trigonometrische Darstellung:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

Konjugation:

$$\underline{Z}^* = (\operatorname{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z}))^* = \operatorname{Re}(\underline{Z}) - j \cdot \operatorname{Im}(\underline{Z})$$

Betrag und Betragsquadrat

$$|\underline{Z}| = \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Z}^*} \rightarrow |\underline{Z}|^2 = \underline{Z} \cdot \underline{Z}^*$$

Addition und Subtraktion:

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \operatorname{Re}(\underline{Z}_1) + \operatorname{Re}(\underline{Z}_2) + j \cdot (\operatorname{Im}(\underline{Z}_1) + \operatorname{Im}(\underline{Z}_2))$$

$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = \operatorname{Re}(\underline{Z}_1) - \operatorname{Re}(\underline{Z}_2) - j \cdot (\operatorname{Im}(\underline{Z}_1) - \operatorname{Im}(\underline{Z}_2))$$

Multiplikation und Division:

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = |\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_2| \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Merke: Grundrechenarten komplexer Zahlen

Für die **Addition und Subtraktion** wird in der Regel die **kartesische Darstellungsform** für komplexen Zahlen verwendet. Bei der **Multiplikation und Division** von komplexen Zahlen wird die **Polarform** gewählt.

Division durch konjugiert komplexe Erweiterung:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_2^*}{\underline{Z}_2^*} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2^*}{|\underline{Z}_2|^*}$$

Realteil und Imaginärteil berechnen:

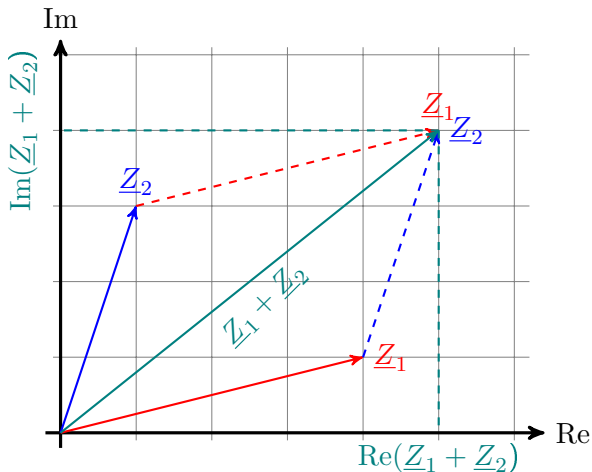
$$\operatorname{Re}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z} + \underline{Z}^*}{2}$$

$$\operatorname{Im}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}^*}{2j}$$

Graphische Darstellung und Rechnungen mit komplexen Zahlen

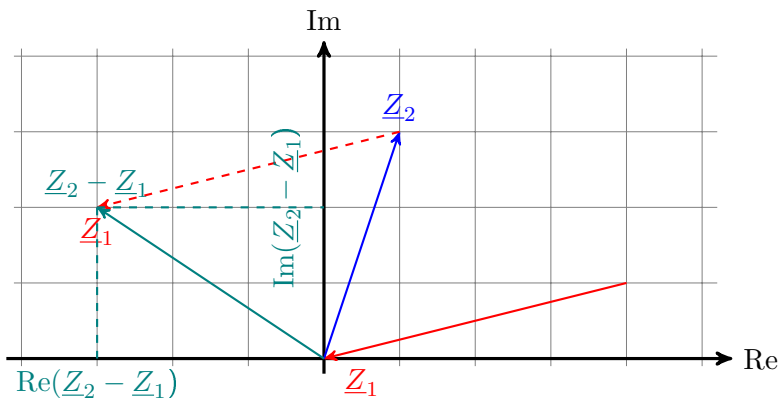
Rechenoperationen im Zeigerdiagramm - Addition:

1. Parallelverschiebung Z_2 an die Spitze von Z_1
2. Realteil und Imaginärteil ablesen



Rechenoperationen im Zeigerdiagramm - Subtraktion:

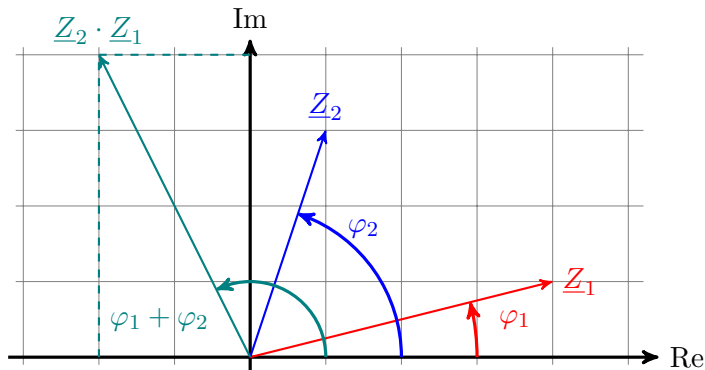
1. Zeigerumkehr bei Negation
2. Zeiger Z_1 verschieben: Fußpunkt von Z_1 zur Spitze von Z_2
3. Realteil und Imaginärteil ablesen



Zeigerdiagramme - Multiplikation

Rechenoperationen im Zeigerdiagramm - Multiplikation: (Zeichnung nicht maßstabsgetreu!)

1. Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$ berechnen und einzeichnen
2. Länge $Z_1 \cdot Z_2$ berechnen und eintragen
3. Realteil und Imaginärteil ablesen



Lernziele: Zeigerdiagramme

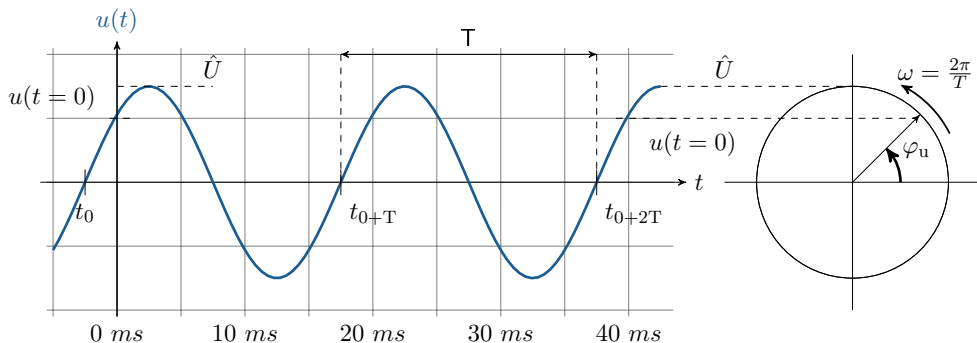
Die Studierenden

- ▶ verstehen die Kenngrößen von periodischen Wechselspannungen.
- ▶ können mit den komplexen Drehzeigern der Amplituden umgehen.

Periodische Wechselspannung

Anwendung von komplexen Zahlen in der Wechselstromtechnik

- ▶ Sinusförmige und harmonische Quellgrößen, Scheitelwert \hat{U} und Phasenverschiebung t_0
- ▶ Periodendauer T , Wiederholung von Perioden
- ▶ Stationärer Zustand \rightarrow Spannungen und Ströme unterscheiden sich nur in Amplitude und Phase
- ▶ Schwingungen können durch Zeiger dargestellt werden

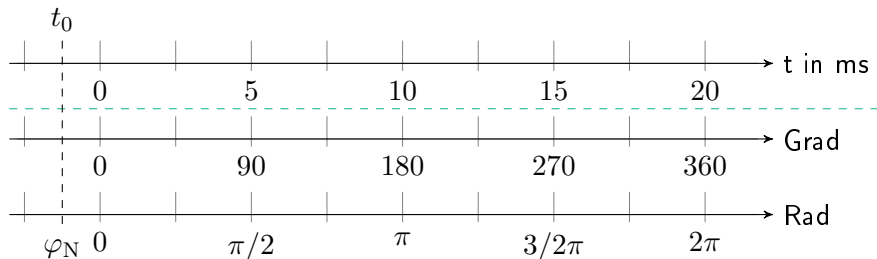


- ▶ Kreisfrequenz ω beschrieben durch die Periodendauer T
- ▶ Umrechnung von Periodendauer und Frequenz f
- ▶ Kreisfrequenz ω beschrieben durch die Frequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{wird} \quad \omega = 2\pi f$$

Harmonische Wechselgrößen

- ▶ Eine Periodendauer entspricht in Winkelgrößen einem Kreisumlauf von 360° oder 2π
- ▶ Die Phasenverschiebung t_0 entspricht in der Winkeldarstellung dem Phasenwinkel φ_N



Merke: Wechselgrößen

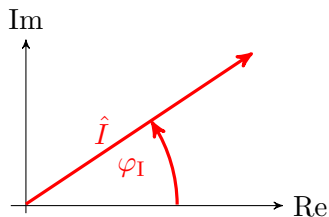
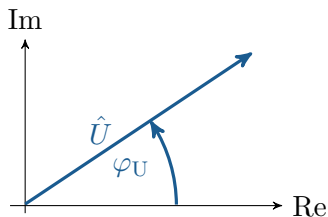
Eine Wechselspannung erklärt einen regelmäßigen Polaritätswechsel mit dem **Amplitudenwert** \hat{U} und der **Periodendauer** T .

- ▶ $u(t)$ beschrieben durch die Kreisfrequenz ω
- ▶ $u(t)$ zum Zeitpunkt t bei einer Periodendauer von T

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_N) = \hat{U} \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_N) = \hat{U} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_N\right)$$

Komplexer Drehzeiger der Amplitude

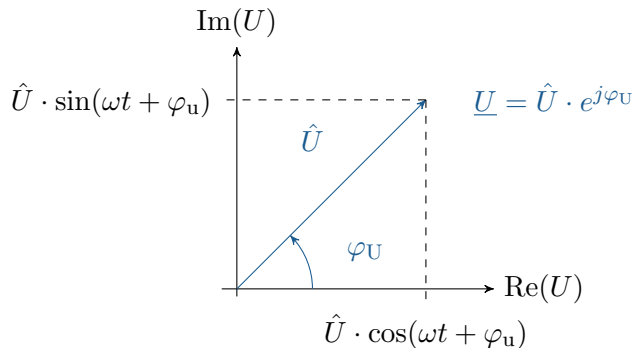
- ▶ lineare Netzwerke → Sinusförmige und harmonische Quellgrößen
- ▶ Stationärer Zustand → Spannungen und Ströme unterscheiden sich nur in Amplitude und Phase
- ▶ Schwingungen können durch Zeiger dargestellt werden
- ▶ Ruhende Zeiger drücken die relative Lage von Schwingungen zueinander aus



Komplexer Drehzeiger der Amplitude

Komplexer Drehzeiger einer elektrischen Spannung:

- ▶ Amplitudenwert der Spannung: \hat{U}
- ▶ Phasenwinkel der Spannung: φ_U
- ▶ Komplexe Spannungszeiger: $\underline{U} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_U}$
- ▶ Realanteil der Spannung
- ▶ Imaginäranteil der Spannung



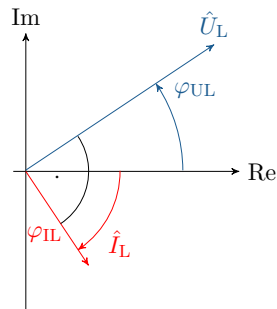
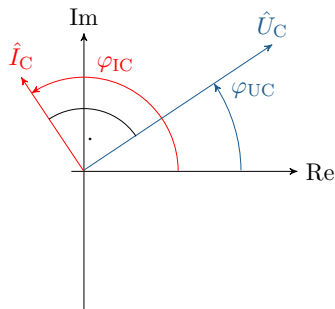
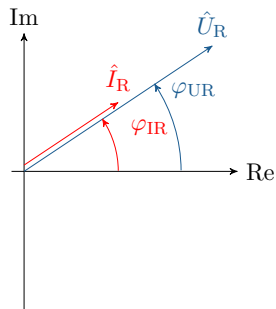
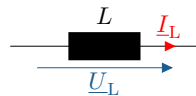
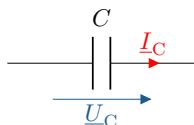
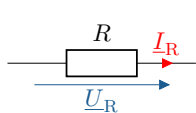
Merke: Komplexe Drehzeiger von Spannung und Strom

Die Wechselgrößen Spannung und Strom werden als komplexe Drehzeiger dargestellt. Die Drehzeiger beschreiben dabei **Augenblickswerte** $u(t)$, welche sich mit konstanter **Winkelgeschwindigkeit** ω verändern.

Spannungszeiger und Stromzeiger von elektrischen Komponenten

Spannungszeiger und Stromzeiger für verschiedene Komponenten:

- ▶ Elektrischer Widerstand → Spannungszeiger und Stromzeiger in Phase
- ▶ Kapazität → Stromzeiger eilt dem Spannungszeiger vor
- ▶ Induktivität → Stromzeiger folgt dem Spannungszeiger



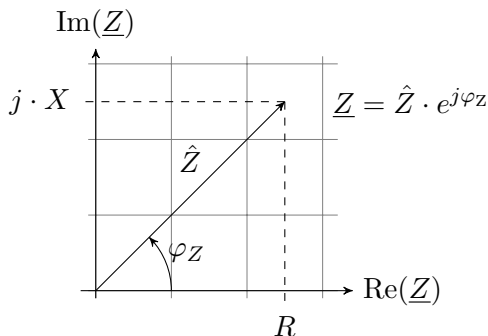
Lernziele: Wechselstromrechnung

Die Studierenden

- ▶ kennen die komplexe Impedanz und die komplexe Admittanz.
- ▶ verstehen das Verhalten eines Widerstandes, eines Kondensators und einer Spule an einer Wechselspannung.
- ▶ kennen Wechselquellen und die dazugehörigen Umwandlungsvorschriften.

Impedanz und Attmitanz in der komplexen Ebene

- ▶ Komplexer Zeiger der Impedanz
- ▶ Wirkanteil der Impedanz
- ▶ Blindanteil der Impedanz
- ▶ Wirkwiderstand und Blindwiderstand der Impedanz



$$\text{Impedanz} = \text{Resistanz} + j \cdot \text{Reaktanz} \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = R + j \cdot X$$

$$[\underline{Z}] = 1 \text{ Ohm} = 1 \Omega$$

Komplexer Leitwert als Kehrwert der komplexen Impedanz:

$$R = \frac{1}{G} \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

Wirkleitwert und Blindleitwert der Admittanz:

$$\text{Admittanz} = \text{Konduktanz} + j \cdot \text{Suszeptanz} \quad \rightarrow \quad \underline{Y} = G + j \cdot B$$

$$[\underline{Y}] = 1 \text{ Siemens} = 1 \text{ S}$$

Merke: Komplexe Impedanz und komplexe Admittanz

Der Gleichstromwiderstand wird bei einer **Wechselspannung** zur **komplexen Impedanz \underline{Z}** . Der Kehrwert des Widerstandes, der Leitwert, wird bei einer Wechselspannung zur **komplexen Admittanz \underline{Y}** .

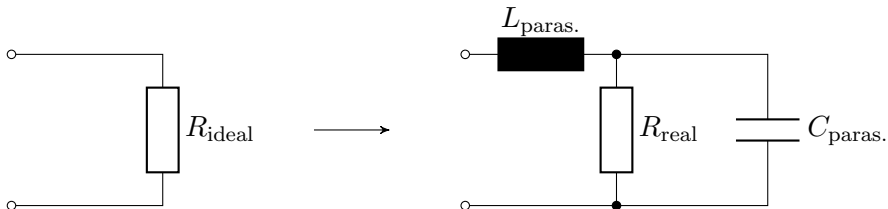
- ▶ Komplexer Widerstand an einem ohmschen Verbraucher
- ▶ Kein Blindanteil bei einem idealen ohmschen Widerstand
- ▶ Idealer komplexer Widerstand als reiner Wirkanteil

$$\underline{Z}_R = R + j \cdot X_R \quad \rightarrow \quad X_{R\text{-ideal}} = j \cdot 0 \, \Omega \quad \rightarrow \quad \underline{Z}_R = R$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_R \cdot \underline{I} \quad \rightarrow \quad u(t) = R \cdot i(t)$$

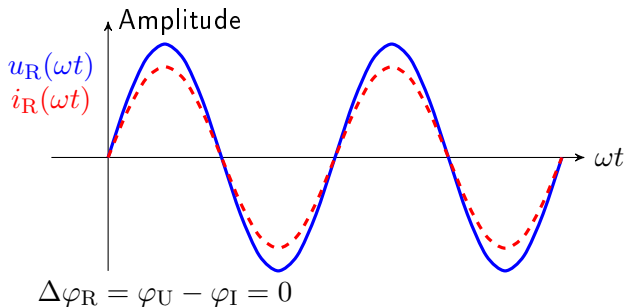
Elektrischer Widerstand in der Wechselstromrechnung

- ▶ Idealer Widerstand
- ▶ Realer Widerstand
- ▶ Keine Phasenverschiebung beim idealen Widerstand



Phasenverschiebung am idealen ohmschen Widerstand:

- ▶ Spannung $u_R(\omega t)$
- ▶ Strom $i_R(\omega t)$
- ▶ Spannung und Strom am idealen ohmschen Widerstand ohne Phasenverschiebung





Merke: Sinusschwingung an einem Widerstand

Der **elektrische Widerstand** weist zwischen der Wechselspannung und dem zugehörigen Wechselstrom **keine Phasenverschiebung** auf.

Negativer Blindwiderstand \leftrightarrow Darstellung im negativen Imaginärbereich

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \rightarrow \quad \underline{Y}_C = j\omega C$$

Idealer Kondensator an Wechselspannung und Wechselstrom:

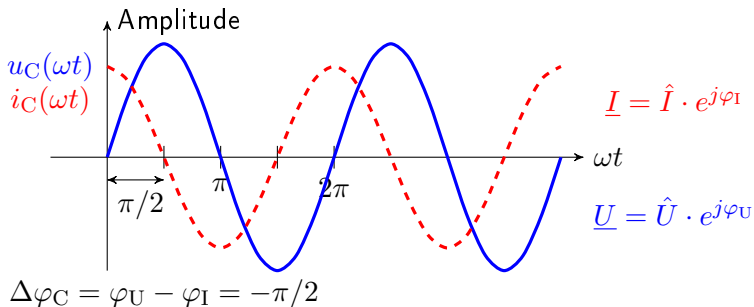
$$\underline{U} = \underline{Z}_C \cdot \underline{I} \quad u(t) = \underline{X}_C \cdot i(t)$$

Pasenverschiebung des Stromes am idealen Kondensator:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \quad i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$$

Phasenverschiebung am Kondensator:

- ▶ Spannung $u_C(\omega t)$
- ▶ Strom $i_C(\omega t)$
- ▶ Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung
- ▶ Phasenverschiebung $\Delta\varphi$



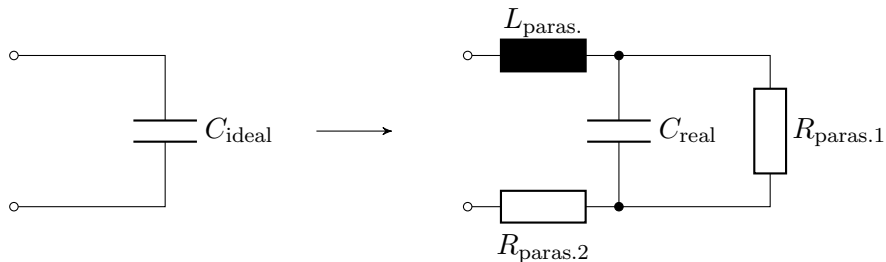


Merke: Sinusschwingung an einem Kondensator

An der idealen Kapazität eilt der Wechselstrom der Wechselspannung um 90° vor.

Idealer und realer Kondensator:

- ▶ Idealer Kondensator
- ▶ Realer Kondensator mit parasitären Effekten



Positiver Blindwiderstand \leftrightarrow Darstellung im positiven Imaginärbereich

$$\underline{Z}_L = j\omega L \quad \rightarrow \quad \underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$$

Ideale Spule an Wechselspannung und Wechselstrom:

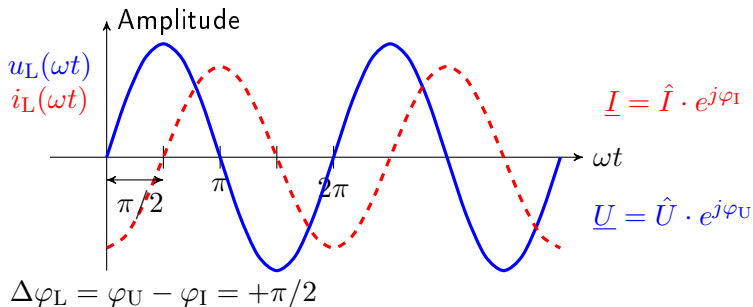
$$\underline{U} = \underline{Z}_L \cdot \underline{I} \quad u(t) = \underline{X}_L \cdot i(t)$$

Pasenverschiebung des Stromes an der idealen Spule:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \pi/2) \quad i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t)$$

Phasenverschiebung an der Spule:

- ▶ Spannung $u_L(\omega t)$
- ▶ Strom $i_L(\omega t)$
- ▶ Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung
- ▶ Phasenverschiebung $\Delta\varphi$



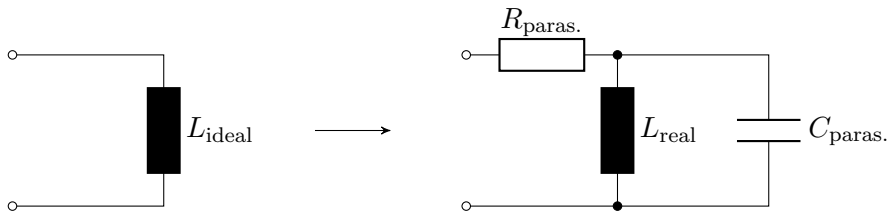


Merke: Sinusschwingung an einer Spule

Bei einer idealen Induktivität folgt der Wechselstrom der Wechselspannung um 90° nach.

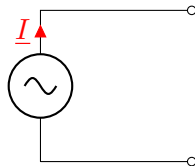
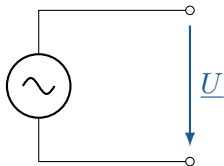
Ideale und reale Spule:

- ▶ Ideale Spule
- ▶ Reale Spule mit parasitären Effekten



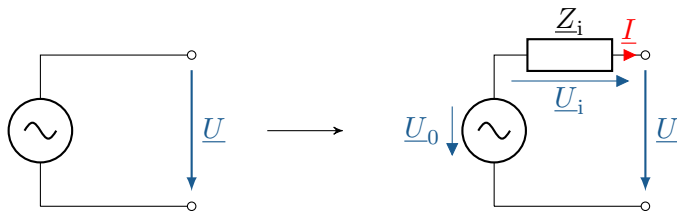
Quellen von Wechselgrößen:

- ▶ Ideale Wechselspannungsquelle
- ▶ Ideale Wechselstromquelle



Wechselspannungsquelle:

- ▶ Ideale Wechselspannungsquelle
- ▶ Reale Wechselspannungsquelle mit Innenimpedanz \underline{Z}_i



Ausgangsspannung einer realen Wechselspannungsquelle:

$$\underline{U} = \underline{U}_0 - \underline{Z}_i \cdot \underline{I}$$

Leerlauf:

$$\underline{I} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_i = \underline{I} \cdot \underline{Z}_i = 0$$

$$\underline{U}_0 - \underline{U}_i - \underline{U} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U} = \underline{U}_0$$

Kurzschluss:

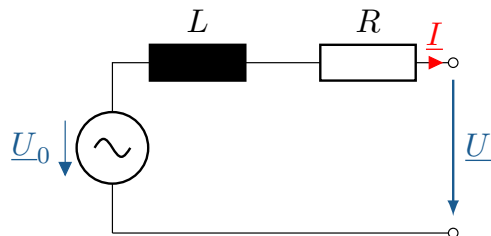
$$\underline{U} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{I} = \underline{I}_k$$

$$\underline{U}_0 - \underline{U}_i - \underline{U} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_i = \underline{U}_0$$

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}_i}$$

Reale Spannungsquelle:

Eine Reale Spannungsquelle (230 V, 50 Hz) verfügt nach der unten stehenden Abbildung über eine Innenimpedanz \underline{Z}_i , welche sich aus einer Spule $L = 20 \text{ mH}$ und einem ohmschen Widerstand $R = 10 \text{ m}\Omega$ zusammensetzt.



Bestimmen Sie die **Leerlaufspannung** und den **Kurzschlussstrom** der Wechselspannungsquelle.

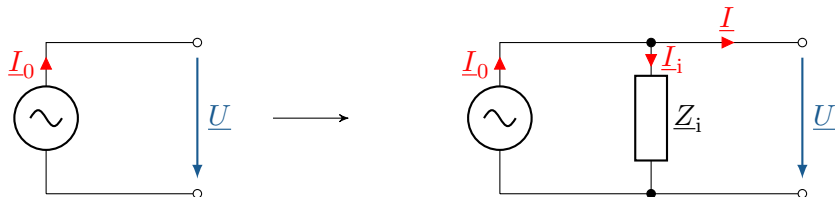
$$\underline{U}_0 = 230 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}$$

$$\underline{Z}_i = R + jX_L$$

$$\underline{Z}_i = 0,01 \text{ }\Omega + j \cdot 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 20 \text{ mH}$$

Wechselstromquelle:

- ▶ Ideale Wechselstromquelle
- ▶ Reale Wechselstromquelle mit Innenimpedanz \underline{Z}_i

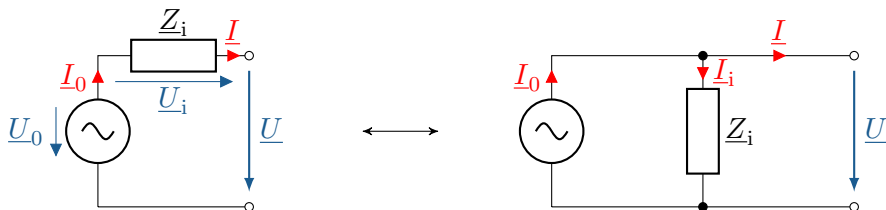


Ausgangswechselstrom einer realen Wechselstromquelle:

$$\underline{I} = \underline{I}_0 - \underline{I}_i = \underline{I}_0 - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_i}$$

Äquivalenz von Wechselquellen

Umwandlung von Wechselstromquellen und Wechselspannungsquellen:



Äquivalente Wechselquellen, bei identischen Innenimpedanzen:

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}_0$$

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_0$$

Quellstrom der Stromquelle gleich dem Kurzschlussstrom.

Quellspannung der Spannungsquelle gleich der Leerlaufspannung.

$$I = I_k = I_0 \quad \text{und} \quad U = U_r = U_0$$

Wechselquellenumwandlung:

Gegeben ist eine reale Wechselspannungsquelle mit $\underline{U}_0 = 20 \text{ kV} \cdot e^{j30^\circ}$ und $\underline{Z}_0 = (0,01 + j \cdot 2) \Omega$. Wandeln Sie die Wechselspannungsquelle in eine äquivalente Wechselstromquelle um, berechnen Sie hierzu den Kurzschlussstrom.

Kurzschlussstrom:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \frac{20 \text{ kV} \cdot e^{j30^\circ}}{(0,01 + j \cdot 2) \Omega} = (5,04 + j \cdot 8,64) \text{ kA}$$

Komplexer Spannungsteiler und komplexer Stromteiler

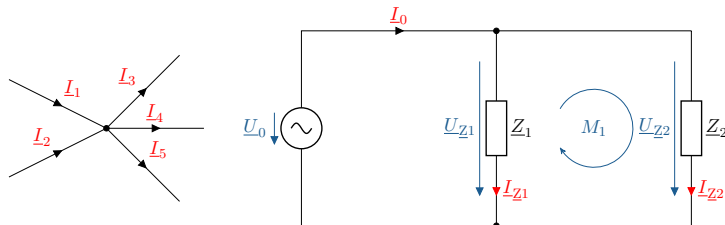
Wie bei der Betrachtung von Gleichstromnetzwerken gelten die Grundgesetze zur Analyse von Wechselstromnetzen.

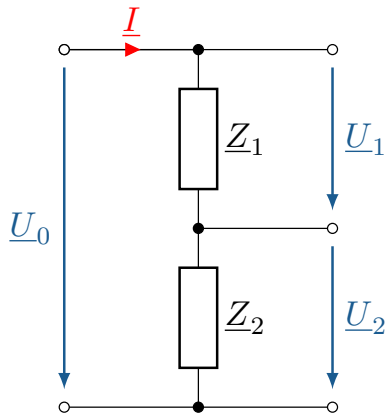
- ▶ Knotenregel:

$$\sum_{k=1}^N \underline{I}_k = 0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5$$

- ▶ Maschenregel:

$$\sum_{k=1}^N \underline{U}_k = \underline{U}_{Z2} - \underline{U}_{Z1} = 0$$





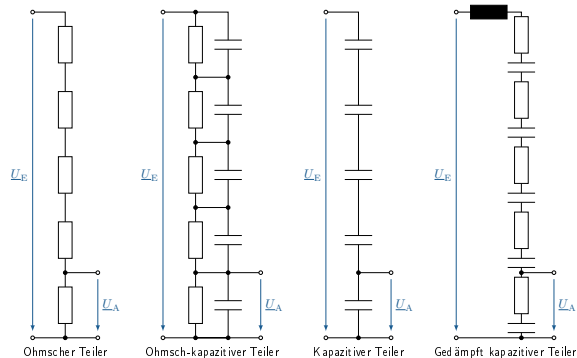
- ▶ Reduzierung einer Gesamtspannung z.B. zur Anpassung eines Signalpegels an dem Eingangsspannungsbereich einer Messschaltung
- ▶ Die Gesamtspannung teilt sich im Verhältnis der komplexen Impedanzen auf:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}$$

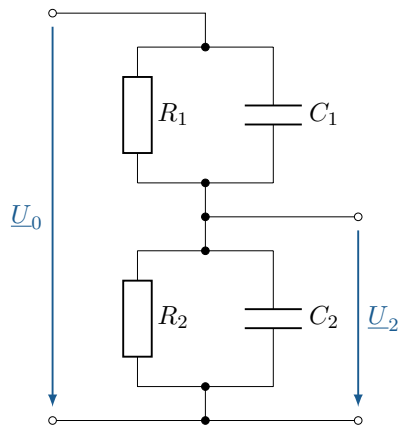
- ▶ Komplexes Teilverhältnis

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Komplexer Spannungsteiler: Anwendungsbeispiel Hochspannungstechnik



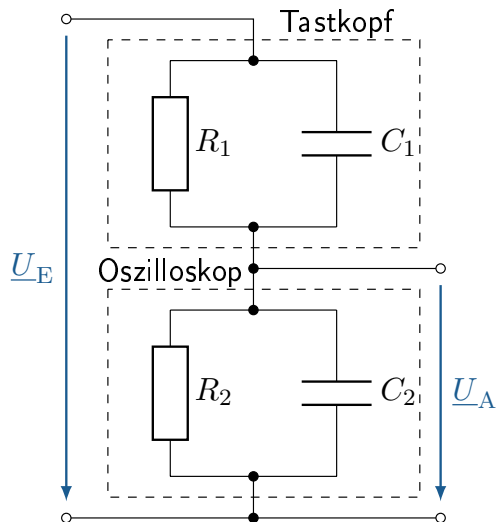
- ▶ Ohmscher Teiler (Gleichspannung)
- ▶ Ohmsch-kapazitiver Teiler (Gleichspannung und Wechselspannung)
- ▶ Kapazitiver Teiler (Wechselspannung)
- ▶ Gedämpft kapazitiver Teiler (Wechselspannung)



- ▶ Ohmsches und kapazitives Teilungsverhältnis
- ▶ Impedanzen anhängig von der Frequenz
- ▶ Komplexes Teilverhältnis ist frequenzabhängig
- ▶ Das Teilverhältnis wird nur im Ausnahmefall unabhängig von der Frequenz!

$$R_1 \cdot C_1 = R_2 \cdot C_2$$

Komplexer Spannungsteiler: Anwendungsbeispiel Tastkopf



- ▶ Ohmsches Teilverhältnis:

$$\frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- ▶ Kapazitives Teilverhältnis:

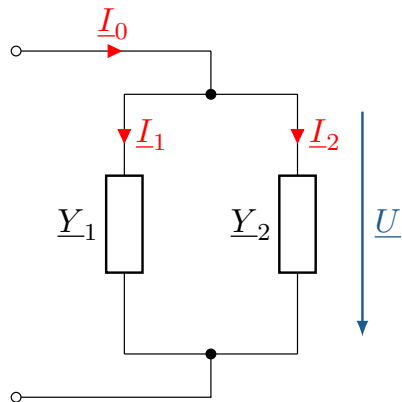
$$\frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

- ▶ Gleichsetzung von ohmschen und kapazitiven Teilverhältnis:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

- ▶ Abgleichbedingung:

$$R_2 \cdot C_2 = R_1 \cdot C_1$$



- ▶ Der Gesamtstrom teilt sich im Verhältnis der komplexen Admittanzen auf:

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{Y}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{Y}_2}$$

- ▶ Impedanzen anhängig von der Frequenz

$$\underline{T}_{i1} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

$$\underline{T}_{i2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

Lernziele: Effektivwert

Die Studierenden

- ▶ verstehen die Funktion des Effektivwertes.
- ▶ kennen die Einflüsse von Amplitude und Kurvenform auf den Effektivwert.
- ▶ können den Effektivwert einer Wechselspannung bzw. eines Wechselstromes berechnen.

Der Effektivwert ermöglicht die Vergleichbarkeit von Wechselspannungen durch den quadratischen Mittelwert (RMS). Der RMS wird über die Wurzel des Mittelwertes und die Quadratur einer Funktion ermittelt:

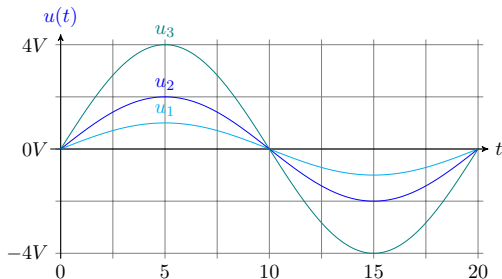
$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt}$$

Bei der Berechnung des Effektivwertes ist das folgende Additionstheorem hilfreich:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

Zusammenhang zwischen Amplitudenwert und Effektivwert:

- ▶ Die Amplitude beschreibt den Scheitelwert \hat{U} der Sinusspannung
- ▶ Verschiedene Amplituden bei unterschiedlichen Sinusspannungen
- ▶ Der Effektivwert ist direkt proportional zum Amplitudenwert $U_{\text{Eff}} \sim \hat{U}$



Beziehung zwischen dem Scheitelwert und dem Effektivwert über den Scheitelfaktor:

$$\hat{U} = C \cdot U_{\text{Eff}}$$

Formfaktoren von verschiedenen Kurvenformen:

Kurvenform:	Sinus	Dreieck	Rechteck
Scheitelfaktor (C):	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1

Merke: Einflüsse auf den Effektivwert

Der Effektivwert ist linear proportional zum Scheitelwert. Der Umrechnungsfaktor vom Effektivwert zum Scheitelwert heißt Scheitelfaktor und hängt von der Kurvenform des Signals ab.

$$f(t) = i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{I}^2 \cdot \sin^2(\omega t) dt}$$

$$I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2T} \int_0^T 1 - \cos(2\omega t) dt}$$

$$\text{mit } \int_0^T 1 dt = T \quad \text{und} \quad \int_0^T \cos(2\omega t) dt = 0$$

$$I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2T} \cdot (T - 0)}$$
$$\sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2}}$$



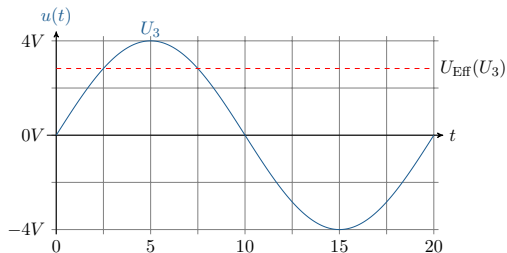
Merke: Effektivwert einer Sinusschwingung

Für rein sinusförmige Spannungen und Ströme gilt der Scheitelfaktor $\sqrt{2}$:

$$I_{\text{Eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad U_{\text{Eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Effektivwert einer Wechselspannung:

- ▶ Formverlauf einer Sinusspannung mit einem Amplitudenwert von $4V$
- ▶ Zugehöriger Effektivwert bei $4V/\sqrt{2}$



Effektivwert:

Die folgenden Aufgaben sollen zum besseren Verständnis des Effektivwertes bearbeitet werden:

- a) Berechnung des Amplitudenwertes der Spannung an einer Haushaltssteckdose.
- b) Berechnung des Effektivwertes davon ausgehend, dass es sich um ein Dreiecksignal handeln würde.

a) Der Amplitudenwert an einer Steckdose mit einem Effektivwert von 230V beträgt:

$$\hat{U} = U_{\text{Eff}} \cdot \sqrt{2} = 230V \cdot \sqrt{2}$$

$$\hat{U} = 325,269V$$

b) Der Effektivwert einer Dreiecksspannung mit einem Scheitelwert von 325V beträgt:

$$U_{\text{Dreieck}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}} = \frac{325V}{\sqrt{3}}$$

$$U_{\text{Dreieck}} = 187,639V$$

Lernziele: Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung

Die Studierenden

- ▶ kennen den Unterschied zwischen der Augenblicksleistung, der Wirkleistung und der Blindleistung.
- ▶ können die Scheinleistung bestimmen und kategorisieren.

Additionstheorem zur Umwandlung eines Produkts aus zwei Sinusfunktionen und verschiedenen Argumenten:

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$$

Die Grundlage der Leistungsberechnung von Wechselgrößen ist der arithmetische Mittelwert:

- ▶ Es soll ein konstanter Wert errechnet werden, welcher nicht mehr zeitabhängig ist
- ▶ Dient der besseren Veranschaulichung, ähnlich wie der Effektivwert

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) dt$$

Mit:

- ▶ T = Periodenlänge
- ▶ t = beliebig wählbarer Anfangszeitpunkt (meistens $t=0$)

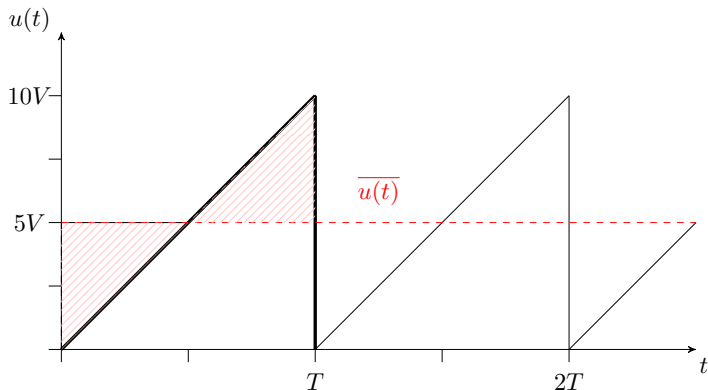
Arithmetischer Mittelwert: Beispiel

Beispiel der Mittelwertbildung anhand einer Sägezahnspannung:

- ▶ Zuerst wird eine Funktion über eine Periodenlänge aufgestellt

$$u(t) = \frac{10 \text{ V}}{T} \cdot t$$

- ▶ Arithmetischer Mittelwert $\overline{u(t)}$:



- ▶ Diese Funktion wird in die Gleichung für den arithmetischen Mittelwert eingesetzt

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{10 \text{ V}}{T} \cdot t \, dt$$

- ▶ Nach auflösen des Integrals erhält man den arithmetischen Mittelwert der Sägezahnspannung

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \left[\frac{10 \text{ V}}{T} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ V}$$

- ▶ Der arithmetische Mittelwert bei reinen Wechselgrößen ist immer null

Wirkleistung bei Gleichstrom:

- ▶ Leistungsberechnung

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

- ▶ Zeitabhängige Wechselgrößen:

$$P = U \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- ▶ Zeitabhängige Spannung und Ströme:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_U) \quad i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_I)$$

- ▶ Augenblicksleistung:

allgemein: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$

sinusförmig:
$$p(t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \left(\underbrace{\cos(\varphi_U - \varphi_I)}_{\text{konstanter Anteil}} + \underbrace{\cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)}_{\text{zeitabhängiger Anteil}} \right)$$

Merke: Augenblicksleistung

Die Augenblicksleistung ist das Produkt aus den Augenblickswerten der Spannung und des Stromes.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Mittlere Leistung:

- ▶ Effektivwert von Spannung U und Strom I
- ▶ Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom
- ▶ **Leistungsfaktor:** $\cos(\varphi)$

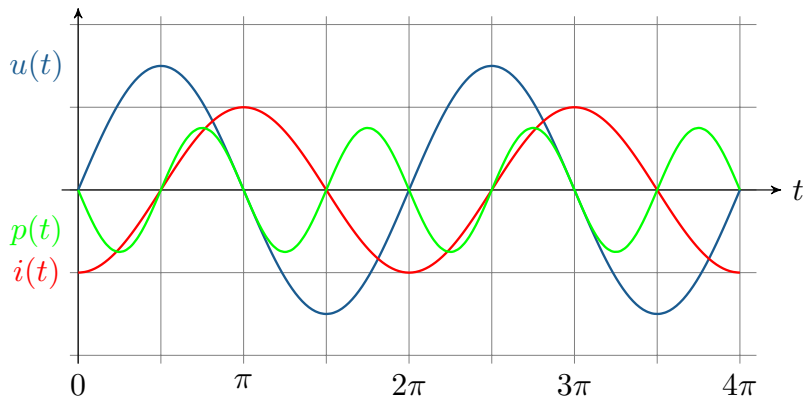
$$\bar{p}_{\text{Sin}} = P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$$

- ▶ Mittlere Leistung an einem idealen Widerstand ohne Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom:

$$\bar{p}_{\text{Ohm}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = U \cdot I$$

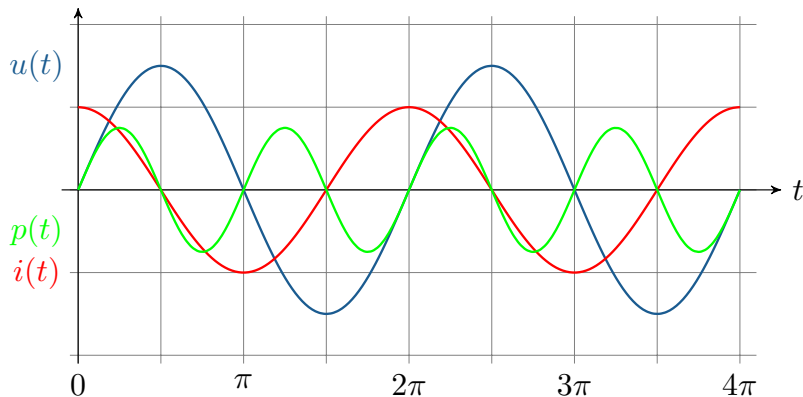
Augenblicksleistung an einer Induktivität:

- ▶ Spannung und Strom um $+\pi/2$ phasenverschoben
- ▶ Gleichanteil gleich null
- ▶ Augenblicksleistung pulsiert mit doppelter Frequenz
- ▶ Die aufgenommene Leistung innerhalb einer Periode wird vollständig wieder abgegeben



Augenblicksleistung an einer Kapazität:

- ▶ Spannung und Strom um $-\pi/2$ phasenverschoben
- ▶ Konstanter Anteil der Augenblicksleistung gleich Null
- ▶ Augenblicksleistung pulsiert mit doppelter Frequenz
- ▶ Aufgenommene Leistung wird vollständig wieder abgegeben



Die Blindleistung Q beschreibt denjenigen Anteil der Leistung, welcher zur Erzeugung von elektrischen und magnetischen Feldern benötigt wird.

- ▶ Periodischer Anteil der Augenblicksleistung mit Gleichanteil gleich Null
- ▶ Induktive Blindleistung:
- ▶ Kapazitive Blindleistung:

$$Q_{\text{Ind}} = U \cdot I \cos(\varphi + 90^\circ) = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \quad Q_{\text{Kap}} = U \cdot I \cos(\varphi - 90^\circ) = -U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

$$[Q] = 1 \text{ Volt} - \text{Ampere} - \text{reaktiv} = 1 \text{ var}$$

Merke: Wirkleistung und Blindleistung

In der komplexen Ebene wird die Leistung durch die Wirkleistung und die Blindleistung erklärt. Die Wirkleistung beschreibt den Realteil und die Blindleistung den Imaginärteil der komplexen Scheinleistung. Die Wirkleistung und die Blindleistung werden wie folgt definiert:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \quad Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

- ▶ Scheinleistung an einem idealen Widerstand:

$$S = U \cdot I = P_R$$

- ▶ Komplexe Scheinleistung:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

$$\text{mit } \underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u}$$

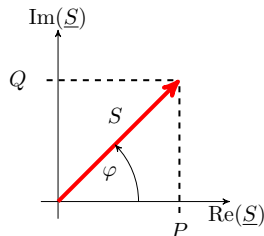
$$\text{und } \underline{I}^* = I \cdot e^{-j\varphi_i}$$

$$\text{folgt } \underline{S} = U \cdot e^{j\varphi_u} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_i}$$

$$= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi)}$$

- ▶ Zeigerdiagramm:



- ▶ Von der Spannung und dem Strom zur komplexen Scheinleistung:

$$U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ = \underline{S}$$

- ▶ Umrechnung Wirkleistung/Blindleistung und Scheinleistung über Leistungsfaktor:

$$P = \cos(\varphi) \cdot S \qquad Q = S \cdot \sin(\varphi)$$

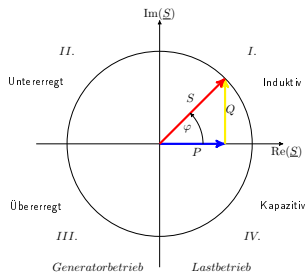
Merke: Komplexe Scheinleistung

Die komplexe Scheinleistung setzt sich aus der Wirkleistung und der Blindleistung zusammen. Sie kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = P + jQ$$

Betriebsdiagramm für die komplexe Scheinleistung eines komplexen Zweipols:

- ▶ Positive Wirkleistung \rightarrow Lastbetrieb
- ▶ Positive Blindleistung \rightarrow Induktiv
- ▶ Scheinleistung im I. Quadranten
- ▶ im II. Quadranten: Induktiver Generatorbetrieb
- ▶ im III. Quadranten: Kapazitiver Generatorbetrieb
- ▶ im IV. Quadranten: Kapazitiver Lastbetrieb



Blindleistung im Generatorbetrieb:

- ▶ Erregerstrom des Generators $>$ Bedarf des magnetischen Feldes \rightarrow Übererregt
Blindleistung wird an das Netz abgegeben \rightarrow Spannungsanhebung
Anwendung: Spannungshaltung
- ▶ Erregerstrom des Generators $<$ Bedarf des magnetischen Feldes \rightarrow Untererregt
Blindleistung muss aus dem Netz bezogen werden \rightarrow Spannungsabsenkung
Eventueller Ausfall der elektrischen Maschinen

Leistungsarten an Wechselgrößen:

- ▶ Wirkleistung $P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi)$: ohmscher Anteil
- ▶ Blindleistung $Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$: induktiver/kapazitiver Anteil
- ▶ Scheinleistung $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$: Gesamtleistung des Systems

Leistungsart			Einheit
Wirkleistung	P	W	(Watt)
Blindleistung	Q	var	(Volt-Ampere-reaktiv)
Scheinleistung	S	VA	(Volt-Ampere)

- ▶ Elektrische Energie:

$$E_{\text{el}} = \int_{t_1}^{t_2} p_{\text{el}}(t) dt$$

- ▶ Aufteilung in Wirkarbeit und Blindarbeit:

$$W_{\text{N}} = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \qquad W_{\text{Q}} = \int_{t_1}^{t_2} Q dt$$

- ▶ Berechnung mit Effektivwerten:

$$W_{\text{N}} = P \cdot (t_2 - t_1) \qquad W_{\text{Q}} = Q \cdot (t_2 - t_1)$$

Leistungsberechnung:

Gegeben sind:

$$\hat{U} = 12 \text{ V} \quad \varphi_U = 90^\circ \quad \hat{I} = 2 \text{ A} \quad \varphi_I = 30^\circ$$

Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

- a) Berechnung von Wirkleistung und Blindleistung.
- b) Berechnung der Scheinleistung mit dem konjugierten komplexen Strom.

a) Die Wirkleistung beträgt:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi) = \frac{12 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(60^\circ)$$

$$P = 6 \text{ W}$$

Die Blindleistung beträgt:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\varphi) = \frac{12 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 \text{ A}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(60^\circ)$$

$$Q = 10,392 \text{ var}$$

b) Die Scheinleistung beträgt:

Lernziele: Drehstrom

Die Studierenden

- ▶ verstehen die grundsätzlichen Gegebenheiten des Drehstroms und der dazugehörigen Operatoren.
- ▶ können Drehstromsysteme mit gleicher Belastung analysieren.
- ▶ kennen die Gegebenheiten von Drehstromsystemen mit unterschiedlicher Phasenbelastung.

- ▶ Je nach Anzahl der Wicklungen werden Phasen erzeugt
- ▶ Im symmetrischen Fall werden die Wicklungen im Generator mit gleichem Winkel α verbaut

$$\alpha = \frac{2\pi}{m}$$

- ▶ mit $m =$ Anzahl der Phasen
- ▶ Für ein Drehstromsystem: $m = 3$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120$$

Der Drehoperator \underline{a} in Abhängigkeit von α :

$$\underline{a} = e^{j\alpha} = e^{j\frac{2\pi}{m}}$$

Für $m = 3$:

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a}^*$$

$$\underline{a}^3 = e^{j2\pi} = 1$$

$$\underline{a}^4 = e^{j\frac{8\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a}$$

$$\underline{a}^5 = e^{j\frac{10\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a}^2$$

⋮



Merke: Drehoperator

Der Winkel α gibt die Phasenverschiebung zwischen den Phasen an. Mithilfe des Drehoperators \underline{a} können Spannungen und Ströme umgerechnet werden.

Für die Spannung der jeweiligen Außenleiter gegenüber einem Neutralleiter gilt:

$$\underline{U}_{Lm} = U_{L1} \cdot e^{-j(m-1)\alpha}$$

Spannung U_m in Abhängigkeit vom Drehoperator \underline{a} :

$$\underline{U}_{L1} = \underline{a}^m \cdot U_{L1} = 1 \cdot U_{L1}$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{a}^{m-1} \cdot U_{L1}$$

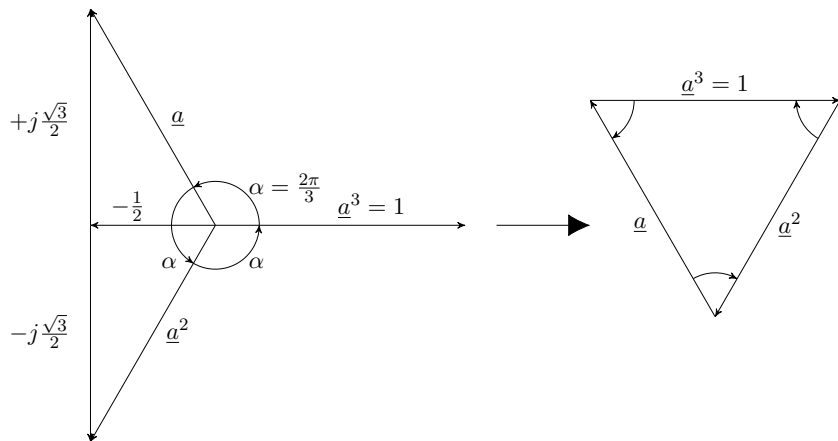
$$\vdots$$

$$\underline{U}_{Lm-1} = \underline{a}^2 \cdot U_{L1}$$

$$\underline{U}_{Lm} = \underline{a} \cdot U_{L1}$$

Mit einer Anzahl von drei Phasen, also $m = 3$, ergibt sich folgender Zusammenhang der drei Spannungen und dem Drehoperator:

$$\underline{U}_{L1} + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{L3} = U_{L1}(1 + \underline{a}^2 + \underline{a})$$



Zeigerdiagramm zum Drehoperator \rightarrow Die Summe ergibt Null

$$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$$

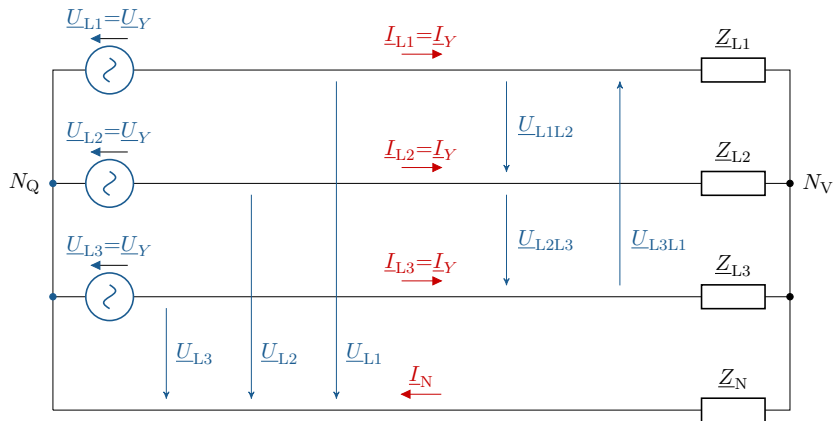
$$\underline{U}_{L1} + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{L3} = 0$$

Die Komponenten können entweder im Stern oder im Dreieck verschaltet werden

- ▶ In der Sternschaltung werden die Phasen auf einen Sternpunkt verschaltet
- ▶ Es liegen dann auf Erzeuger- und Verbraucherseite Knotenpunkte vor, die über einen Neutralleiter verbunden werden können
- ▶ Für jede Phase, die der Generator erzeugt wird eine Spannungsquelle eingetragen
- ▶ Die Verbraucher, die an jeder Phase angeschlossen sind, werden zu einer Impedanz zusammengefasst

Verkettete Systeme im Stern

Das Ersatzschaltbild (ESB) für ein Drehstromsystem mit Erzeugern und Verbrauchern im Stern und Rückleiter



Spannungen

Grundsätzlich gibt es in einem Drehstromsystem drei Spannungen, welche spezifisch genannt werden sollten:

- ▶ Außenleiter-Neutralleiter-Spannung (Sternspannung) U_Y : Spannung des Leiters gegenüber dem Neutralleiter (U_{L1} , U_{L2} , U_{L3})
- ▶ Außenleiter-Spannung (verkettete Spannung) U : Spannung zwischen zwei Leitern (U_{L1L2} , U_{L2L3} , U_{L3L1}) – diese Spannung wird auch als Dreiecksspannung bezeichnet
- ▶ Strangspannung U_{str} : Spannung über die Impedanz des Leiters gegenüber dem Neutralleiter. Je nach Verschaltung ist die Strangspannung entweder gleich der Sternspannung oder der Dreiecksspannung

Ströme

Der Strom im Neutralleiter ergibt sich aus dem 1. Kirchhoffschen Gesetz:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}$$

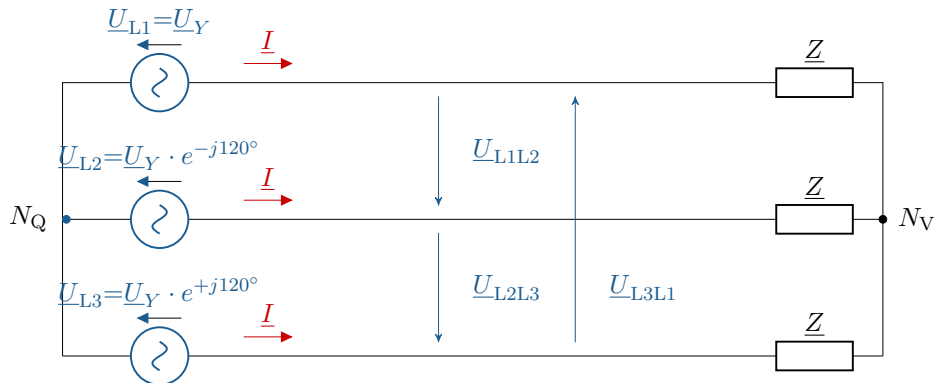
Umgestellt nach dem Ohmschen Gesetz:

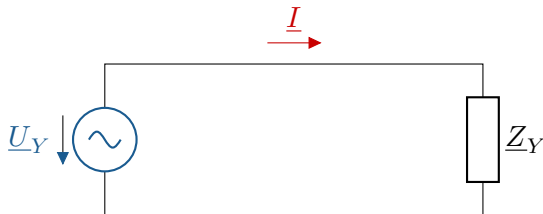
$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{L2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{L3}}{\underline{Z}_3} = \underline{U}_{1m}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{2m}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{3m}\underline{Y}_3$$

Im symmetrischen Fall sind alle Impedanzen gleich groß ($\underline{Z}_{L1} = \underline{Z}_{L2} = \underline{Z}_{L3} = \underline{Z}$),
daraus folgt:

$$\underline{I}_N = \frac{1}{\underline{Z}}(\underline{U}_{L1} + \underline{U}_{L2} + \underline{U}_{L3}) = 0$$

Dreiphasiges ESB mit symmetrischen Verbrauchern im Stern





- ▶ Alternativ kann das ESB auch einphasig aufgestellt werden
- ▶ Wichtig ist dabei die korrekte Bezeichnung der Ströme, Spannungen und Impedanzen



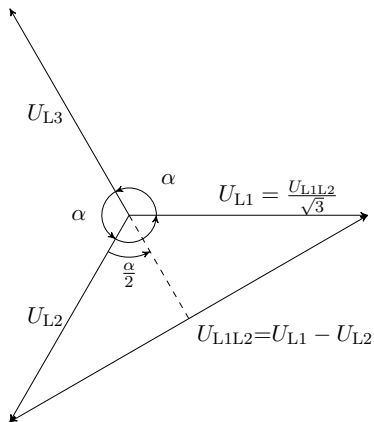
Merke: Symmetrische Komponenten

Symmetrische Komponenten beschreiben eine **gleiche Belastung der Phasen**, beispielsweise in einem Dreiphasensystem. Hier werden alle drei Phasen durch identische Verbraucher belastet.

- ▶ Bei einer Dreieckschaltung werden die Phasen direkt miteinander verschaltet
- ▶ Meistens bleibt die Generatorseite jedoch im Stern verschaltet, um besser Ausgleichströme abzuleiten
- ▶ Die Außenleiterspannung (auch Dreiecksspannung genannt) ergibt sich aus der Differenz der jeweiligen Sternspannungen:

$$\underline{U}_{L1L2} = \underline{U}_{L1} - \underline{U}_{L2}$$

- Das Verhältnis zwischen Dreieck- und Sternspannung kann mit Hilfe einer trigonometrischen Herleitung beschrieben werden:



$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{m}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{G}{H}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{U_{L1L2}}{U_{L1}}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{U_{L1L2}}{U_{L1}}$$

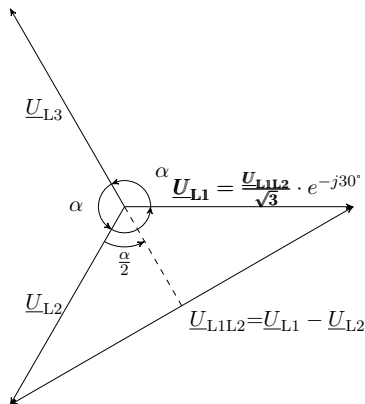
$$U_{L1} = \frac{U_{L1L2}}{\sqrt{3}}$$

Merke: Stern-Dreieck-Umrechnungsfaktor

Die Sternspannung und die Dreieckspannung können über den Umrechnungsfaktor $\sqrt{3}$ ineinander umgewandelt werden:

$$U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}}$$

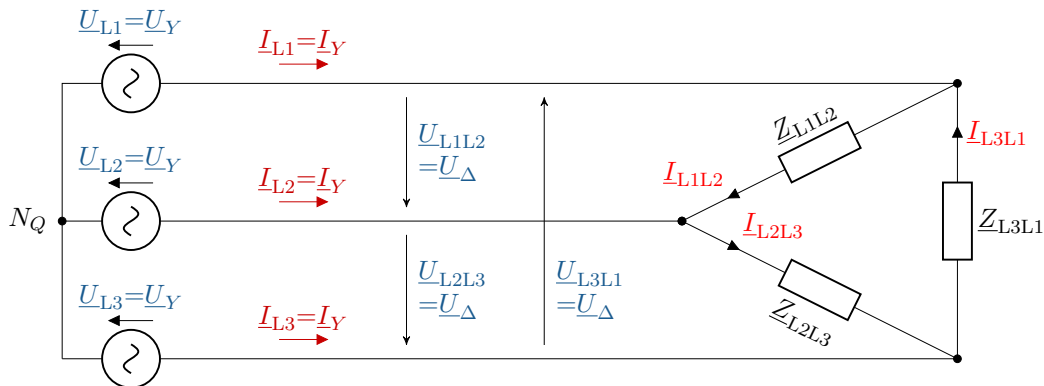
- Die Herleitung kann auf Grundlage des Zeigerdiagramms noch besser veranschaulicht werden:



- In der Praxis wird meist auf das Dreieck-Symbol im Index verzichtet:

$$U_Y = \frac{U_\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

Dreiphasiges ESB mit Erzeugern im Stern und Verbrauchern im Dreieck



- ▶ In der Dreieckschaltung entspricht die Strangspannung der Außenleiter- (Dreieck-) Spannung
- ▶ Im symmetrischen Fall sind auch in dieser Schaltung die Impedanzen gleich groß
- ▶ Für den Strom können folgende Gleichungen aufgestellt werden:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L1L2} - \underline{I}_{L3L1}$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{L2L3} - \underline{I}_{L1L2}$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L3L1} - \underline{I}_{L2L3}$$

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L1L2} - \underline{I}_{L3L1} = \frac{\underline{U}_{L1L2} - \underline{U}_{L3L1}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_Y}{\underline{Z}} \cdot (1 - \underline{a}^2 - \underline{a} + 1) = 3 \cdot \frac{\underline{U}_Y}{\underline{Z}}$$

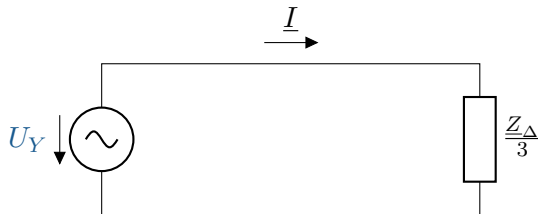
$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{L2L3} - \underline{I}_{L1L2} = \frac{\underline{U}_{L2L3} - \underline{U}_{L1L2}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_Y}{\underline{Z}} \cdot (\underline{a}^2 - \underline{a} - 1 + \underline{a}^2) = 3 \cdot \underline{a}^2 \cdot \frac{\underline{U}_Y}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L3L1} - \underline{I}_{L2L3} = \frac{\underline{U}_{L3L1} - \underline{U}_{L2L3}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_Y}{\underline{Z}} \cdot (\underline{a} - 1 - \underline{a}^2 + \underline{a}) = 3 \cdot \underline{a} \cdot \frac{\underline{U}_Y}{\underline{Z}}$$

- ▶ Das Verhältnis vom Phasenstrom und Dreieckstrom lässt sich äquivalent zum Verhältnis von Stern- und Dreieckspannung berechnen:

$$I_{\text{Str}} = \sqrt{3} \cdot I_{\Delta}$$

- ▶ Auch für die Dreieckschaltung lässt sich ein einphasiges ESB aufstellen:



- ▶ Berechnung der Leistung basiert auf der Gleichung $P = U \cdot I$
- ▶ Im Drehstrom muss für jede Phase die Leistung berechnet werden
- ▶ Im symmetrischen Fall sind Ströme und Spannung in den Phasen gleich, es gilt:

$$\begin{aligned} S &= 3 \cdot I_{\text{str}} \cdot U_Y = 3 \cdot I_{\text{str}} \cdot \frac{U_{\Delta}}{\sqrt{3}} \\ &= 3 \cdot I_{\Delta} \cdot U_{\Delta} = 3 \cdot \frac{I_{\text{str}}}{\sqrt{3}} \cdot U_{\Delta} \\ &= \sqrt{3} \cdot U_{\Delta} \cdot I_{\text{str}} \end{aligned}$$

- ▶ Grundlegend macht es keinen Unterschied, in welcher Schaltung gerechnet wird, es müssen nur die passenden Werte genommen werden

- ▶ Bei gleicher Impedanz ist die Leistung in der Dreieckschaltung um den Faktor 3 größer als bei der Sternschaltung:

Sternschaltung:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot U \cdot \frac{U_Y}{Z} = \frac{U^2}{Z}$$

Dreieckschaltung:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot U \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{U}{Z} = 3 \cdot \frac{U^2}{Z}$$

- ▶ Bisher wurde angenommen, dass die Erzeuger und Verbraucher symmetrisch sind. Nun soll betrachtet werden, wie sich das System verhält, wenn Unsymmetrien vorliegen
- ▶ Die Generatorseite wird jedoch weiterhin symmetrisch und im Stern verschaltet angenommen
- ▶ Für die Verbraucher wird unterschieden in Vierleiternetz in Sternschaltung, Dreileiternetz in Sternschaltung und Dreileiternetz in Dreieckschaltung



Merke: Unsymmetrische Komponenten

Unsymmetrische Komponenten beschreiben im Gegensatz zu symmetrischen Komponenten die **ungleiche Belastung der Phasen** durch unterschiedliche Verbraucher.

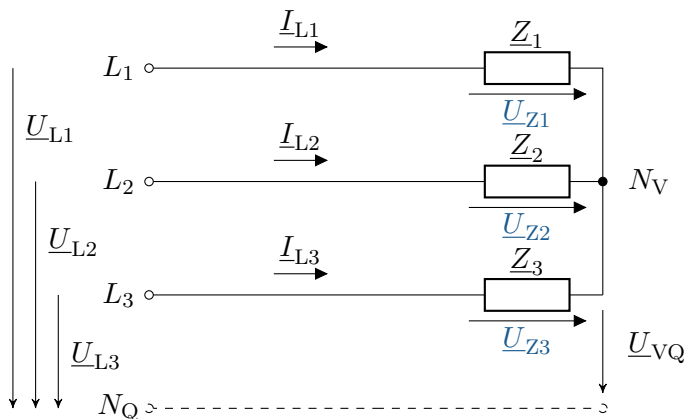
- ▶ Aufbau ist wie bei dem ESB aus dem Kapitel Verkettete Systeme im Stern. Der Rückleiter verbindet die Sternpunkte an Generator- und Verbraucherseite
- ▶ Wenn die Generatorseite symmetrisch bleibt, sind die Sternspannung weiterhin symmetrisch
- ▶ Die Ströme stellen sich je nach den unterschiedlichen Impedanzen ein
Für den Strom im Rückleiter gilt:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3}$$

- ▶ Die Leistung berechnet sich nach der angegebenen Gleichung.
Es muss im unsymmetrischen Fall für jeden Leiter einzeln errechnet werden

$$\underline{S} = \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{L3}$$

Vereinfachtes ESB: Dreileiternetz in Sternschaltung mit unsymmetrischen Verbrauchern



- ▶ Ähnliche Voraussetzungen wie beim Vierleiternetz in Sternschaltung, jedoch ohne Rückleiter. Dadurch kann der Strom nicht über den Rückleiter zurückfließen und wirkt sich deswegen auf die anderen Phasen aus
- ▶ Dementsprechend muss auch der Spannungsabfall zwischen den Sternpunkten und die über den Verbrauchern berechnet werden
- ▶ Die Werte können über zwei Methoden ermittelt werden:
 1. Impedanzen rechnerisch in Dreieckschaltung umwandeln und mit den bekannten Methoden berechnen:
Denn: In der Dreieckschaltung sind die Spannungen über die Impedanzen gleich den Leiterspannungen

- ▶ Die Werte können über zwei Methoden ermittelt werden:
 2. Mit Hilfe von Ohmschen und Kirchhoffschen Gesetzen Gleichungen aufstellen.
Für die Differenzspannung zwischen den beiden Sternpunkten kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$\underline{U}_{VQ} = \frac{\frac{U_{L1}}{\underline{Z}_1} + \frac{U_{L2}}{\underline{Z}_2} + \frac{U_{L3}}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{U_{L1} \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + U_{L2} \cdot \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1 + U_{L3} \cdot \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1}$$

- ▶ Die Leistung wird in jeder Phase berechnet, wichtig ist, die Spannung lastseitig über den Verbrauchern zu nehmen:

$$\underline{S} = \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{Z1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{Z2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{Z3}$$

- ▶ Die Gleichung für die Leistungsberechnung kann auch netzseitig betrachtet werden:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{L3} - \underline{U}_{VQ} \cdot (\underline{I}_{L1}^* + \underline{I}_{L2}^* + \underline{I}_{L3}^*) \\ &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{L3}\end{aligned}$$

- ▶ Über die Knotenregel kann einer der Ströme wiederum durch die beiden anderen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + (-\underline{I}_{L1}^* - \underline{I}_{L2}^*) \cdot \underline{U}_{L3} \\ &= (\underline{U}_{L1} - \underline{U}_{L2}) \cdot \underline{I}_{L1}^* + (\underline{U}_{L2} - \underline{U}_{L3}) \cdot \underline{I}_{L2}^* \\ &= \underline{U}_{L3L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L2L3} \cdot \underline{I}_{L2}^*\end{aligned}$$

- ▶ In der Dreieckschaltung steht kein Sternpunkt zur Verfügung, demnach kann diese nur im Dreileiternetz ausgeführt werden.
Auf Grund der symmetrischen Einspeisung sind die Außenleiterspannungen symmetrisch.
- ▶ Die Ströme stellen sich nach der jeweilige Impedanz ein:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L1L2} - \underline{I}_{L3L1}$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{L2L3} - \underline{I}_{L1L2}$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L3L1} - \underline{I}_{L2L3}$$

- ▶ Die Summe der Außenleiterströme muss auch bei unsymmetrischen Strömen stets Null sein
- ▶ Somit ergibt sich für die Leistungsberechnung die gleiche wie bei der Sternschaltung im Dreileiternetz und somit auch die gleichen Umformungen

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{I}_{L1L2}^* \cdot \underline{U}_{L1L2} + \underline{I}_{L2L3}^* \cdot \underline{U}_{L2L3} + \underline{I}_{L3L1}^* \cdot \underline{U}_{L3L1} \\ &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}_{L3}^* \cdot \underline{U}_{L3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{I}_{L1}^* \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}_{L2}^* \cdot \underline{U}_{L2} + (-\underline{I}_{L1}^* - \underline{I}_{L2}^*) \cdot \underline{U}_{L3} \\ &= (\underline{U}_{L1} - \underline{U}_{L2}) \cdot \underline{I}_{L1}^* + (\underline{U}_{L2} - \underline{U}_{L3}) \cdot \underline{I}_{L2}^* \\ &= \underline{U}_{L3L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L2L3} \cdot \underline{I}_{L2}^*\end{aligned}$$

Lernziele: Mehrphasensysteme

Die Studierenden

- ▶ verstehen die Funktionen von Mit-, Gegen- und Nullsystem.
- ▶ können die Drehstromleistung der verschiedenen Systeme berechnen.
- ▶ können Ersatzschaltbilder für symmetrische Quellen, Lasten und Leitungen erstellen.

Um eine solche Transformation sinnvoll einzusetzen, sollten gewisse Anforderungen erfüllt werden:

1. Die Symmetrien der realen Netze und Betriebsmittel müssen vorteilhaft genutzt werden, sodass die Berechnung im transformierten System einfacher sind als im Originalsystem
2. Es müssen sowohl Ströme als auch Spannungen mit den gleichen Transformationsvorschriften behandelt werden
3. Die Leistungen sollen in beiden Systemen identisch sein, falls das nicht möglich ist sollen die Leistungen über einen konstanten Faktor umzurechnen sein

- ▶ Ziel der Transformation ist, ein unsymmetrisches System von n Zeigern in n Systeme mit symmetrischer Zeigeranordnung zu überführen
- ▶ Im Drehstrom bekommt jeder Leiter (L_1, L_2, L_3) ein System mit symmetrischer Zeigeranordnung
- ▶ Mit Hilfe des Drehoperators lassen sich Symmetriebedingungen für jeden Leiter aufstellen, die sogenannten Zerlegungsgleichungen:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a} \cdot \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_0 + \underline{a} \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_2$$

Hier ist anzumerken, dass alles was für den Strom gilt an Zusammenhängen auch für die Spannung gilt!

- ▶ Die Zerlegungsgleichungen sollen im nächsten Schritt gleichgesetzt werden und zum Strom des jeweiligen Systems umgesetzt werden
- ▶ Für das Nullsystem ergibt dies folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3} &= 3 \cdot \underline{I}_0 + \underline{I}_1 \cdot (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) + \underline{I}_2 \cdot (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) \\ &= 3 \cdot \underline{I}_0 \\ \Leftrightarrow \underline{I}_0 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3})\end{aligned}$$

- ▶ Um die addierten Ströme für den Strom des Mitsystems umzustellen, muss ein Zwischenschritt durchgeführt werden
- ▶ Es soll zuerst der Drehoperator aus dem Vorfaktor gerechnet werden, indem mit dem passend Drehoperatoren multipliziert wird:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{L1} &= \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{a} \cdot \underline{I}_{L2} &= \underline{a} \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L3} &= \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a} \cdot \underline{I}_2\end{aligned}$$

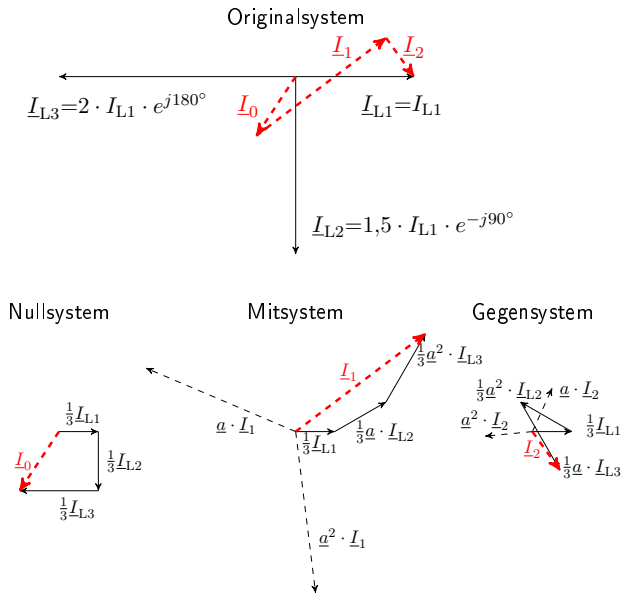
$$\begin{aligned}\underline{I}_{L1} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L3} &= \underline{I}_0 \cdot (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) + 3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \cdot (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) \\ &= 3 \cdot \underline{I}_1 \\ \Leftrightarrow \underline{I}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L3})\end{aligned}$$

- Der Strom für das Gegensystem errechnet sich äquivalent zum Mitsystem:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{L1} &= \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L2} &= \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^4 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{a} \cdot \underline{I}_{L3} &= \underline{a} \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{L1} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L3} &= (1 + \underline{a}^2 + \underline{a})\underline{I}_0 + (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) \cdot \underline{I}_1 + 3 \cdot \underline{I}_2 \\ &= 3 \cdot \underline{I}_2 \\ \Leftrightarrow \underline{I}_2 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{L3})\end{aligned}$$

Zeigerdiagramm eines unsymmetrischen Stroms im Dreiphasensystem und die Transformationen



- ▶ Für eine vereinfachte Schreibweise können die Transformationsgleichungen in Matrixschreibweise beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix}$$

- ▶ Die Schreibweise kann noch weiter vereinfacht werden, wenn der Term mit den Drehoperatoren und der Term mit Vorfaktor in einer Matrix zusammengefasst wird:

$$[\underline{T}] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix}$$

- ▶ Werden die Gleichungen zusammengesetzt erhält man in der Kompaktschreibweise folgende Gleichung:

$$[\underline{I}_{012}] = [\underline{T}] \cdot [\underline{I}_{L1L2L3}]$$

- ▶ Gemäß den Rechenregeln für Matrizen kann mit der Inversen von $[\underline{T}]$ die Rücktransformation erfolgen:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{I}_{L1L2L3}] = [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}]$$

Merke: Mit-, Gegen- und Nullsystem

Ein System wird zur Analyse in die drei Systeme: Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem transformiert.

Das **Mitsystem** wird mit dem Index 1 versehen: \underline{I}_1

Das **Gegensystem** wird mit dem Index 2 versehen: \underline{I}_2

Das **Nullsystem** wird mit dem Index 0 versehen: \underline{I}_0

- ▶ Die Gleichung zur Leistungsberechnung kann zur Vereinfachung auch in Matrixschreibweise ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}\underline{S}_{L1L2L3} &= \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L2} \cdot \underline{I}_{L2}^* + \underline{U}_{L3} \cdot \underline{I}_{L3}^* \\ &= \begin{bmatrix} \underline{U}_{L1} & \underline{U}_{L2} & \underline{U}_{L3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1}^* \\ \underline{I}_{L2}^* \\ \underline{I}_{L3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{L1L2L3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1L2L3} \end{bmatrix}_t^*\end{aligned}$$

- ▶ Mit den Drehoperatoren können die Spannungen und Ströme auf eine Phase bezogen werden
- ▶ Daraus ergibt sich die bekannte Vereinfachung:

$$\begin{aligned}\underline{S}_{L1L2L3} &= \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* + \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^* \\ &= 3 \cdot \underline{U}_{L1} \cdot \underline{I}_{L1}^*\end{aligned}$$

- Nun kann mit der Matrixschreibweise die Transformation in die neuen Systeme berechnet werden:

$$\begin{aligned} [\underline{U}_{L1L2L3}] &= ([\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{U}_{012}]) = [\underline{U}_{012}] \cdot [\underline{T}]^{-1} \\ [\underline{I}_{L1L2L3}]^* &= ([\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}])^* = [\underline{T}]^{-1*} \cdot [\underline{I}_{012}]^* \\ \underline{S}_{L1L2L3} &= [\underline{U}_{012}]_t \cdot [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{T}]^{-1*} \cdot [\underline{I}_{012}]^* \\ &= [\underline{U}_{012}]_t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}^* \cdot [\underline{I}_{012}]^* \\ &= [\underline{U}_{012}]_t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot [\underline{I}_{012}]^* \\ &= [\underline{U}_{012}] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot [\underline{I}_{012}]^* \\ &= 3 \cdot (\underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* + \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^*) = 3 \cdot \underline{S}_{012} \end{aligned}$$

- ▶ ESB dienen grundlegend immer der einfacheren Betrachtung und einem erleichterten Verständnis der Komponenten
- ▶ Es werden sich nun verschiedene Betriebsmittel angeschaut und die Transformationen in verschiedenen Netzsituationen beschrieben

- ▶ Als erste Komponente werden die Spannungsquellen betrachtet
- ▶ Es wird die Formel für die Transformation herangezogen und in die Matrixschreibweise überführt
- ▶ Die Zusammenhänge zwischen der Sternspannung und den einzelnen Phasen sind bereits bekannt

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{L1} \\ \underline{U}_{L2} \\ \underline{U}_{L3} \end{bmatrix}$$
$$\underline{U}_{012} = [\underline{T}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_Y \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_Y \\ \underline{a} \cdot \underline{U}_Y \end{bmatrix}$$

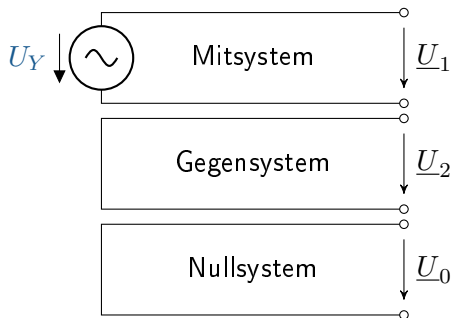
- Wird die Gleichung für die transformierten Systeme aufgelöst, erhält man die Spannungsergebnisse

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot U_Y \cdot (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) = 0$$

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{3} \cdot U_Y \cdot (1 + \underline{a} \cdot \underline{a}^2 + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}) = U_Y$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{3} \cdot U_Y \cdot (1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^2 + \underline{a} \cdot \underline{a}) = 0$$

- ▶ Den Spannungen entsprechend können die ESB der einzelnen Systeme aufgestellt werden
- ▶ Mit den Ergebnissen des Gegen- und Nullsystems kann bildlich gesagt werden, dass diese kurzgeschlossen sind



- ▶ Für die Betrachtung der Lasten soll eine Sternschaltung mit Rückleiter gewählt werden
- ▶ Es wird in jedem Leiter, auch im Rückleiter, eine Impedanz angenommen
- ▶ Für den symmetrischen Fall werden die Impedanzen \underline{Z} als gleich groß angenommen, lediglich die Impedanz im Rückleiter kann von den anderen abweichen und bekommt einen eigenen Index \underline{Z}_E .

$$\underline{U}_{L1} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{L1} + \underline{Z}_E \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3})$$

$$\underline{U}_{L2} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{L2} + \underline{Z}_E \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3})$$

$$\underline{U}_{L3} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{L3} + \underline{Z}_E \cdot (\underline{I}_{L1} + \underline{I}_{L2} + \underline{I}_{L3})$$

- ▶ Auch hier kann mittels Matrixschreibweise vereinfacht werden

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{L1} \\ \underline{U}_{L2} \\ \underline{U}_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z} + \underline{Z}_E & \underline{Z}_E & \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_E & \underline{Z} + \underline{Z}_E & \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_E & \underline{Z}_E & \underline{Z} + \underline{Z}_E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix}$$

Mit...

$$[\underline{Z}_{L1L2L3}] = \begin{bmatrix} \underline{Z} + \underline{Z}_E & \underline{Z}_E & \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_E & \underline{Z} + \underline{Z}_E & \underline{Z}_E \\ \underline{Z}_E & \underline{Z}_E & \underline{Z} + \underline{Z}_E \end{bmatrix}$$

...ergibt sich

$$[\underline{U}_{L1L2L3}] = [\underline{Z}_{L1L2L3}] \cdot [\underline{I}_{L1L2L3}]$$

- ▶ Wird mit den Transformationsgleichungen umgeformt folgt:

$$[\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{U}_{012}] = [\underline{Z}_{L1L2L3}] [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}]$$

- ▶ Wie bei den Spannungsquellen sollen aus der Transformation die Impedanzen abhängig vom Originalsystem errechnet werden
- ▶ Durch Umstellung wird ein Verhältnis zwischen transformierten Impedanzen und Impedanzen des Originalsystems geschaffen

$$[\underline{T}] \cdot [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{U}_{012}] = [\underline{T}] \cdot [\underline{Z}_{L1L2L3}] [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}]$$

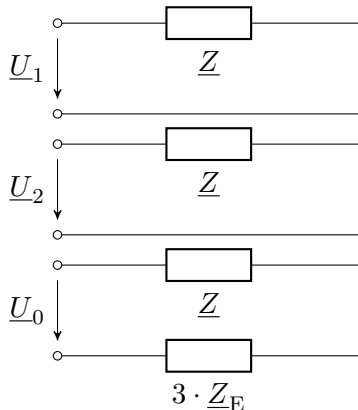
$$[\underline{U}_{012}] = [\underline{T}] \cdot [\underline{Z}_{L1L2L3}] [\underline{T}]^{-1} \cdot [\underline{I}_{012}]$$

$$[\underline{Z}_{012}] = [\underline{T}] \cdot [\underline{Z}_{L1L2L3}] [\underline{T}]^{-1}$$

- ▶ Mit der Durchführung der Matrixoperation ergibt sich der gewünschte Zusammenhang von Original- und Transformationssystem

$$[\underline{Z}_{012}] = \begin{bmatrix} \underline{Z} + 3\underline{Z}_E & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z} \end{bmatrix}$$

- ▶ Mit den errechneten Zusammenhängen können die ESB der einzelnen Systeme aufgestellt werden
- ▶ Im Mit- und Gegensystem treten die gleichen Impedanzen auf
- ▶ Im Nullsystem tritt zudem eine Impedanz mit dreifachem Wert auf



- ▶ Die Leitung ist die Komponente, welche die Spannungsquelle und die Verbraucher verbindet
- ▶ Es treten grundsätzlich Eigenimpedanzen und Koppelimpedanzen auf (Leiter-Erde-Impedanzen werden vernachlässigt)
- ▶ Dementsprechend treten in jedem Strang Eigenimpedanzen und zwei Koppelimpedanzen (zu den anderen Strängen) auf
- ▶ Die Spannung über einen Strang wird definiert als Spannungsdifferenz der Spannung am Anfang und am Ende der Leitung

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{L1A} - \underline{U}_{L1B} \\ \underline{U}_{L2A} - \underline{U}_{L2B} \\ \underline{U}_{L3A} - \underline{U}_{L3B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_S & \underline{Z}_K & \underline{Z}_K \\ \underline{Z}_K & \underline{Z}_S & \underline{Z}_K \\ \underline{Z}_K & \underline{Z}_K & \underline{Z}_S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix}$$

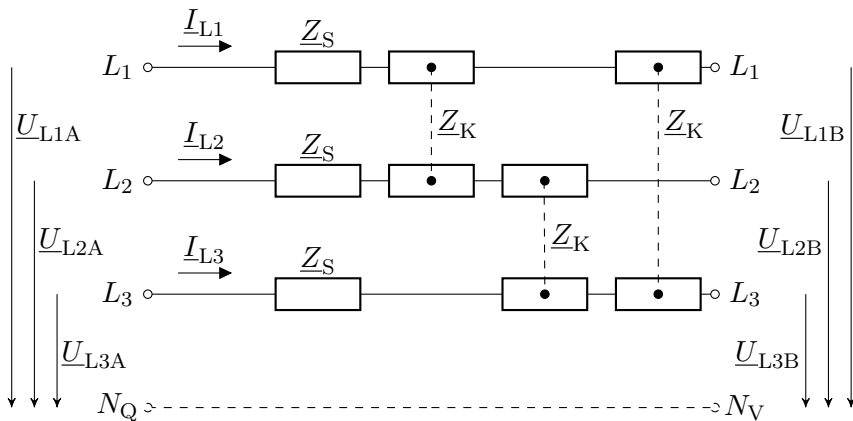
- ▶ Mit $U_{L1A} - U_{L1B} = U_{L1}$, ... kann wieder eine Kompaktschreibweise abgeleitet werden

$$[\underline{U}_{L1L2L3}] = [\underline{Z}_{L1L2L3}] \cdot [\underline{I}_{L1L2L3}]$$

- ▶ Die Gleichung ist nun sehr ähnlich wie bei den symmetrischen Verbrauchern
- ▶ Somit können die gleichen Umformungen durchgeführt werden, sodass auch hier eine direkte Abhängigkeit von Originalsystem und Transformationssystem vorliegt

$$[\underline{Z}_{012}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_S + 2 \cdot \underline{Z}_K & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_S - \underline{Z}_K & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_S - \underline{Z}_K \end{bmatrix}$$

- ▶ ESB der drei Systeme für symmetrische Leitungen:



- ▶ Die gestrichelte Leitung soll die Sternpunktbehandlung auf Erzeugungs- und Verbraucherseite widerspiegeln zur Referenz der Sternspannungen

Merke: Ersatzschaltbilder

Für die Ersatzschaltbilder lassen sich die folgenden Zusammenhänge feststellen:

- ▶ Die Quellspannung wird im Mitsystem verortet
- ▶ Für die Lasten wird die Impedanz des Rückleiters im Nullsystem eingetragen