GET it digital

Modul 7:

Periodische Größen

Torben Meibeck M.Eng.
Dr.-Ing. Stefan Kempen

Ein Kooperationsvorhaben
empfohlen durch die

DIGITALE HOCHSCHULE NRW

gefördert durch

Ministerium für
Kultur und Wissenschaft
des Landes Nordrhein-Westfalen

Stand: 11. September 2025

Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 7: Periodische Größen“ von T. Meibeck, S. Kempen Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de
Das Werk ist online verfügbar unter:
https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-7-periodische-groessen

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Grundlagen Komplexe Zahlen **2**
2.1 Komplexe Zahlenebene . . . 2
2.2 Graphische Darstellung und Rechnungen mit komplexen Zahlen . . . 5

3 Zeigerdiagramme in der Wechselstromtechnik **7**
3.1 Periodische Wechselspannung . . . 7
3.2 Komplexer Drehzeiger der Amplitude . . . 8

4 Komplexe Wechselstromrechnung **11**
4.1 Impedanz und Attmitanz in der komplexen Ebene . . . 11
4.2 Komplexer Widerstand . . . 12
4.3 Kapazität . . . 14
4.4 Induktivität . . . 15
4.5 Quellen von Wechselgrößen . . . 16
4.6 Komplexer Spannungsteiler und komplexer Stromteiler . . . 20

5 Effektivwert **24**
5.1 Grundlagen: Quadratischer Mittelwert und Additionstheorem . . . 24
5.2 Amplitude . . . 24
5.3 Kurvenform . . . 25
5.4 Effektivwert . . . 26

6 Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung **28**
6.1 Grundlagen: Additionstheorem und Arithmetischer Mittelwert . . . 28
6.2 Wirkleistung und Blindleistung . . . 29
6.3 Scheinleistung . . . 33
6.4 Leistung und elektrische Energie . . . 35

7 Drehstrom **37**
7.1 Symmetrische Komponenten . . . 37
7.1.1 Verkettete Systeme im Stern . . . 40
7.1.2 Verkettete Systeme im Dreieck . . . 42
7.1.3 Leistung im symmetrischen Drehstromnetz . . . 45
7.2 Unsymmetrische Komponenten . . . 45
7.2.1 Vierleiternetz in Sternschaltung . . . 46
7.2.2 Dreileiternetz in Sternschaltung . . . 46
7.2.3 Dreileiternetz in Dreieckschaltung . . . 48

8 Mehrphasensysteme - Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem **49**
8.1 Mit-, Gegen- und Nullsystem . . . 49
8.2 Drehstromleistung . . . 52
8.3 Ersatzschaltbilder . . . 53
8.3.1 Symmetrische Spannungsquelle . . . 53
8.3.2 Symmetrische Last . . . 54
8.3.3 Symmetrische Leitungen . . . 55

A Übungsaufgaben **57**
A.1 Komplexe Zahlen 1 . . . 57
A.2 Komplexe Zahlen 2 . . . 57
A.3 Zeigerdiagramme 1 . . . 57
A.4 Komplexe Wechselstromrechnung 1 . . . 58
A.5 Komplexe Wechselstromrechnung 2 . . . 58

A.6 Komplexe Wechselstromrechnung 3 58
A.7 Effektivwert 1 59
A.8 Leistungsberechnung 1 59
A.9 Drehstrom 1 60
A.10 Drehstrom 2 60
A.11 Mehrphasensysteme 1 60

B Lösungen zu den Übungsaufgaben **61**
B.1 Komplexe Zahlen 1 61
B.2 Komplexe Zahlen 2 62
B.3 Zeigerdiagramme 1 64
B.4 Komplexe Wechselstromrechnung 1 64
B.5 Komplexe Wechselstromrechnung 2 65
B.6 Komplexe Wechselstromrechnung 3 66
B.7 Effektivwert 1 66
B.8 Leistungsberechnung 1 67
B.9 Drehstrom 1 68
B.10 Drehstrom 2 68
B.11 Mehrphasensysteme 1 70

1 Einleitung

In den vorangegangenen Modulen wurden die grundsätzlichen physikalischen Gegebenheiten und die Grundbauteile besprochen. Außerdem wurden die grundlegenden technischen Verhaltensweisen in Gleichstromnetzwerken geklärt. Bei den Gleichstromnetzwerken werden die elektrischen Netzwerke mit einem DC-Strom (Direct Current) versorgt, Wechselstromnetzwerke mit einem AC-Strom (Alternating Current). Der DC-Strom fließt dauerhaft in eine Richtung. Beim AC-Strom wechselt die Stromrichtung regelmäßig seine Richtung. Die Regelmäßigkeit des Wechsels der Stromrichtung des Wechslestromes erfolgt periodisch nach einer bestimmten Frequenz. Beispielsweise ist der ideale elektrische Widerstand als Bauteil nicht frequenzabhängig. Zusätzlich Bauteile, wie der Kondensator oder eine Spule, weisen bei unterschiedlichen Frequenzen verschiedene komplexe Widerstände auf. Um diese periodischen Größen zu bestimmen werden die folgenden Themengebiete besprochen:

- Zeigerdiagramm
- Komplexe Wechselstromrechnung
- Effektivwert
- Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung
- Drehstrom
- Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem

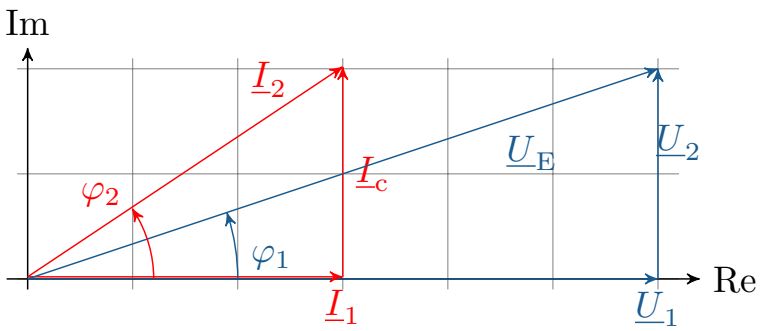


Abbildung 1.1: **Zeigerdiagramm.** Die Größen Spannung und Strom in der Darstellung als Zeiger.

2 Grundlagen Komplexe Zahlen

Die in der Wechselstromtechnik genutzen Zeigerdiagramme geben einen schnellen Überblich über die Größe und die Ausrichtung der Spannung und des Stromes. Die zugrunde liegenden Begriffe der komplexen Zahlenebene und der Aufbau von Zeigerdiagrammen wird folgend weiter Erläutert und an einem Beispiel erklärt.

Lernziele: Komplexe Zahlen

Die Studierenden können

- mit Zahlen in der komplexen Ebene umgehen.
- Zeigerdiagramme von komplexen Zahlen darstellen.
- komplexe Zahlen berechnen.

2.1 Komplexe Zahlenebene

Um den Aufbau von Zeigerdiagrammen zu Überblicken ist ein grundlegendes Verständnis über die komplexe Zahlenebene nötig. Für die elementaren Rechenoperationen reichen die natürlichen Zahlen mit Null und die rationalen Zahlen aus. Die rationalen Zahlen können als endliche oder periodische Dezimalzahlen dargestellt werden. Die irrationalen Zahlen lassen sich hingegen als Dezimalzahlen darstellen, welche unendliche viele Stellen aufweisen und dabei nicht periodisch sind. Die reellen Zahlen setzen sich aus den rationalen Zahlen und den irrationalen Zahlen zusammen. Allerdings ist beispielsweise das Wurzelziehen aus einer negativen Zahl in der reellen Zahlenebene nicht möglich. Hierfür wird die komplexe Zahlenebene eingeführt. in der komplexen Zahlenebene wird der Raum der reellen Zahlen um die imaginäre Einheit j erweitert. So ergibt in der komplexen Zahlenebene das Wurzelziehen aus -1 die imaginäre Einheit j.

$$\mathrm{j} = \sqrt{-1} \tag{2.1}$$

Das Quadrieren der imaginären Einheit ergibt wiederum -1.

$$\mathrm{j}^2 = -1 \tag{2.2}$$

Eine komplexe Zahl $\underline{Z}$ beschreibt einen Ort in der komplexen Ebene. Um in einem zweidimensionalen Koordinatensystem einen Ort eindeutig festzulegen werden zwei Koordinaten benötigt. Die beiden Koordinaten zur Beschreibung einer komplexen Zahl $\underline{Z}$ werden in der komplexen Ebene als Realteil und Imaginärteil beschrieben (vgl. Gleichung 2.3). Komplexe Zahlen werden meist durch einen Unterstrich gekennzeichnet, wobei der Realteil und der Imaginärteil reelle Zahlen darstellen.

$$\underline{Z} = \mathit{Realteil} + \mathrm{j} \cdot \mathit{Imaginärteil} \tag{2.3}$$

$$\underline{Z} = \mathrm{Re}(\underline{Z}) + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}) \tag{2.4}$$

In der Komplexene Ebene wird der Realteil auf die Abzisse und der Imaginärteil auf die Ordinate aufgetragen. Es werden die Abkürzungen Re = Realteil und Im = Imaginärteil verwendet. Das Koordinatensystem einer komplexen Ebene wird in der Abbildung 2.1 erläutert. Der Ort der komplexen

Zahl kann durch Richtungspfeile, welche auch als Vektoren oder Zeiger bezeichnet werden, dargestellt werden. Die Darstellung der komplexen Zahl in kartesischen Koordinaten erfolgt durch die Zerlegung in Realteil der komplexen Zahl $\mathrm{Re}(\underline{Z})$ und Imaginärteil der komplexen Zahl $\mathrm{Im}(\underline{Z})$ kombiniert mit der imaginären Einheit j. Komplexe Zahlen können auch in Polar-Koordinaten dargestellt werden. Dies erfolgt durch den Betrag $|\underline{Z}|$ der komplexen Zahl $\underline{Z}$ und durch den Winkel φ, den der Zeiger der komplexen Zahl mit der reellen Achse einschließt.

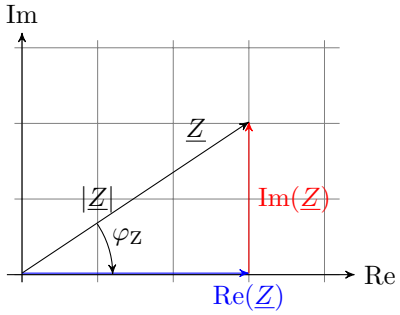


Abbildung 2.1: **Zeigerdiagramm einer komplexen Zahl.** Eine komplexe Zahl $\underline{Z}$, welche sich durch $Re(\underline{Z})$ und $Im(\underline{Z})$ in kartesischen Koordinaten und durch den Betrag der komplexen Zahl $|\underline{Z}|$ sowie den zugehörigen Winkel φ in Polar-Kooradinaten darstellen lässt.

Die beiden Darstellungsformen lassen sich ineinander transformieren. Behilflich ist hier die Euler'sche Formel. Die Euler'sche Formel zeigt, dass sich der Ordinatenwert und der Abzissenwert des Einheitskreises durch die trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus berechnen lassen. Die Euler'sche Formel wird in der Gleichung 2.5 dargestellt.

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\chi} = \cos(\chi) + \mathrm{j}\cdot\sin(\chi) \tag{2.5}$$

Unter Verwendung der Euler'schen Formel können durch die Hinzunahme des Betrages der komplexen Zahl die Polar-Koordinaten in kartesische Koordinaten transformiert werden. Dies wird durch die Gleichung 2.6 erläutert.

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|\cdot\cos(\varphi) + \mathrm{j}\cdot|\underline{Z}|\cdot\sin(\varphi) = \mathrm{Re}(\underline{Z}) + \mathrm{j}\cdot\mathrm{Im}(\underline{Z}) \tag{2.6}$$

Über den Satz des Pythagoras lässt sich aus den bekannten Realteil und Imaginärteil der Betrag der komplexen Zahl für die Polar-Koordianten bestimmen. Der dazugehörige Winkel ergibt sich aus dem arctan mit dem Verhältnis aus Imaginärteil zu Realteil im Argument. Mit diesen Informationen kann eine komplexe Zahl wie in der Gleichung 2.7 in Polar-Koordinaten transformiert werden.

$$\underline{Z} = \sqrt{(\mathrm{Re}(\underline{Z}))^2 + (\mathrm{Im}(\underline{Z}))^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\arctan(\frac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{\mathrm{Re}(\underline{Z})})} = |\underline{Z}|\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\varphi} \tag{2.7}$$

Merke: Darstellungsformen komplexer Zahlen

Kartesische Darstellung:

$$\underline{Z} = \mathrm{Re}(\underline{Z}) + j \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z})$$

Polarform:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

Trigonometrische Darstellung:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|(\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi))$$

Zu den Operationen bei komplexen Zahlen zählt die Konjugation. Beim Konjugieren einer komplexen Zahl wird der j durch -j ersetzt (Negation des Imaginärteils). Die Konjugation wird wie in Gleichung 2.8 dargestellt mit einem Stern gekennzeichnet.

$$\underline{Z}^* = (\mathrm{Re}(\underline{Z}) + \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}))^* = \mathrm{Re}(\underline{Z}) - \mathrm{j} \cdot \mathrm{Im}(\underline{Z}) \tag{2.8}$$

Der Betrag einer komplexen Zahl lässt sich durch die Multiplikation der komplexen Zahl mit ihrer Konjugierten bestimmen (vgl. Gleichung 2.9). Statt des Betrages, welcher eine Wurzel enthält, wird auch das Betragsquadrat verwendet. Es stellt ebenfalls ein Maß für den Abstand der Zahl zum Ursprung dar, ist aber einfacher zu berechnen.

$$|\underline{Z}| = \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Z}^*} \rightarrow |\underline{Z}|^2 = \underline{Z} \cdot \underline{Z}^* \tag{2.9}$$

Bei der Addition und der Subtraktion von komplexen Zahlen empfiehlt es sich, diese zunächst in kartesiche Koordianten umzuwandeln. Auf diese Weise lassen sich der Realteil und der Imaginärteil der komplexen Zahl separat miteinander verrechnen.

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \mathrm{Re}(\underline{Z}_1) + \mathrm{Re}(\underline{Z}_2) + j \cdot (\mathrm{Im}(\underline{Z}_1) + \mathrm{Im}(\underline{Z}_2)) \tag{2.10}$$

$$\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = \mathrm{Re}(\underline{Z}_1) - \mathrm{Re}(\underline{Z}_2) - j \cdot (\mathrm{Im}(\underline{Z}_1) - \mathrm{Im}(\underline{Z}_2)) \tag{2.11}$$

Die Darstellung in Polar-Koordinaten empfiehlt sich für die Verrechnungen von komplexen Zahlen durch Multiplikation und Division. Die Multiplikation von komplexen Zahlen setzt sich auf dem Produkt der Beträge und der Summe der jeweiligen Winkel zusammen (vgl. Gleichung 2.12). Bei der Division werden die Beträge dividiert und die Winkel voneinander subtrahiert (vgl. Gleichung 2.13).

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = |\underline{Z}_1| \cdot |\underline{Z}_2| \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{2.12}$$

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|} \cdot e^{j \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{2.13}$$

Merke: Grundrechenarten komplexer Zahlen

Für die **Addition und Subtraktion** wird in der Regel die **kartesische Darstellungsform** für komplexen Zahlen verwendet. Bei der **Multiplikation und Division** von komplexen Zahlen wird die **Polarform** gewählt.

Da die Division zunächst nur für reelle Zahlen außer Null definiert ist, wird die komplexe Zahl im Nenner so erweitert, dass dieser reell wird.

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \cdot \frac{\underline{Z}_2^*}{\underline{Z}_2^*} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2^*}{|\underline{Z}_2|^*} \tag{2.14}$$

Durch die Addition einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen hebt sich ihr Imaginärteil auf (vgl. Gleichung 2.15). Entsprechend verschwindet durch die Subtraktion der Realteil (vgl. Gleichung 2.16).

$$\mathrm{Re}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z} + \underline{Z}^*}{2} \tag{2.15}$$

$$\mathrm{Im}(\underline{Z}) = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}^*}{2j} \tag{2.16}$$

2.2 Graphische Darstellung und Rechnungen mit komplexen Zahlen

Mithilfe von Zeigerdiagrammen lassen sich komplexe Zahlen auch zeichnerisch lösen. Werden die komplexen Zahlen wie empfohlen in der kartesischen Form dargestellt, können die Bestandteile der Realteile und der Imaginärteile direkt abgelesen werden und in ein Koordinatensystem eingestragen werden. Die komplexen Zahlen werden beispielsweise in der Abbildung X eingetragenen. Bei der Addition von komplexen Zahlen wird entweder Z_1 an Z_2 gesetzt oder umgekehrt. Denn bei der Addition gilt weiterhin das Kommutativgesetz. Hier werden durch die gestrichelten Pfeile die Parallelverschiebungen von Z_1 und Z_2 angegeben. Die Verschiebungen enden beide an der selben Koordinate. Hier können separat der Realteil und der Imaginärteil aus der Summe der beiden komplexen Zahlen abgelesen werden.

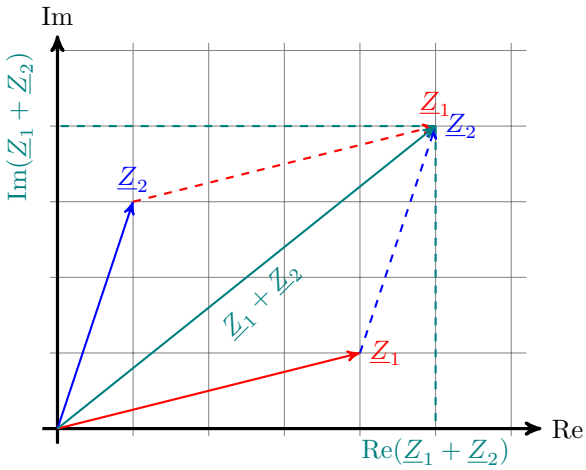


Abbildung 2.2: **Addition von komplexen Zahlen.** Zeichnerische Lösung einer Addition von zwei komplexen Zahlen im Zeigerdiagramm

Die zeichnerische Lösung der Subtraktion von komplexen Zahlen erfolgt vergleichbar mit der Addition. Zu beachten ist dabei, dass wie in anderen Zahlensystemen bei der Subtraktion von zwei komplexen Zahlen das Kommutativgesetz nicht gilt. Wird von der komplexen Zahl Z_2 Z_1 subtrahiert, ändert sich die Richtung von Z_1. Hier erfolgt dann wieder die Parallelverschiebung, allerdings lediglich von Z_1. An dem sich ergebenen neuen Vektor können dann wieder der Realteil und der Imaginärteil abgelesenw erden.

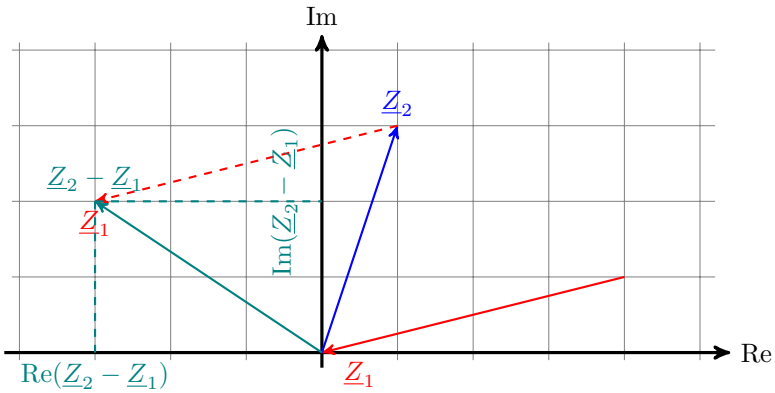


Abbildung 2.3: **Subtraktion von komplexen Zahlen.** Zeichnerische Lösung einer Subtraktion von zwei komplexen Zahlen im Zeigerdiagramm

Die in der Abbildung 2.4 dargestellten komplexen Zahlen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ werden zur Multiplikation in Polar-Koordinaten abgebildet. Durch die zuvor beschriebenen Rechnenregeln der Multiplikation für komplexe Zahlen können die Werte für die für das Ergebnis $\underline{Z}_3$ bestimmt werden. Die Multiplikation aus den Zeigerlängen gibt die Länge des Produktes an. Die Summe aus den beiden komplexen Zahlen den Winkel der neuen komplexen Zahl an.

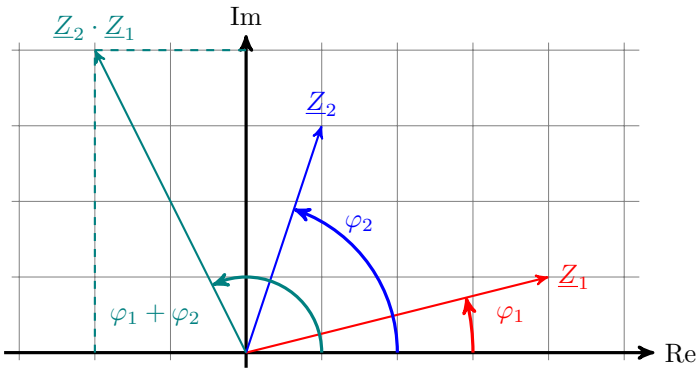


Abbildung 2.4: **Multiplikation von komplexen Zahlen.** Zeichnerische Lösung einer Multiplikation von zwei komplexen Zahlen in Polar-Koordinaten im Zeigerdiagramm.

3 Zeigerdiagramme in der Wechselstromtechnik

In der Wechselstromtechnik finden die komplexen Zahlen unter Anderem als Zeiger Verwendung. In linearen Netzwerken haben sinusförmige und monofrequente Quellengrößen nur sinusförmige und monorfequente Spannungen und Ströme zur Folge. Im Stationären Zustand unterscheiden sich die Spannungen und Ströme nur in ihrer Amplitude und der zugehörigen Phase. Alle Signale haben dabei eine identische Frequenz. Die Stationären und harmonischen Schwingungen können durch ihren Zeitverlauf im Liniendiagramm oder durch komplexe Zahlen durch Zeiger dargestellt werden. Die Beschreibung von Schwingungen durch komplexe Zahlen ermöglicht die Darstellung durch ruhende Zeiger, wobei nur die relative Lage zueinander ausgedrückt wird.

Lernziele: Zeigerdiagramme

Die Studierenden

- verstehen die Kenngrößen von periodischen Wechselspannungen.
- können mit den komplexen Drehzeigern der Amplituden umgehen.

3.1 Periodische Wechselspannung

In der Abbildung 3.1 wird ein Wechselspannungssignal mit dem Scheitelwert (Amplitudenwert) $\hat{U}$ dargestellt. Der Versatz des Wechselspannungssignals auf der Abszisse wird durch den Zeitpunkt t_0 ausgedrückt. Der Punkt in dem das Wechselspannungssignal die Ordinate kreuzt gibt den Wechselspannungswert U zum Zeitpunkt t=0 an.

Das Wechselspannungssignal ist periodisch in T. Eine Periode wird bei dem angegebenen Wechselspannungsignal durch einen kompletten Durchlauf einer positiven und negativen Halbwelle definiert. So wird ab t_0 nach einer Periode der Zeitpunkt $t_0 + T$ und nach zwei Perioden der Zeitpunkt $t_{0+2\mathrm{T}}$ erreicht.

Mit der Übertragung der angegebenen Werte auf ein Kreisdiagramm lässt sich der Zusammenhang der Wechselspannung mit der komplexen Darstellung erklären. Auf diese Weise kann die Wechselspannungsgröße $U(t = 0)$ zum Zeitpunkt 0 durch die Länge und Ausrichtung des Zeigers beschrieben werden. Der Scheitelwert enspricht der Länge des Zeigers im Kreisdiagramm. Der Winkel φ_u beschreibt den Phasenwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$.

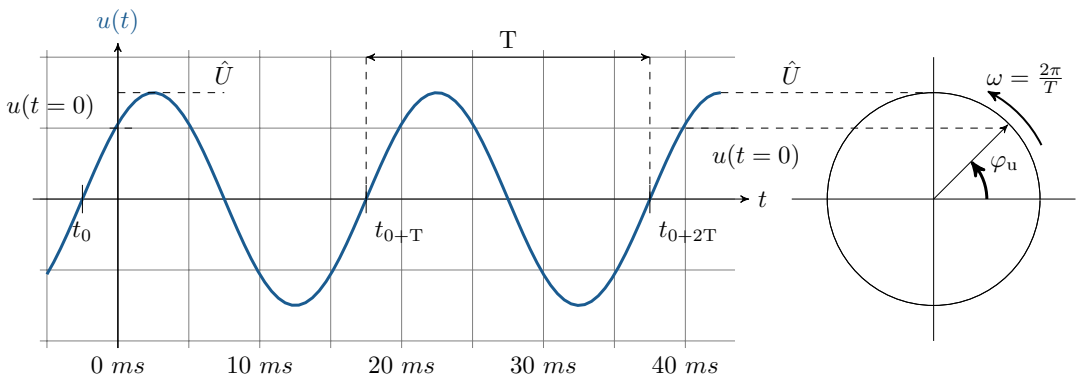


Abbildung 3.1: **Periodische Wechselspannung über der Zeit mit zwei Perioden.** Anhand der Wechselspannung lassen sich z.B. der Amplitudenwert und die Periodedauer ermitteln.

Die Kreisfrequenz ω kann mithilfe der Periodendauer T oder der Frequenz f angegeben werden. Weiter wird die Kreisfrequenz auch als Winkelgeschwindigkeit beschrieben. Über den Zusammenhang zwischen der Periodendauer und der Frequenz können die Größen ineinander umgerechnet werden. Die erläuterten Zusammenhänge werden in den Gleichungen 3.1 beschrieben.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{T} \quad \text{wird} \quad \omega = 2\pi f \tag{3.1}$$

Angenommen der Durchlauf einer kompletten Periode bei einer Frequenz von 50 Hz dauert 20 ms (vgl. Abbildung 3.2). Übertragen auf das Gradmaß und das Radmaß ergeben sich so Winkelangaben für den Durchlauf einer Periode. Der Winkel nach der kompletten Periode T entspricht dem Umlauf eines vollen Kreises. Der Umlauf eines vollen Kreises entspricht dazu Die Phasenverschieben t_0 lässt sich auch in der Winkeldarstellung als Phasenwinkel φ_N beschreiben.

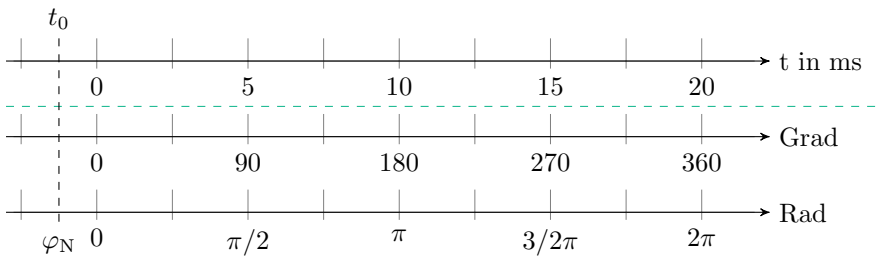


Abbildung 3.2: **Verschiedene Maßangaben.** Vegleich zwischen Gradmaß und Radmaß, der Umlauf eines Kreises entspricht 360° oder 2π.

Merke: Wechselgrößen

Eine Wechselspannung erklärt einen regelmäßigen Polaritätswechsel mit dem **Amplitudenwert** $\hat{U}$ und der **Periodendauer** T.

Der zeitabhängige Spannungswert $u(t)$ einer Wechselspannung ist von mehreren Einflussgrößen abhängig. Dazu gehören der Scheitelwert und die Frequenz der Wechselspannung sowie der dazugehörige Phasenwinkel. Über das Verhältnis vom Zeitpunkt t zur Periodendauer lässt sich $u(t)$ bestimmen.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_\mathrm{N}) = \hat{U} \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_\mathrm{N}) = \hat{U} \cdot \sin(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_N) \tag{3.2}$$

3.2 Komplexer Drehzeiger der Amplitude

Der komplexe Spannungswert sowie der komplexe Stromwert können als Zeiger dargestellt werden. Hier wird auf die Darstellungsart der Polar-Koordinaten zurückgegriffen.

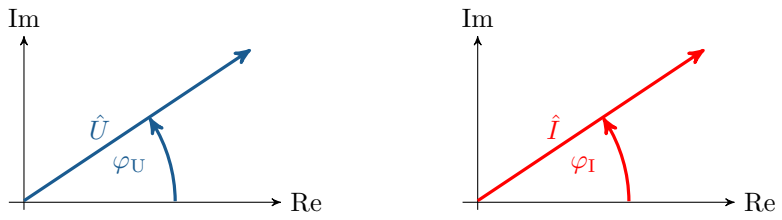


Abbildung 3.3: **Spannungs- und Stromzeiger.** Ein Spannungszeiger mit dazugehörigen Phasenwinkel und äquivalent dazu ein Stromzeiger mit Phasenwinkel

Eine harmonische Wechselgröße kann als mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Zeiger dargestellt werden. Die Zeitfunktion ist die Projektion des Zeigers auf die reelle Achse. Der rotierende Zeiger wird durch eine zeitabhängige komplexe Zahl beschrieben. Wie bei den komplexen Zahlen erklärt, können der Imaginärteil und der Realteil jeweils sparat bestimmt werden. Über die Winkelfunktionen kann der Realteil und der Imaginärteil der komplexen Spannung berechnet werden.

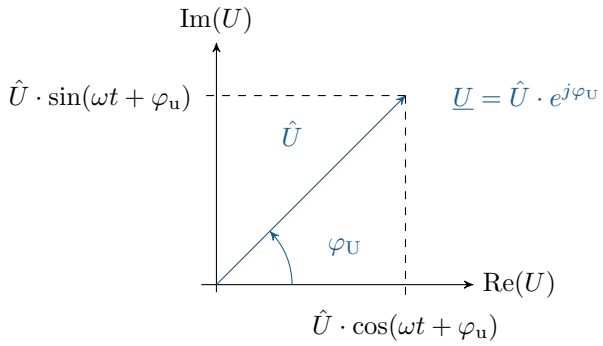


Abbildung 3.4: **Zeigerdarstellung einer komplexen Wechselspannung.** Wechselspannungszeiger mit der Aufteilung in Realteil und Imaginärteil.

Merke: Komplexe Drehzeiger von Spannung und Strom

Die Wechselgrößen Spannung und Strom werden als komplexe Drehzeiger dargestellt. Die Drehzeiger beschreiben dabei **Augenblickswerte** $u(t)$, welche sich mit konstanter **Winkelgeschwindigkeit** ω verändern.

Die Beschreibung von periodischen Größen an elektrischen Komponenten erfolgt durch feste Spannungszeiger und Stromzeiger. Das Verhalten der verschiedenen Komponenten ist dabei jeweils unterschiedlich. In der Abbildung 3.5 werden ein Widerstand, ein Kondensator als Kapazität und eine Spule als Induktivität mit ihren zugehörigen Spannungs- und Stromzeigern dargestellt. Das genaue Verhalten der drei Komponenten wird im folgenden Kapitel näher betrachtet.

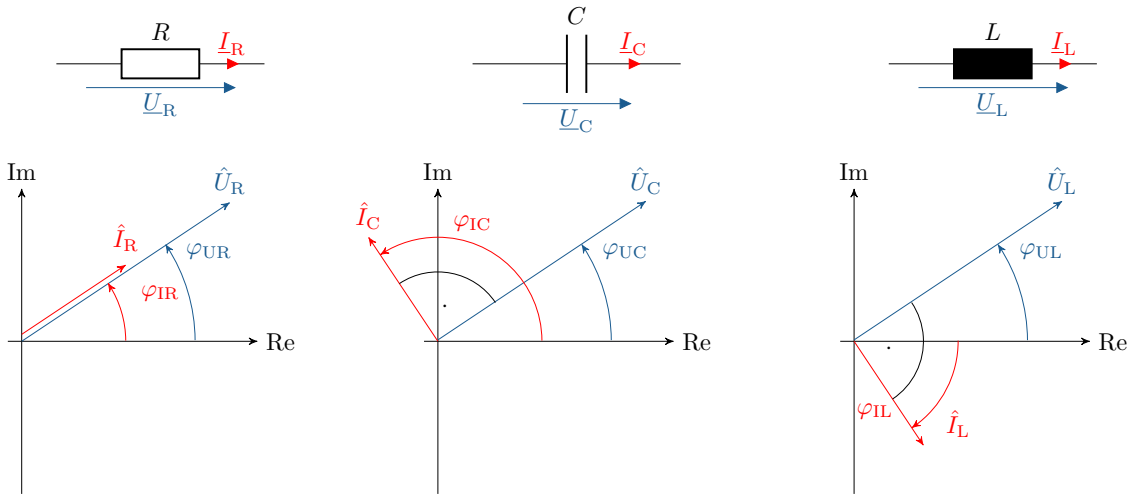


Abbildung 3.5: **Verschiedene Bauteile und die Wechselspannungszeiger.** Die Bauteile Widerstand, Kondensator und Spule mit zugehörigen Spannungs- und Stromzeigern.

4 Komplexe Wechselstromrechnung

In Gleichstromnetzwerken wird mit konstanten Spannungsquellen und Stromquellen gearbeitet. Im Gegensatz dazu kommen bei der komplexen Wechselstromrechnung Quellen mit sinusförmigen Wechselgrößen zum Einsatz. Die elektrische Analyse von Komponenten in einem Wechselspannungsnetzwerk erfolgt komplex. Die komplexen Spannungen $\underline{U}$ und Ströme $\underline{I}$ erzeugen zeitabhängige Spannungswerte u(t) und Stromwerte i(t). Die Gleichung 4.1 beschreibt den angegebenen Zusammenhang zwischen komplexen und zeitabhängigen Strom- und Spannungswerten für einen ohmschen Widerstand.

$$\underline{U} = \underline{Z}_{\mathrm{R}} \cdot \underline{I} \quad \rightarrow \quad u(t) = R \cdot i(t) \tag{4.1}$$

Abgesehen von der komplexität der Wechselstromrechnungen, gelten weiterhin die Regeln zur Berechnung elektrischer Netzwerke, wie Maschen- und Knotenregeln, das Verhalten von Reihen- und Paralellschaltungen und die Knotenpotentialanalyse sowie die Maschenstromanalyse. Bei all diesen Beispielen ist darauf zu achten, mit den komplexen Wechselgrößen zu rechnen. Für die Erläuterung von elektrische Netzwerken mit komplexen Wechselgrößen werden im Folgenden diese Tehmengebiete näher betrachtet:

Lernziele: Wechselstromrechnung

Die Studierenden

- kennen die komplexe Impedanz und die komplexe Attmitanz.
- verstehen das Verhalten eines Widerstandes, eines Kondensators und einer Spule an einer Wechselspannung.
- kennen Wechselquellen und die dazugehörigen Umwandlungsvorschriften.

4.1 Impedanz und Attmitanz in der komplexen Ebene

Durch eine Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom kommt es zu einer Erzeugung eines Blindanteils der Impedanz. Der Blindanteil lässt sich jedoch auf der reellen Achse nicht darstellen, weshalb die reelle Achse um eine imaginäre Achse erweitert wird, welche gemeinsam die komplexe Ebene bilden. Die Abbildung 4.1 zeigt den Zeiger der komplexen Impedanz in der komplexen Ebene mit Imaginäranteil und Realanteil.

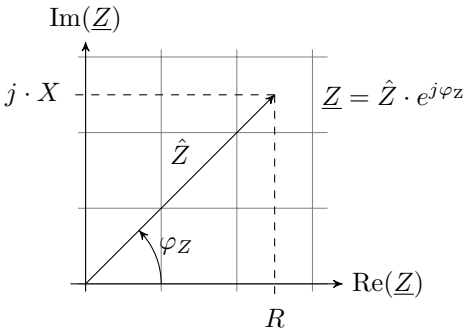


Abbildung 4.1: **Zeiger der komplexen Impedanz.** Die Impedanz in der komplexen Ebene mit der Aufteilung in Realanteil R und Imaginäranteil X.

So besteht auch die komplexe Impedanz $\underline{Z}$ nach Gleichung 4.2 aus einem Realteil und aus einem Imaginärteil. Der Realteil besteht aus dem ohmschen Anteil, welcher den Wirkwiderstand einer Impedanz darstellt. Der Wirkwiderstand wird auch als Resistanz R bezeichnet. Zweiter Bestandteil der Impedanz ist der Imaginärteil, welcher auch als Reaktanz X bezeichnet wird. Die Reaktanz eines elektrischen Netzwerkes setzt sich beisplielsweise aus den kapazitiven und induktiven Auswirkungen zusammen und wird mit der imaginären Einheit j versehen. Die Einheit der komplexen Impedanz ist wie in der Gleichstromtechnik Ohm Ω.

$$Impedanz = Resistanz + j \cdot Reaktanz \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = R + j \cdot X \tag{4.2}$$

$$[\underline{Z}] = 1\ Ohm = 1\ \Omega$$

Wie in der Gleichstromtechnik existiert ein Leitwert des elektrischen Widerstandes in der komplexen Wechselstromtechnik. Dieser Kehrwert der komplexen Impedanz wird als Admittanz $\underline{Y}$ bezeichnet (vlg. Gleichung 4.3). Die Einheit des komplexen Leitwertes bleibt wie in der Gleichstromtechnik Siemens S.

$$R = \frac{1}{G} \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \tag{4.3}$$

Auch die Admittanz lässt sich in einen Wirkleitwert und einen Blindleitwert differenzieren. Der Wirkleitwert G der Admittanz wird als Konduktanz und der Blindleitwert B der Admittanz wird als Suszeptanz bezeichnet (vgl. Gleichung 4.4).

$$Admittanz = Konduktanz + j \cdot Suszeptanz \quad \rightarrow \quad \underline{Y} = G + j \cdot B \tag{4.4}$$

$$[\underline{Y}] = 1\ Siemens = 1\ S$$

Merke: Komplexe Impedanz und komplexe Admittanz

Der Gleichstromwiderstand wird bei einer **Wechselspannung** zur **komplexen Impedanz** $\underline{Z}$. Der Kehrwert des Widerstandes, der Leitwert, wird bei einer Wechselspannung zur **komplexen Admittanz** $\underline{Y}$.

4.2 Komplexer Widerstand

Der komplexe Widerstand eines ohmschen Verbrauchers besteht aus dem Wirkanteil R und dem Blindanteil des des ohmschen Widerstandes. Der ohmsche Widerstand R verkörpert die Eigenschaft leitfähiger Materialien elektrische Leistung in thermische Leistung umzuwandeln. Der Blindanteil des Widerstands wandelt die Leistung der Wechselströme nicht in Wärme um. Der Blindanteil des elektrischen Widerstands wird als X_{R} beziechnet. Da der ideale elektrische Widerstand allerdings rein ohmsch und damit rein Real wirkt, wird in der Regel oft einfach das Formelzeichen R verwendet. Die Gleichung 4.5 erklärt diese Zusammenhänge.

$$\underline{Z}_{\mathrm{R}} = R + j \cdot X_{\mathrm{R}} \quad \rightarrow \quad X_{\mathrm{R-ideal}} = j \cdot 0\ \Omega \quad \rightarrow \quad \underline{Z}_{\mathrm{R}} = R \tag{4.5}$$

An den zeitabhängigen Werten für die Spannung und den Strom ergeben sich die Zusammenhänge des idealen ohmschen Widerstandes nach Gleichung 4.6.

$$\underline{U} = \underline{Z}_{\mathrm{R}} \cdot \underline{I} \quad \rightarrow \quad u(t) = R \cdot i(t) \tag{4.6}$$

Ein idealer elektrischer Widerstand ist ein reiner Wirkwiderstand und weist keinerlei Blindwiderstandanteile auf. Der reale elektrische Widerstand ist mit parasitären Effekten behaftet. Die Schaltbilder eines idealen und eines realen elektrischen Widerstandes werden in der Abbildung 4.2 gegenübergestellt. Diese parasitären Effekte wirken sich induktiv, verdeutlicht durch die Spule, und kapazitiv, verdeutlicht durch die Kapazität, auf die Schaltung aus. Neben der Frequenzabhängigkeit der parasitären Effekte, werden auch die Spannung und der Strom so aufgeteilt, dass nicht mehr die gesamte Leistung am Widerstand abfällt. die Impedanz des idealen elektrischenWiderstands ist nicht frequenzabhängig.

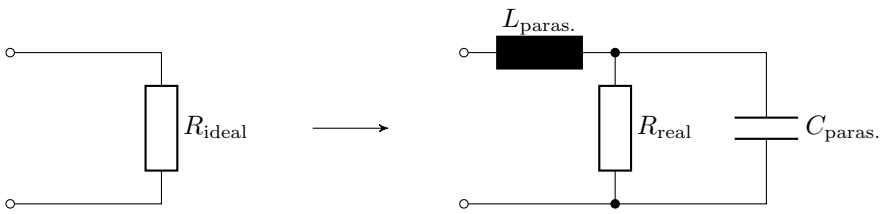


Abbildung 4.2: **Gegenüberstellung eines idealen und eines realen elektrischen Widerstandes.** Der reale Widerstand weist im Gegensatz zum idealen Widerstand seriell induktive und parallel kapazitive Effekte auf.

Zwischen der Spannung und dem Strom existiert beim idealen elektrischen Widerstand keine Phasenverschiebung. In der Abbildung 4.3 werden die Sinuswellen für die Spannung und den Strom an einem idealen Widerstand aufgetragen. Sie liegen ohne Phasenverschiebung übereinander, somit befinden sie sich in Phase.

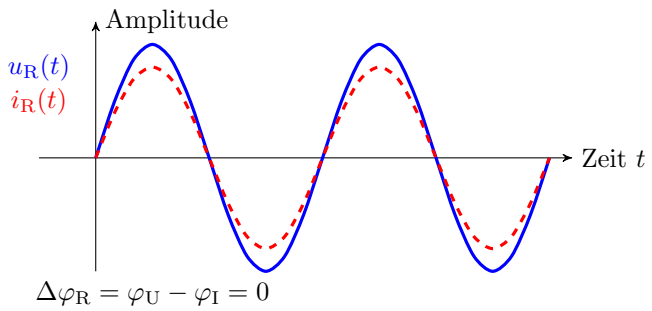


Abbildung 4.3: **Sinuschwingungen an einem Widerstand.** Wechselspannung (blau) und Wechselstrom (rot) an einem idealen Widerstand. Es resultiert an dem Widerstand keine Phasenverschiebung zwischen der Wechselspannung und dem Wechselstrom.

Merke: Sinusschwingung an einem Widerstand

Der **elektrische Widerstand** weist zwischen der Wechselspannung und dem zugehörigen Wechselstrom **keine Phasenverschiebung** auf.

4.3 Kapazität

Der Kondesnator als Bauteil in der Elektrotechnik weist die Fähigkeit auf Energie zwischen den zwei Platten in dem elektrischen Feld zu speichern. Die Größe eines Kondensators wird in der Kapazität C angegeben. Die Einheit der Kapazität ist das Farad F. Die komplexe Impedanz eines Kondensators lässt sich nach Gleichung 4.7 berechnen. Im Gegensatz zum idealen Widerstand wirkt der ideale Kondensator im Wechselstromkreis nicht lediglich als Wirkwiderstand. Der reale Kondensator wirkt sowohl durch einen Wirkwanteil, als auch durch einen Blindanteil. Die Kreisfrequenz ω ist frequenzabhängig. So ergeben sich bei hohen Frequenzen niedrige Impedanzwerte für den Kondensator. Andersherum ergeben sich hohe Impedanzwerte bei niedrigen Frequenzen. Der Blindanteil des Kondensators wirkt sich als kapazitive Reaktanz aus. Es kann beim Kondensator auch mit der komplexen Admittanz gerechnet werden. Die komplexe Admittanz ergibt sich aus dem kehrwert der komplexen Impedanz des Kondensators.

$$\underline{Z}_\mathrm{C} = \frac{1}{j\omega C} \quad \rightarrow \quad \underline{Y}_\mathrm{C} = j\omega C \tag{4.7}$$

Der ideale Kondensator wirkt rein im Blindanteil, so wird nach Gleichung 4.8 aus der komplexen Notation Z_C der Blindanteil des Kondensators X_C mit zeitabhängiger Spannung und Strom.

$$\underline{U} = \underline{Z}_\mathrm{C} \cdot \underline{I} \qquad\qquad u(t) = \underline{X}_\mathrm{C} \cdot i(t) \tag{4.8}$$

Es Wird davon ausgegangen, dass die Wechselspannung an einem Kondensator mit der Phasenverschiebung von 0° anliegt. Mit dieser Feststellung kann die verursachte Phasenverschiebung des Stromes am Kondensator nach Gleichung 4.9 festgelegt werden. Durch die Phasenverschiebung des Stromes gleicht der Verlauf einer Cosinusfunktion im Gegensatz zur Sinusfunktion der Spannung. Sollen sowohl die Spannung als auch der Strom durch die Sinusfunktion beschrieben werden, wird die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ von $\pi/2$ ins Argument mit aufgenommen.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \qquad i(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \pi/2) \tag{4.9}$$

Bei Induktivitäten und Kapazitäten kommt es zu einer Phasenverschiebung zwischen der Wechselspannung und dem Wechselstrom. Beim Kondensator bedeutet dies, dass der Strom der Spannung um 90° (Gradmaß) voreilt. Der beschriebene Sachverhalt der Phasenverschiebung wird in der Abbildung 4.4 verdeutlicht. Der in rot dargestellte Strom an einem Kondensator erreicht den Maximalwert um 2π (Bogenmaß) früher als der blau gefärbte Maximalwert der Spannung.

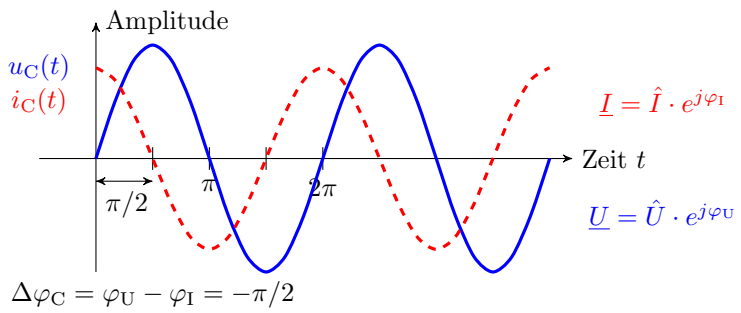


Abbildung 4.4: **Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an einem Kondensator.** Der Strom eilt der Spannung am Kondensator um 90° vor.

Merke: Sinusschwingung an einem Kondensator

An der idealen Kapazität eilt der Wechselstrom der Wechselspannung um 90° vor.

In der Regel wird mit idealen Bauteilen und deren Eigenschaften gerechnet. Jedoch weist der reale Kondensator, wie auch der zuvor beschriebene reale Widerstand, induktive und ohmsche parasitäre Effekte auf. Der ideale Kondensator wird in der Abbildung 4.5 dem realen Kondensator gegenübergestellt. Die Zu- und Ableitungen weisen induktive ($L_{\text{paras.}}$) und ohmsche ($R_{\text{paras.2}}$) Anteile auf. Außerdem ist der Kondensator einer ständigen Selbstentladung ausgesetzt. Diese Selbstentladung erfolgt symbolisch über den Paralellwiderstand $R_{\text{paras.1}}$.

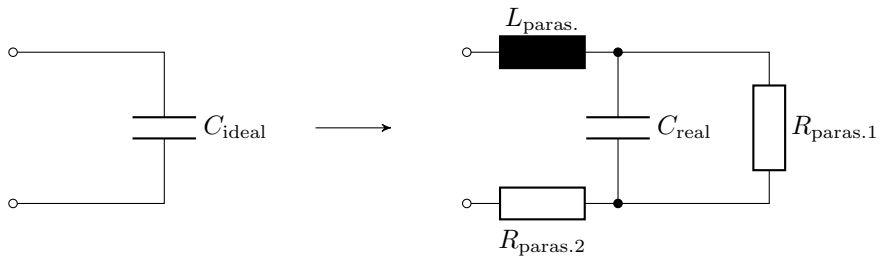


Abbildung 4.5: **Gegenüberstellung eines idealen und eines realen Kondensators.** Der reale Kondensator weist im Gegensatz zum idealen Widerstand seriell induktive und parallel kapazitive Effekte auf.

4.4 Induktivität

Die Spule stellt ebenso einen Energiespeicher dar, wie der Kondensator. Nur wird bei der Spule die Energie nicht in einem elektrischen Feld gespiechert, sondern in einem magnetischen Feld nach den Gegebenheiten der Induktionsgesetze. Die Größe einer Spule wird in der Induktivität L angegeben. Die Einheit der Induktivität ist Henry H. Die komplexe Impedanz einer Spule ergibt sich aus der Imaginären Einheit j, der Kreisfrequenz ω und der Induktivität L (vgl. Gleichung 4.10). die komplexe Admittanz wird durch den Kehrwert der Spulenimpedanz berechnet. Das führt zu Zusammenhängen, welche sich entgegen der Impedanzberechnungen bei Kapazitäten entwickeln. Bei hohen frequenzen werden die Impedanzen bei Spulen entsprechend ihrer Induktivität ebenfalls groß und bei niedrigen Frequenzen entsprechend gering.

$$\underline{Z}_{\text{L}} = j\omega L \quad \rightarrow \quad \underline{Y}_{\text{L}} = \frac{1}{j\omega L} \tag{4.10}$$

Ebenso wie beim Kondensator wirkt die ideale Spule rein als Blindanteil der Impedanz. In der Gleichung 4.11 wird auf der linken Seite die komplexe Notation der Spulenimpedanz Z_L verwendet. Auf der rechten Seite wird die Zeitfunktion lediglich mit der Schreibweise des Blindanteils der Spule X_L dargestellt.

$$\underline{U} = \underline{Z}_{\text{L}} \cdot \underline{I} \qquad\qquad u(t) = \underline{X}_{\text{L}} \cdot i(t) \tag{4.11}$$

Prinzipiell verhalten sich die Zeitfunktionen von Induktivitäten für die Spannung und den Strom vergleichbar, mit denen Zeitfunktionen von Kapazitäten. Lediglich die Phasenverschiebung des Stromes an Spulen ist der Phasenverschiebung der Kapazitäten entgegengesetzt. Die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen der Spannung und dem Strom beträgt an einer Induktivität $\pi/2$.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \pi/2) \qquad i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \tag{4.12}$$

Äquivalent zu der Phasenverschiebung an einem Kondensator existiert an der Induktivität ebenfalls eine Phasenverschiebung. Jedoch ist diese Phasenverschiebung des Stromes an der Induktivität der Phasenverschiebung der Kapazität entgegengerichtet. Im konkreten Fall in der Abbildung 4.6 wird gezeigt, dass der der Strom (rot) an einer Induktivität der Spannung (blau) nacheilt.

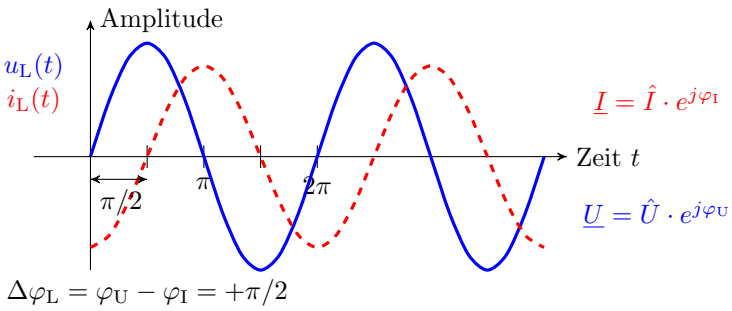


Abbildung 4.6: **Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung an einer Spule.** Der Strom folgt der Spannung an der Spule um 90° nach.

Merke: Sinusschwingung an einer Spule

Bei einer idealen Induktivität folgt der Wechselstrom der Wechselspannung um 90° nach.

Wie auch der ohmsche Widerstand und der Kondensator weist die reale Spule parasitäre Effekte auf. Über den Spulendraht wirkt ein ohmscher Anteil ($R_{\text{paras.}}$) auf die komplexe Impedanz der Spule ein. Zusätzlich erzeugt die Wicklung der Spule kapazitive Effekte ($C_{\text{paras.}}$). In der Abbildung 4.7 wird das Ersatzschaltbild einer idealen Spule und einer realen Spule dargestellt.

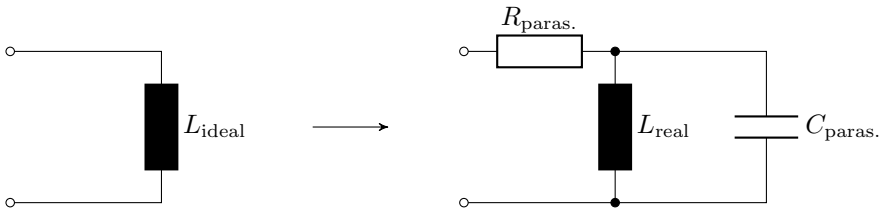


Abbildung 4.7: **Gegenüberstellung einer idealen und einer realen Spule.** Die reale Spule weist serielle ohmsche und parallele kapazitive parasitäre Effekte auf.

4.5 Quellen von Wechselgrößen

Wie bei Quellen von Gleichströmen und Gleichspannungen existieren Wechselquellen mit vergleichbaren Merkmalen. Bei der idealen Wechselspannungsquelle ist die Spannung eingeprägt. Die Wechselspannung ändert sich nicht mit der Abhängigkeit des Stromes, welcher durch sie hindurchfließt. Die ideale Wechselstromquelle stellt einen eingesprägten Strom zur Verfügung. Dieser wird nicht durch die angeschlossene Last beeinflusst. Die Schaltungssymbole einer idealen Wechselspannungsquelle und einer idealen Wechselstromquelle werden in der Abbildung 4.8 dargestellt.

Abbildung 4.8: **Quellen von Wechselgrößen.** Ideale Wechselspannungsquelle und ideale Wechselstromquelle.

Bei den beiden vorgestellten Wechselquellen werden ideale Quellen abgebildet. Reale Wechselquellen weisen wie auch die Quellen von Gleichspannungen und Gleichströmen Innenwiderstände auf. Diese Innenwiderstände prägen sich bei Quellen von Wechselgrößen als komplexe Impedanzen aus. Die reale Wechselspannungsquelle hat also eine komplexe Innenimpedanz $\underline{Z}_\mathrm{i}$, welche mit einer idealen Wechselspannungsquelle in Serie geschaltet ist. Bei realen Wechselspannungsquellen ist die Ausgangsspannung $\underline{U}$ von der angeschlossenen Last abhängig. Die Gegenüberstellung einer idealen und einer realen Wechselspannungsquelle ist in der Abbildung 4.9 dargestellt.

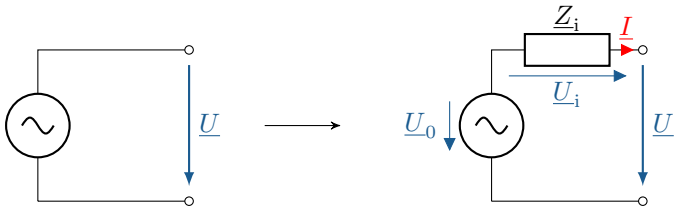


Abbildung 4.9: **Gegenüberstellung einer idealen und einer realen Wechselspannungsquelle.** Die reale Wechselspannungsquelle weist eine Serienimpedanz $\underline{Z}_\mathrm{i}$ auf.

Die Ausgangsspannung einer realen Wechselspannungsquelle lässt sich nach Gleichung 4.13 bestimmen. Hier liegt die Wechselspannung der Wechselspannungsquelle nicht direkt an den Klemmen an. Sie wird durch die Spannung über die Innenimpedanz Z_i reduziert.

$$\underline{U} = \underline{U}_0 - \underline{Z}_\mathrm{i} \cdot \underline{I} \tag{4.13}$$

Reale Wechselspannungsquellen weisen gewisse Charakteristika ohne Last beim Leerlauf und bei einem Kurzschluss auf. Beim Leerlauf liegt zwischen den Klemmen eine unendlich große Impedanz. Es wird kein geschlossener Stromkreis gebildet und es stellt sich kein Stromfluss ein (Gleichung 4.14). Die gesamte Spannung der Wechselspannungsquelle liegt an den offenen Klemmen an, siehe Gleichung 4.15.

$$\underline{I} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \underline{U}_\mathrm{i} = \underline{I} \cdot \underline{Z}_\mathrm{i} = 0 \tag{4.14}$$

$$\underline{U}_0 - \underline{U}_\mathrm{i} - \underline{U} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \underline{U} = \underline{U}_0 \tag{4.15}$$

Beim Kurzschluss geht die Impedanz zwischen den Klemmen gegen null und es fällt dort keine Spannung ab. So stellt sich ein größter möglicher Kurzschlussstrom ein, welcher lediglich durch die Innenimpedanz begrenzt wird (Gleichung 4.16). Die Spannungs der Wechselspannungsquelle wirkt so in Gänze über die Innenimpedanz (Gleichung 4.17). Der Kurzschlussstrom lässt sich nach Gleichung 4.18 aus dem Verhältnis aus der Spannung über die Innenimpedanz $\underline{U}_\mathrm{i}$ und der Innenimpedanz $\underline{Z}_\mathrm{i}$ bestimmen.

$$\underline{U} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \underline{I} = \underline{I}_\mathrm{k} \tag{4.16}$$

$$\underline{U}_0 - \underline{U}_\mathrm{i} - \underline{U} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \underline{U}_\mathrm{i} = \underline{U}_0 \tag{4.17}$$

$$\underline{I}_\mathrm{k} = \frac{\underline{U}_\mathrm{i}}{\underline{Z}_\mathrm{i}} \tag{4.18}$$

Beispiel 4.1: Reale Spannungsquelle

Eine Reale Spannungsquelle (230 V, 50 Hz) verfügt nach der unten stehenden Abbildung über eine Innenimpedanz $\underline{Z}_\mathrm{i}$, welche sich aus einer Spule $L = 20\ mH$ und einem ohmschen Widerstand $R = 10\ m\Omega$ zusammensetzt.

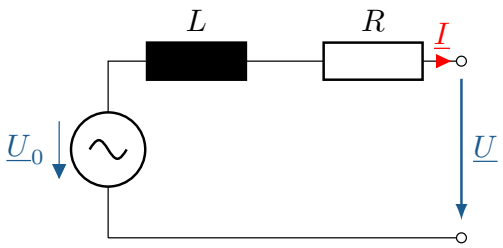


Abbildung 4.10: **Beispiel.** Wechselspannungsquelle mit einer Innenimpedanz aus einer Spule und einem Widerstand.

Bestimmen Sie die **Leerlaufspannung** und den **Kurzschlussstrom** der Wechselspannungsquelle.

$$\begin{aligned}
\underline{U}_0 &= 230\ V \cdot e^{\mathrm{j}0^o} \\
\underline{Z}_\mathrm{i} &= R + jX_L \\
\underline{Z}_\mathrm{i} &= 0{,}01\ \Omega + j \cdot 2\pi \cdot 50\ Hz \cdot 20\ mH \\
\underline{Z}_\mathrm{i} &= 0{,}01\ \Omega + j6{,}28\ \Omega
\end{aligned}$$

Leerlaufspannung:

$$\begin{aligned}
\underline{U} &= \underline{U}_0 \\
\underline{U} &= 230\ V \cdot e^{\mathrm{j}0^o}
\end{aligned}$$

Kurzschlussstrom:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_\mathrm{k} &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_\mathrm{i}} \\
\underline{I}_\mathrm{k} &= \frac{230\ V \cdot e^{\mathrm{j}0^o}}{0{,}01\ \Omega + j6{,}28\ \Omega} \\
\underline{I}_\mathrm{k} &= (0{,}058 - j36{,}6)\ A = 36{,}6\ A \cdot e^{-\mathrm{j}89{,}9^o}
\end{aligned}$$

Die reale Wechselstromquelle in der Abbildung 4.11 verfügt wie die Wechselspannungsquelle über eine Innenimpedanz $\underline{Z}_\mathrm{i}$, wobei diese Innenimpedanz nicht wie bei der Wechselspannungsquelle in serie geschlatet ist, sondern parallel zu einer idealen Wechselstromquelle liegt. Der sich ergebende

Ausgangsstrom $\underline{I}$ der Quelle ist von der angeschlossenen Last, bzw. von der Ausgangsspannung $\underline{U}$ abhängig.

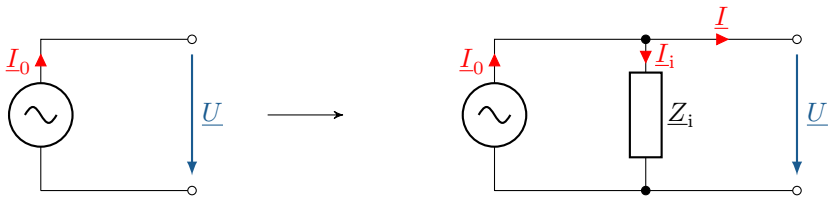


Abbildung 4.11: **Quellen von Wechselgrößen.** Ideale Wechselstromquelle und ideale Wechselstromquelle.

Der Wechselstrom der idealen Wechselstromquelle wird durch einen Anteil durch die Innenimpedanz reduziert. Der Ausgangsstrom der realen Wechselstromquelle lässt sich über die Gleichung 4.19 bestimmen. Hier wird ausgehend vom Quellstrom $\underline{I}_0$ der ausgangsspannungsabhängige ($\underline{U}$) Wechselstromanteil $\underline{I}_i$ durch die Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ abgezogen.

$$\underline{I} = \underline{I}_0 - \underline{I}_i = \underline{I}_0 - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_i} \tag{4.19}$$

Wechselquellenumwandlung

Wechselstrom- und Wechselspannungsquellen können ineinander umgewandelt werden, wenn beide Wechselquellen den identischen Kurzschlussstrom und die gleiche Leerlaufspannung aufweisen.

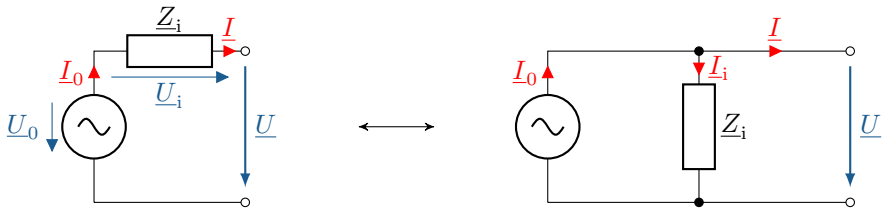


Abbildung 4.12: **Gegenüberstellung einer realen Wechselspannungsquelle und einer realen Wechselstromquelle.** Die reale Wechselspannungsquelle und die reale Wechselstromquelle sind ineinander umwandelbar.

Beide Wechselquellen sind äquivalent, wenn nach Gleichung 4.20 und Gleichung 4.21 das ohmsche Gesetz mit identischen Innenimpedanzen für die Wechselspannungsquelle und die Wechselstromquelle gilt.

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_0 \cdot \underline{I}_0 \tag{4.20}$$

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_0 \tag{4.21}$$

Hierbei soll der Kurzschlussstrom $\underline{I}_K$ gleich dem Quellstrom $\underline{I}_0$ der Wechselstromquelle sein, welcher identisch zu dem Ausgangsstrom $\underline{I}$ ist. Die Ausgangswechselspannung $\underline{U}$ der Wechselquellen enspricht der Leerlaufspannung $\underline{U}_L$.

$$\underline{I} = \underline{I}_k = \underline{I}_0 \qquad \text{und} \qquad \underline{U} = \underline{U}_L = \underline{U}_0 \tag{4.22}$$

Beispiel 4.2: Wechselquellenumwandlung

Gegeben ist eine reale Wechselspannungsquelle mit $\underline{U}_0 = 20\ kV \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^o}$ und $\underline{Z}_0 = (0{,}01 + j \cdot 2)\ \Omega$. Wandeln Sie die Wechselspannungsquelle in eine äquivalente Wechselstromquelle um, berechnen Sie hierzu den Kurzschlussstrom.

Kurzschlussstrom:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = \frac{20\ kV \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^o}}{(0{,}01 + j \cdot 2)\ \Omega} = (5{,}04 + j \cdot 8{,}64)\ kA$$

4.6 Komplexer Spannungsteiler und komplexer Stromteiler

Wie bei der Betrachtung von Gleichstromnetzwerken gelten die Grundgesetze zur Analyse von Wechselstromnetzen. Die Knotenregel und die Maschenregel sind hier äquivalent anzuwenden. Der bereits vorgestellte Beispielknoten und die Beispielmasche werden in der Abbildung 4.13 mit komplexen Wechselgrößen noch einmal dargestellt. Hieraus resultiert die Ausformulierung der folgenden Gleichung 4.23 als Beispiel der komplexen Knotenregel:

$$\sum_{k=1}^{N} \underline{I}_\mathrm{k} = 0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 \tag{4.23}$$

Sowie die Gleichung 4.24 als Beispiel der komplexen Maschenregel:

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{N} \underline{U}_\mathrm{k} = \underline{U}_\mathrm{Z2} - \underline{U}_\mathrm{Z1} = 0 \tag{4.24}$$

Hier ist im Gegensatz zur Gleichstrombetrachtung, wo ausschließlich mit reellen Werten gerechnet wird, lediglich darauf zu achten, dass mit komplexen Wechselgrößen gearbeitet wird.

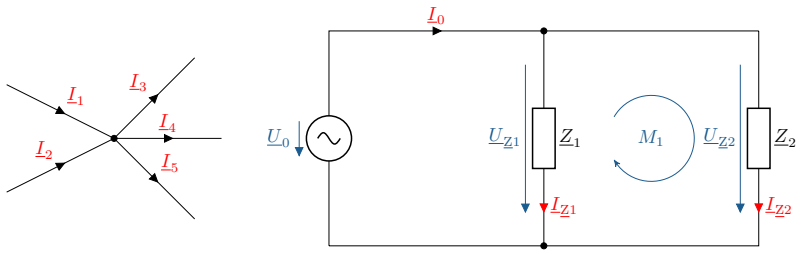


Abbildung 4.13: **Knotenregel und Maschenregel mit komplexen Wechselgrößen.** Die Knotenregel und die Maschenregel verhalten sich mit komplexen Wechselgrößen identisch wie bei Gleichstromnetzwerken.

Der komplexe Spannungsteiler dient der Reduzierung einer Gesamtspannung z.B. der Anpassung eines Signalpegels an dem Eingangsspannungsbereich einer Messschaltung. In der Abbildung 4.14 wird ein komplexer Spannungsteiler aus zwei komplexen Impedanzen dargestellt. Die komplexe Gesamtspannung $\underline{U}_0$ wird über die beiden Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ in die Teilspannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ aufgeteilt.

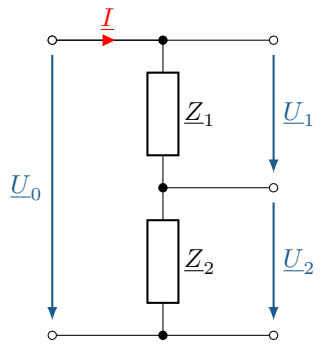


Abbildung 4.14: **Ein komplexer Spannungsteiler bestehend aus zwei Impedanzen in Serie.** Die komplexe Gesamtspannung $\underline{U}_0$ wird in die Teilspannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ aufgeteilt.

Die Gesamtspannung teilt sich im Verhältnis der komplexen Impedanzen auf (vgl. Gleichung 4.25). Basierend auf dem komplexen Strom $\underline{I}$, welcher die gesamte Serienschaltung durchströmt, lassen sich die komplexen Teilspannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ und ihre komplexen Impedanzen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ im Verhältnis zu der komplexen Gesamtspannung $\underline{U}_0$ und der gesamten komplexen Impedanz $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ bestimmen.

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} \tag{4.25}$$

Durch das Umstellen der Gleichung 4.25 kann das komplexe Teilverhältnis $\underline{T}$ für die Gleichung 4.26 aufgestellt werden:

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \tag{4.26}$$

Hier entspricht das Verhältnis aus der komplexen Teilspannung $\underline{U}_2$ und der komplexen Gesamtspannung $\underline{U}_0$ dem Verhältnis aus der komplexen Impedanz $\underline{Z}_2$ und der gesamten komplexen Impedanz der Serienschaltung $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$. Das Aufstellen des komplexen Teilverhältnises funktioniert in gleicher Weise für die komplexe Teilspannung $\underline{U}_1$.

Der komplexe Spannungsteiler findet beispielsweise im ohmsch-kapazitiven Teiler in der Hochspannungstechnik Anwendung. In der Abbildung 4.15 werden vier verschiedene Teiler dargestellt, welche beispielsweise in der Hochspannungstechnik verwendet werden.

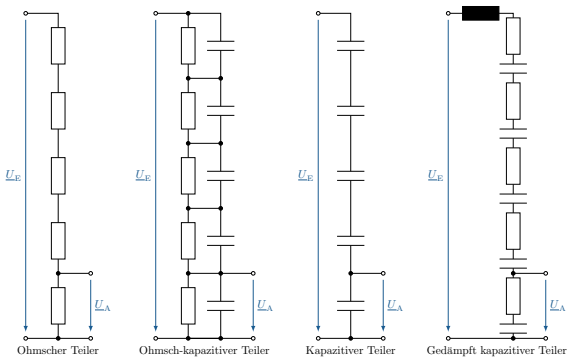


Abbildung 4.15: **Gegenüberstellung von verschiedenen Teilern der Hochspannungstechnik.** Ohmscher Teiler zur Verwendung mit Gleichspannung und der kapazitive Teiler und der gedämpft kapazitive Teiler zur Verwendung mit Wechselspannung. Der ohmsch-kapazitive Teiler ist für beide Spannungsarten verwendbar.

Neben dem ohmsch-kapazitiven Teiler werden noch der ohmsche Teiler, der kapazitive Teiler und der gedämpft kapazitive Teiler vorgestellt. Der ohmsche Teiler besteht rein aus ohmschen Widerständen, welche seriell verschaltet sind und der kapazitive Teiler besteht rein aus Kondensatoren. Der gedämpft kapazitive Teiler besteht aus mehreren Modulen mit einer vorgeschalteten Spule. Die Module setzten sich aus Reihenschaltungen aus einem ohmschen Widerstand und einem Kondensator zusammensetzten.

Das Einfache Beispiel eines solchen ohmsch-kapazitiven Teilers wird in der Abbildung 4.16 gezeigt. Der ohmsch-kapazitive Teiler setzt sich aus mindestens zwei in serie geschlateten Parallelschaltungen aus einem ohmschen Widerstand und einem Kondensator, einem sogennanten RC-Glied zusammen. In der Abbildung 4.16 besteht das erste RC-Glied aus dem Widerstand R_1 und dem Kondensator C_1. Das zweite RC-Glied besteht aus dem Widerstand R_2 und Kondensator C_2. Die komplexe Gesamtspannung $\underline{U}_0$ liegt über beide RC-Glieder an. Die komplexe Teilspannung $\underline{U}_2$ liegt über dem zweiten RC-Glied an. Das Teilverhältnis hat somit ohmsche und kapazitive Anteile. So liegt durch die Kapazität des Kondensators ein frequenzabhängiges Teilverhältnis vor.

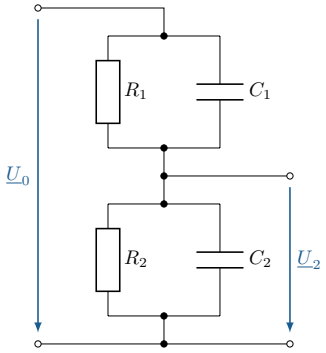


Abbildung 4.16: **Ein ohmsch-kapazitiver Spannungsteiler aus zwei RC-Gliedern.** Die RC-Glieder bestehen jeweils aus einer Parallelschaltung eines Widerstandes und eines Kondensators.

Ein besonderer Zustand liegt vor, wenn der komplexe Spannungsteiler abgeglichen ist. Dieser Zustand beschreibt das identische Verhältnis der Bauteile zueinander. Dieser Zustand wird durch die Gleichung 4.27 beschrieben. Hier muss das Produkt aus dem Widerstand R_1 und dem Kondensator C_1 identisch mit dem Produkt aus dem Widerstand R_2 und dem Kondensator C_2 sein. Diese Abgleichbedingung lässt sich in der Praxis durch veränderliche Bauteile, wie Trimmkondensatoren, realisieren.

$$R_1 \cdot C_1 = R_2 \cdot C_2 \tag{4.27}$$

Ein weiteres Anwedungsbeispiel für einen ohmsch-kapazitiven Teiler ist der Tastkopf eines Oszilloskops. Solch ein Teiler wird in der Abbildung 4.17 vorgestellt. Im Prinzip unterscheid sich das Bild nicht erheblich vom ohmsch-kapazitiven Teiler. Jedoch sind hier das erste und das zweite RC-Glied von einander räumlich getrennt und mit einem Gehäuse umgeben. So steht das erste RC-Glied für den Tastkopf und das zweite RC-Glied für die beschaltung im Oszilloskop. Mit dem ohmsches Teilverhältnis:

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{A}}{\underline{U}_\mathrm{E}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.28}$$

und dem kapazitiven Teilverhältnis:

$$\frac{\underline{U}_\mathrm{A}}{\underline{U}_\mathrm{E}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \tag{4.29}$$

kann zum Abgleichen des Tastkopfes das ohmsche und das kapazitive Teilerverhältnis gleichgesetzt werden, da die Teilerverhältniss identisch sein müssen:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \tag{4.30}$$

Die Abgleichbedingung nach Gleichung 4.27 gilt weiterhin. Über die verstellbare Kapazität C_1 wird der Abgleich des Teilers vorgenommen.

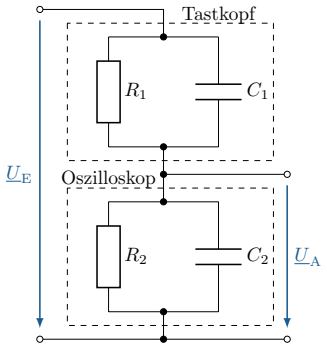


Abbildung 4.17: **Ein ohmsch-kapazitiver Spannungsteiler als Tastkopf eines Oszilloskops.** Über den Kondensator C_1 wird der komplexe Spannungsteiler abgeglichen.

Der komplexe Stromteiler, wie er in der Abbildung 4.18 vorgestellt wird, teilt den komplexen Gesamtstrom $\underline{I}$ auf in die Teilströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ auf. Die beiden Teilströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ durchfließen die Admittanzen $\underline{Y}_1$ und $\underline{Y}_2$.

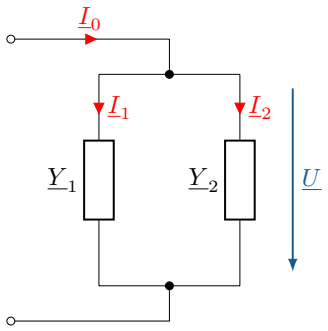


Abbildung 4.18: **Ein komplexer Stromteiler bestehend aus zwei Admittanzen.** Der komplexe Strom $\underline{I}$ teilt sich auf in die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$.

Die komplexe Spannung $\underline{U}$ lässt sich nach Gleichung 4.31 über das Verhältnis aus dem Gesamtstrom $\underline{I}$ und der Gesamtadmittanz $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ oder aus den Verhältnissen der einzelnen Stromzweige:

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{Y}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{Y}_2} \tag{4.31}$$

Das Teilerverhältnis lässt sich nach Gleichung 4.32 für die beiden Stromzweige definieren:

$$\underline{T}_{i1} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \tag{4.32}$$

$$\underline{T}_{i2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \tag{4.33}$$

5 Effektivwert

Durch die periodischen Spannungsverläufe weist jeder Zeitschritt einen anderen Spannungswert auf. Hierbei kann direkt lediglich der Spitzenwert angegeben werden, mit welchem jedoch nicht immer gearbeitet werden kann. Um eine nützliche Vergleichbarkeit von Spannungswerten zu gewährleisten wird der Effektivwert herangezogen. Der Effektivwert beschreibt beispielsweise die identische Leistung, welche an einem Widerstand anfallen würde, würde dieser an einer Gleichstromquelle angeschlossen sein. Zur weiteren Erklärung des Effektivwertes und der dafür erforderlichen Grundlagen werden in diesem Kapitel die folgenden Inhalte besprochen:

Lernziele: Effektivwert

Die Studierenden

- verstehen die Funktion des Effektivwertes.
- kennen die Einflüsse von Amplitude und Kurvenform auf den Effektivwert.
- können den Effektivwert einer Wechselspannung bzw. eines Wechselstromes berechnen.

5.1 Grundlagen: Quadratischer Mittelwert und Additionstheorem

Neben dem arithmetischen Mittelwert, welcher in der Wechselstromrechnung zur Bestimmung des Mittelwerts genutzt wird, dient der quadratische Mittelwert der Bestimmung des Effektivwerts. Der quadratische Mittelwert (RMS - Root Mean Square) wird herangezogen, um die Vergleichbarkeit von Wechselspannungsgrößen zu ermöglichen. Hierbei wird eine Funktion f(t) zunächst quadriert. Darauffolgend wird der Mittelwert der quadrierten Funktion berechnet. Im letzten Schritt folgt das Radizieren des berechneten Mittelwertes. Der mathematische Zusammenhang des RMS wird in der Gleichung 5.1.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt} \tag{5.1}$$

Bei der Bildung des Quadratischen Mittelwerts wird auch die Sinusfunktion quadriert. Als Hilfestellung wird ein Additionstheorem vorgestellt, mit welchem diese Berechnung vereinfacht werden soll. Additionstheoreme beziehen sich auf die Zusammenhänge der Trigonometzrie um eine Funktionen umzuformen. Die Umformung der quadratischen Sinusfunktion anhand des Additionstheorems wird in der Gleichung 5.2 dargestellt. Hier wird aus der quadratischen Sinusfunktion eine Funktion, welche lediglich von einer einfachen Cosinusfunktion abhängig ist.

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \tag{5.2}$$

5.2 Amplitude

Die Ampltude einer Funktion beschreibt den maximalen Ausschalg während einer Periode. Bei einer Wechselspannung gibt der Amplitudenwert den höchsten momentanen Spannungswert der Spannung an. In der Abbildung 5.1 werden Spannungssignale mit einer Frequenz von $50\,Hz$ und somit mit

einer identischen Periodendauer von $T = 20\,ms$ dargestellt. Sie unterscheiden sich dabei beim Amplitudenwerten. Die Scheitelwerte der Amplituden der dargestellten Spannungen betrgen $\hat{U}_1 = 1\,V$, $\hat{U}_2 = 2\,V$ und $\hat{U}_3 = 4\,V$. Die Amplitude ist eine Art Faktor für die Berechnung des Effektivwertes. So hängt die Höhe des Effektivwertes direkt von dem Amplitudenwert ab.

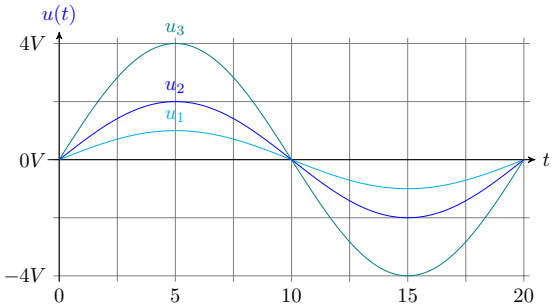


Abbildung 5.1: **Sinusspannungen mit unterschiedlichen Amplitudenwerten.** Gewichtung von den Amplitudenwerten $\hat{U}_1 = 1\,V$, $\hat{U}_2 = 2\,V$ und $\hat{U}_3 = 4\,V$.

5.3 Kurvenform

Neben der Amplitude eines Signals ist die Kurvenform des Signals ausschlaggebend für den Effektivwert. Bei der Berechung des Effektivwerts wird der Scheitelfaktor C (engl. für crest factor) bestimmt, welcher mit dem Ampltudenwert verrechnet wird. In der Gleichung 5.3 wird die Beziehung zwischen dem Amplitudenwert und den Effektivwert über den Scheitelfaktor angegeben.

$$\hat{U} = C \cdot U_{\text{Eff}} \tag{5.3}$$

Dieser Scheitelfaktor beträgt für Sinussignale $C_S = \sqrt{2}$, für Dreiecksignale $C_D = \sqrt{3}$ und für Rechtecksignale $C_R = 1$. Somit beträgt der Effektivwert einer Sinusspannung etwa 70,7 Prozent des Scheitelwerts der Amplitude. Neben dem Scheitelfaktor als Zusammenhang zwischen Scheitelwert und Effektivwert findet noch der Formfaktor F Anwendung. Der Formfaktor wird als Quotient aus dem Effektivwert und dem Gleichrichtwert definiert.

Tabelle 5.1: **Kurvenformen und Scheitelfaktoren.** Die Scheitelfaktoren für sinusförmige, Dreieck- und Rechtecksignale.

Kurvenform:	Sinus	Dreieck	Rechteck
Scheitelfaktor (C):	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1

Merke: Einflüsse auf den Effektivwert

Der Effektivwert ist linear proportional zum Scheitelwert. Der Umrechnungfaktor vom Effektivwert zum Scheitelwert heißt Scheitelfaktor und hängt von der Kurvenform des Singals ab.

5.4 Effektivwert

Der Effektivwert, beispielsweise einer Sinusspannung, soll für die Leistungsaufnahme als ein Momentanwert verwendet werden, welcher die gleiche Leistungsaufnahme bewirkt, die dem Leistungswert einer Gleichspannung unter vergleichbaren Gegebenheiten entsprechen würde. Der Effektivwert ist auch beim Ohm'schen Gesetz und bei den Kirchhoffschen Gesetzen anwendbar und somit für alle grundlegenden Gesetze geeignet.

Anhand eines Wechselstromsignales $i(t)$ soll die Berechnung des Effektivwertes erläutert werden. Wird die Definition des Stromsignales in die Gleichung 5.4 eingesetzt, so ergibt sich:

$$f(t) = i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \hat{I}^2 \cdot \sin^2(\omega t) dt} \tag{5.4}$$

Die Quadratur des Scheitelwerts ist nicht zeitabhängig und kann vor das Integralzeichen gezogen werden. Außerdem kann der Faktor aus dem Additionstheorem aus dem Integral gezogen werden, sodass die nochfolgende Gleichung 5.5 entsteht:

$$I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2T} \int_0^T 1 - \cos(2\omega t) dt} \tag{5.5}$$

Nach der Differenzregel können Differenzen in einem Integranden gesondert bestimmt werden. Auf diese Weise werden in der nachfolgenden Gleichung 5.6 die Integrale für die beiden Operanden der Differenz seperat bestimmt.

$$\text{mit} \quad \int_0^T 1 dt = T \quad \text{und} \quad \int_0^T \cos(2\omega t) dt = 0 \tag{5.6}$$

Durch das Auflösen des Integrals entsteht:

$$I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2T} \cdot (T - 0)} \tag{5.7}$$

Hier lässt sich die Periodendauer T aus dem Zähler und dem Nenner kürzen, sodass folgender Zusammenhang entsteht:

$$I_{\text{Eff}} = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2}} \tag{5.8}$$

Nun wird noch aus dem Zähler und dem Nenner getrennt die Wurzel gezogen. Der selbe Zusammenhang lässt sich so auch für die Spannung definieren:

$$I_{\text{Eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad U_{\text{Eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \tag{5.9}$$

Merke: Effektivwert einer Sinusschwingung

Für rein sinusförmige Spannungen und Ströme gilt der Scheitelfaktor $\sqrt{2}$:

$$I_{\text{Eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \qquad \text{und} \qquad U_{\text{Eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

In der Abbildung 5.2 wird eine Sinusspnnung mit einem Amplitudenwert von $4\,V$ dargestellt. Dazu wird der zu der Sinusspannung zugehörige Effektivwert bei $4\,V/\sqrt{2}$ eingezeichnet. Vergleichbar verhält es sich mit den Spannungen im Haushalt. So würde bei einer Spannungsmessung im Haushalt ein Effektivwert von $230\,V$ angezeigt werden. Der Amplitudenwert der eigentlich anliegenden Wechselspannung beträgt dabei allerdings $230\,V \cdot \sqrt{2}$ also $325\,V$.

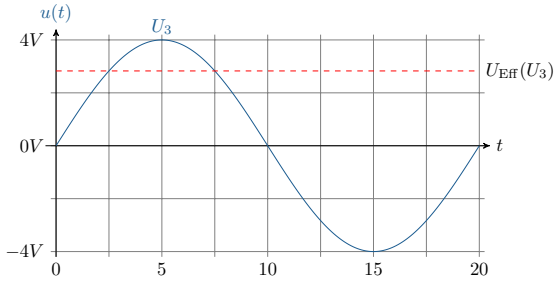


Abbildung 5.2: **Formverlauf einer Sinusspannung.** Sinusspannung mit einem Amplitudenwert von $4\,V$ und zugehörigem Effektivwert von $4\,V/\sqrt{2}$.

Beispiel 5.1: Effektivwert

Wird die Spannung beispielsweise an einer Haushaltssteckdose gemessen, so wird der Effektivwert von 230V angegeben.

Die folgenden Aufgaben sollen zum besseren Verständnis des Effektivwertes bearbeitet werde:

a) Berechnung des Amplitudenwertes der Spannung an einer Haushaltssteckdose.

b) Berechneng des Effektivwertes davon ausgehend, dass es sich um ein Rechtsecksignal handeln würde.

a) Der Amplitudenwert an einer Steckdose mit einem Effektivwert von 230V beträgt:

$$\hat{U} = I_{\text{Eff}} \cdot \sqrt{2} = 230V \cdot \sqrt{2}$$
$$\hat{U} = 325{,}269V$$

b) Der Effektivwert einer Rechteckspannung mit einem Scheitelwert von 325V beträgt:

$$U_{\text{Rechteck}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{3}} = \frac{325V}{\sqrt{3}}$$
$$U_{\text{Rechteck}} = 187{,}639V$$

6 Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung

In der Gleichstrombetrachtung elektrischer Netzwerke ergab sich lediglich eine Wirkleistung an den Komponenten. In der Wechselstrombetrachtung elektrischer Netzwerke werden durch die resultierenden Blindströme auch Blindleistungen erzeugt. Die sich daraus ergebende Scheinleistung teilt sich auf die Wirkleistung und die Blindleistung auf. Die folgenden Grundlagen und Leistungsarten, welche durch eine Wechselspannung hervorgerufen werden, werden folgend besprochen:

Lernziele: Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung

Die Studierenden

- kennen den Unterschied zwischen der Augenblicksleistung, der Wirkleistung und der Blindleistung.
- können die Scheinleistung bestimmen und kategorisieren.

6.1 Grundlagen: Additionstheorem und Arithmetischer Mittelwert

Für die Berechnung des Effektivwertes wurde bereits ein Additionstheorem vorgestellt. Ein weiteres Additionstheorem wird in der Gleichung 6.1 vorgestellt. Hier wird aus dem Produkt zweier Sinusfunktionen mit unterschiedlichen Argumenten ein Zusammenhang mit Summen und Differenzen in Cosinusfunktionen. Hierdurch wird das Produkt eliminiert und eine Summe zweier Cosinusfunktion erstellt. Das Integrieren der Summe lässt sich durch das Aufteilen der Summe in zwei separate Integrationvorgänge vereinfachen.

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + cos(x+y)) \tag{6.1}$$

Mit dem arithmetische Mittelwert einer Funktion soll ein konstanter Wert errechnet werden, welcher nicht mehr zeitabhängig ist. In der Elektrotechnik soll dieser Wert in bestimmten Fällen, ähnlich wie der Effektivwert bei sinusförmigen Strom- und Spannungsverläufen, zur besseren Veranschaulichung herangezogen werden. Berechnet wird der arithmetische Mittelwert über folgende Integralformel:

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} u(t)dt \tag{6.2}$$

In der Formel steht T für die Periodenlänge. Hier ist t dabei ein beliebig wählbarer Zeitpunkt, ab welchem die Betrachtung starten soll (meistens $t = 0$). Vereinfacht ausgedrückt steht im Integral die Fläche zwischen der Funktionskurve und der Abszisse und im Nenner des Bruches die Periodenlänge. Als Beispiel soll eine sogenannte Sägezahnspannung herangezogen werden, welche in der Abbildung 6.1 dargestellt wird.

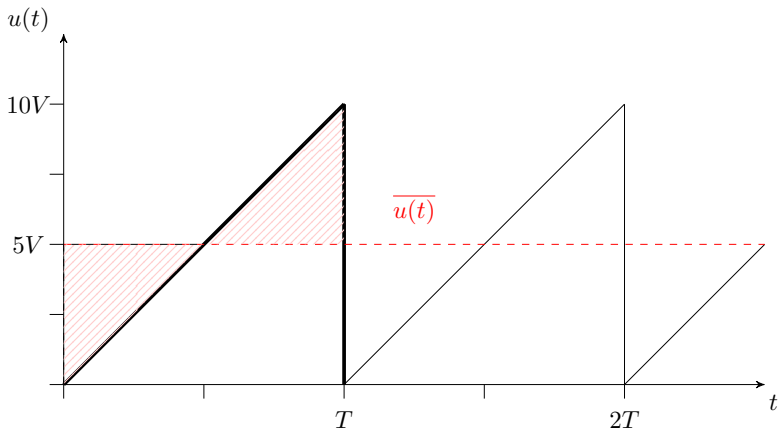


Abbildung 6.1: **Verlauf einer Sägezahnspannung.** Über die Sägezahnspannung wird die Ermittlung des rot gekennzeichneten Mittelwertes erläutert.

Soll der arythmetische Mittelwert errechnet werden, muss zuerst eine Funktion über eine Periode aufgestellt werden. In diesem Fall kann eine Periode folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\overline{u(t)} = \frac{10\ V}{T} \cdot t \tag{6.3}$$

Diesen Zusammenhang eingefügt in die Gleichung 6.2 und für die Integrationsgrenzen $t = 0$ bis T ergibt sich die Gleichung:

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{10\ V}{T} \cdot t\ dt \tag{6.4}$$

Wird das Integral aufgelöst erhält man den arythmetischen Mittelwert für die Sägezahnspannung:

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \left[\frac{10\ V}{T} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{1}{2} \cdot 10\ V \tag{6.5}$$

Somit beträgt der arythmetische Mittelwert die Hälfte der maximalen Spannung. Liegt eine ideale Sinusschwingung vor, ist der arythmetische Mittelwert immer null. Relevant wird der arythmetische Mittelwert, wenn die Leistung von sinusförmigen Strömen und Spannungen errechnet werden soll.

6.2 Wirkleistung und Blindleistung

Wirkleistung bei Gleichstrom: In elektrischen Gleichstromnetzwerken wird die Leistung nach der bekannten Gleichung $P = U \cdot I$ bestimmt. Bei bekanntem elektrischen Widerstand kann die Gleichung dahingehend umgestellt werden, dass nach dem ohmschen Gesetz entweder die Spannung oder der Stromeliminiert werden.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \tag{6.6}$$

In einem System mit Wechselgrößen ist die Leistung, wie auch die Größen Strom und Spannung, zeitabhängig. In der Gleichung 6.7 wird dies dadurch ausgedrückt, dass die Formelzeichen klein geschrieben sind und abhängig von der Zeit t sind:

$$P = U \cdot I \quad \Leftrightarrow \quad p(t) = u(t) \cdot i(t) \tag{6.7}$$

Weil die Größen der Spannung und des Stromes zeitabhängig sind, ist auch diese Funktion der Leistung zeitabhängig. Aufgrund der Zeitabhängigkeit wird auch von der **Augenblicksleistung** für einen Zeitpunkt t gesprochen. Die Maßeinheit der elektrischen Augenblicksleistung ist weiterhin das Watt.

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{U}}) \qquad i(t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{\mathrm{I}}) \tag{6.8}$$

Werden die Augenblickswerte der Spannung und des Stromes in die Gleichung 6.7 der Augenblicksleistung eingesetzt, so ergibt sich in der folgenden Gleichung 6.10 die Augenblicksleistung. Hier lässt sich die Gleichung in einen Vorfaktor, einen konstanten Anteil und einen zeitabhängigen Anteil aufteilen. Der Vorfaktor besteht aus der Hälfte des Produktes der Amplitudenwerte von Spannung und Strom. Der konstante Anteil besteht aus dem ersten Cosinussummanden, hier sind lediglich die Phasenwinkel von Spannung und Strom ausschlaggebend. Der zeitabhängige Anteil wird durch den zweiten Cosinus dargestellt. Hier werden neben den Phasenwinkeln auch die Kreisfrequenz und der Zeitpunkt wichtig.

$$\text{allgemein:} \quad p(t) = u(t) \cdot i(t) \tag{6.9}$$

$$\text{sinusförmig:} \quad p(t) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \Big(\underbrace{\cos(\varphi_{\mathrm{U}} - \varphi_{\mathrm{I}})}_{\text{konstanter Anteil}} + \underbrace{\cos(2\omega t + \varphi_{\mathrm{U}} + \varphi_{\mathrm{I}})}_{\text{zeitabhängiger Anteil}} \Big) \tag{6.10}$$

Merke: Augenblicksleistung

Die Augenblicksleistung ist das Produkt aus den Aufgeblickswerten der Spannung und des Stromes.

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Wird die gesamte Leistung eines Systems über einen idealen ohmschen Widerstand aufgenommen, bedeutet dies, dass die Spannung in der Strom keine Phasenverschiebung aufweisen. Der Konstante Anteil der Augenblicksleistung ist positiv. Die Augenblicksleistung pulsiert mit doppelter Frequenz im Vergleich zur Frequenz von Spannung und Strom. Dabei hat die Leistung stets ein positives Vorzeichen.

Häufig ist es nicht erheblich, wie der genaue zeitliche Verlauf der Augenblicksleistung ist. Vielmehr ist bei Anwendungen lediglich die im Mittel umgesetzte Leistung, beispielsweise Wärmeanwenungen, von Interesse. Die Mittlere Leistung der zeitveränderlichen Augenblicksleistung ist nach Gleichung 6.2 definiert. Für rein sinusförmige Spannungen und Ströme lässt sich eine mittlere Leistung nach Gleichung 6.11 bestimmen. Die Angaben der Spannung U und des Stromes I bilden die Effektivwerte. Der Winkel φ ergibt sich aus der Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom. Der gesamte Ausdruck $\cos(\varphi)$ wird auch als **Leistungsfaktor** bezeichnet.

$$\overline{p}_{\mathrm{Sin}} = P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \tag{6.11}$$

Ohne die Phasenverschiebung zwischen der Spannung und dem Strom an einem ideale Widerstand ist der Term des Leistungsfaktors Vernachlässigbar. So lässt sich die mittlere Leistung in der Wechselstromtechnik bei sinusförmigen Spannungs- und Stromverläufen analog zur Gleichstromtechnik auf

zwei zeitunabhängige Größen zurückführen. Der Effektivwert der Spannung und des Stromes werden für rein sinusförmige Größen zur Ermittlung der mittelren Leistung herangezogen.

$$\overline{p}_{\text{Ohm}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} = U \cdot I \tag{6.12}$$

Ähnlich verhält es sich mit der Augenblicksleistung an Spulen und Kondensatoren. An einer Induktivität eilt der Strom der Spannung um 90° nach $(+\pi/2)$. Der Verlauf der Spannung und des Stromes an einer Induktivität wird in der Abbildung 6.2 dargestellt. Dazu wird in grün die Augenblicksleistung an der Induktivität dargestellt. Der Konstante Anteil der Augenblicksleistung an einer Induktivität beträgt Null. An dem Verlauf lässt sich das Pulsieren der Augenblicksspannung mit der doppelten Frequenz der Spannung bzw. des Stromes feststellen. Die positiven und negativen Halbwellen der Augenblicksleistung heben sich gegenseitig im Mittel auf. Das heißt, dass die aufgenommene Leistung wieder vollständig abgegeben wird und so von der Induktivität keine Leistung aufgenommen wird.

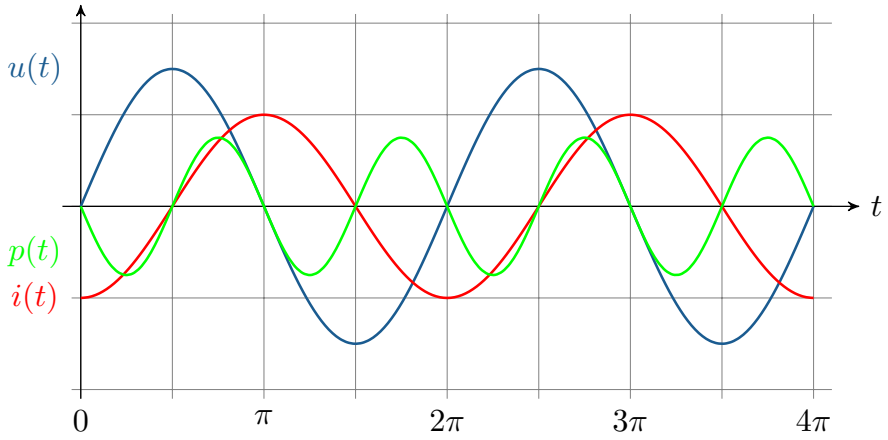


Abbildung 6.2: **Verlauf des Stromes, der Spannung und der zeitabhängigen Leistung an einer induktive Last.** Die Augenblicksleistung weist die doppelte Frequenz gegenüber der Spannung bzw. des Stromes auf. Die positiven und negativen Halbwellen heben sich gegenseitig auf, die aufgenommene Leistung wird vollständig wieder abgegeben.

Beim Kondensator verhält es sich dem Prinzip nach äquivalent zur Induktivität. Hier eilt der Strom der Spannung um 90° $(-\pi/2)$. Der konstante Anteil der Augenblicksleistung beträgt Null und die Leistung pulsiert mit doppelter Frequenz um die Nulllinie. Wie auch bei der Induktivität wird von einer Kapazität die aufgenommene Leistung wieder vollständig abgegeben, sodass im Mittel keine Leistung aufgenommen wird. Das Verhalten der zeitabhängigen Leistung an einer kapazitiven Last wird in der Abbildung 6.3 vorgestellt.

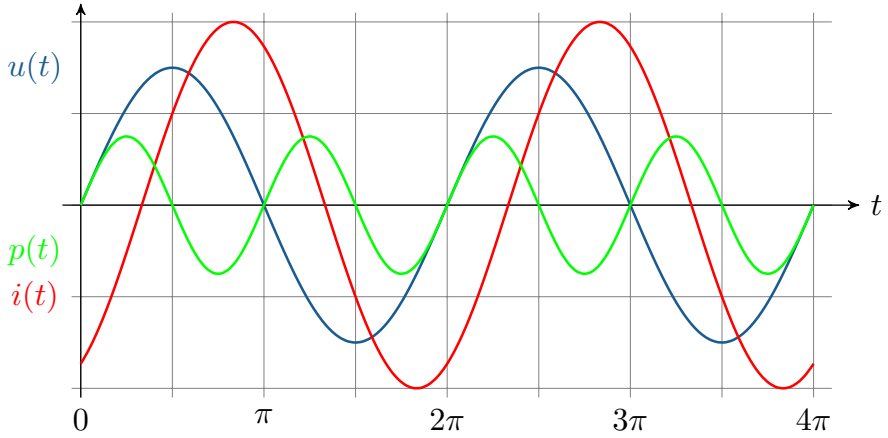


Abbildung 6.3: **Verlauf des Stromes, der Spannung und der zeitabhängigen Leistung an einer kapazitiven Last.** Die Augenblicksleistung weist die doppelte Frequenz gegenüber der Spannung bzw. des Stromes auf. Die positiven und negativen Halbwellen heben sich gegenseitig auf, die aufgenommene Leistung wird vollständig wieder abgegeben.

Ist die Augenblicksleistung größer Null, wird Leistung aufgenommen. Entgegengesetzt wird Leistung abgegeben, wenn die Augenblicksleistung kleiner Null ist. Durch die nicht vorhandene Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der Spannung am ohmschen Widerstand ist die mittlere Leistung stets größer null. Der ohmsche Widerstand nimmt also stets Leistung auf. Die Leistung wird hier als Wirkleistung P bezeichnet, welche für Anwendungen genutzt werden kann. Sie wird anhand der bereits vorgestellten Gleichung 6.11 für sinusförmige Spannungen und Ströme berechnet. Die beschriebenen Leistungen erklären Wirkleistungsanteile und Blindleistungsanteile. Die Blindleistung beschreibt dabei denjenigen Anteil der Leistung, welcher für die Erzeugung von elektrischen und magnetischen Feldern notwenig ist. Ist die elektrische Impedanz rein induktiv oder kapazitiv, liegt eine Phasenverschiebung von $\pm 90°$ vor. Der rein induktive oder rein kapazitive Zweipol nimmt Leistung auf, welche anschließend wieder vollständig abgegeben wird. Das dadurch resultierende Mittel der Leistung beträgt immer null. Diese Leistung wird als Blindleistung Q Bezeichnet. Es wird dabei zwischen induktiver und kapazitiver Blindleistung unterschieden. Für die induktive Blindleistung ergibt sich eine positive Phasenverschiebung für die Leistung, was genau dem Verlauf des Sinusfunktion entspricht. Die kapazitive Blindleistung wird entgegengesetzt verschoben, sodass sich ebenfall eine Sinusfunktion, jedoch mit negativem Vorzeichen definieren lässt. In den Gleichungen 6.13 und 6.14 werden die Gleichungen für die Berechnungen der induktiven und kapazitiven Blindleistung vorgestellt. Die Maßeinheit für die induktive und kapazitive Blindleistung ist das var (Volt-Ampere-reaktiv).

$$Q_{\text{Ind}} = U \cdot I \cos(\varphi + 90°) = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \tag{6.13}$$

$$Q_{\text{Kap}} = U \cdot I \cos(\varphi - 90°) = -U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \tag{6.14}$$

$$[Q] = 1\ Volt - Ampere - reaktiv = 1\ \text{var}$$

Bei idealen kapazitiven oder induktiven Widerständen wird keine Energie in Form von Wärme umgesetzt. Es ändert sich lediglich das magnetische oder elektrische Feld, so wird also Energie gespeichert oder abgegeben.

Merke: Wirkleistung und Blindleistung

In der komplexen Ebene wird die Leistung durch die Wirkleistung und die Blindleistung erklärt. Die Wirkleistung beschreibt den Realteil und die Blindleistung den Imaginärteil der komplexen Scheinleistung. Die Wirkleistung und die Blindleistung werden wie folgt definiert:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \qquad Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

6.3 Scheinleistung

Bisher wurden die Grundlagen der Leistungsbetrachtung von idealen ohmschen und induktiven/-kapazitiven Impedanzen betrachtet. Jedoch treten in den meisten Netzwerken sowohl ohmsche als auch induktive oder kapazitive Impedanzen auf. In solchen Netzen wird dann unterschieden zwischen Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung. Die Scheinleistung steht dabei für die Gesamtleistung des Systems. Um die Scheinleistung zu berechnen, wird mit dem Maximalwert gerechnet, also wenn keine Phasenverschiebung vorliegen würde. Damit ist dieser Wert gleich der Leistung eines idealen ohmschen Widerstands:

$$S = U \cdot I = P_{\mathrm{R}} \tag{6.15}$$

Wird die Scheinleistung in der komplexen Ebene betrachtet, kommen die Festzeiger zum Einsatz. Wird die kompexe Spannung mit dem komplexen Strom multipliziert, würden nach den Regeln des kompexen rechnens die Phasenwinkel addiert werden. Um eine korrekte Leistungsberechnung durchzuführen, muss jedoch eine Differenz zwischen den Phasenwinkeln vorliegen. Um diesem Problem abhilfe zu schaffen, wird mit dem konjugierten komplex Wert des Stroms gerechnet:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ mit \quad \underline{U} &= U \cdot e^{j\varphi_{\mathrm{u}}} \\ und \quad \underline{I}^* &= I \cdot e^{-j\varphi_{\mathrm{i}}} \qquad (6.16) \\ folgt \quad \underline{S} &= U \cdot e^{j\varphi_{\mathrm{u}}} \cdot I \cdot e^{-j\varphi_{\mathrm{i}}} \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_{\mathrm{u}} - \varphi_{\mathrm{i}})} \qquad (6.17) \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi)} \end{aligned}$$

Über den komplexen Wert der Spannung und den konjugiert komplexen Wert des Stromes lässt sich separat die Wirkleistung und die Blindleistung oder direkt die komplexe Scheinleistung bestimmen:

$$U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot (\cos\varphi + j\ \sin\varphi) = P + jQ = \underline{S} \tag{6.18}$$

Außerdem lässt sich über den Leistungsfaktor auch direkt ein Zusammenhang zwischen der Wirkleistung bzw. der Blindleistung und der Scheinleistung nach Gleichung 6.19 festlegen.

$$P = \cos(\varphi) \cdot S \qquad Q = S \cdot \sin(\varphi) \tag{6.19}$$

Merke: Komplexe Scheinleistung

Die komplexe Scheinleistung setzt sich aus der Wirkleistung und der Blindleistung zusammen. Sie kann auf verschiedene Weisen bestimmt werden:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{i})} = P + jQ$$

Die Größen Wirkleistung und Blindleistung sind in der komplexen Zahlenebene zu finden. Dabei ist die Wirkleistung ein rein reeler Wert und die Blindleistung stellt einen rein imaginären Wert dar. Die Scheinleistung, welche auch eine komplexe Größe ist, kann als Betrag des Weges von Wirk- und Blindleistung dargestellt werden (vgl. Abbildung 6.4). Die hier dargestellte Scheinleistung S mit zugehörigen Phasenwinkel φ ist im I. Quadranten verortet. Dies wird durch einen positiven Wirkleistungsanteil und einen positiven Blindleistungsanteil verursacht. Die positive Wirkleistung deutet an, dass von etwas elektrische Leistung aufgenommen wird, also eine elektrische Last darstellt. Deswegen wird hier vom Lastbetrieb gesprochen. Die positive Blindleistung spricht für die vorherschenden Effekte einer Spule und wirkt somit induktiv. Die Scheinleistung im I. Quadranten wird im induktiven Lastbetrieb betrieben. Wirkt eine negative Wirkleistung in die Scheinleistung, wird Wirkleistung abgegeben, wie bei einem Generator, welcher Leistung abgibt. Bei einer positiven Blindleistung liegt hier ein induktiver Generatorbetrieb vor (II. Quadrant). Ist die Blindleistung negativ, überwiegen kapazitive Effekte. Bei negativer Wirkleistung wird diese Betriebsform kapazitiver Generatorbetrieb genannt (III. Quadrant). Als letztes wird im IV. Quadranten ein kapazitiver Lastbetrieb beschrieben. Hier wirkt eine positive Wirkleistung und eine negative Blindleistung in die Scheinleistung ein.

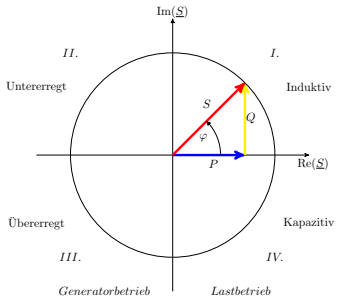


Abbildung 6.4: **Zeigerdiagramm der Leistung.** Zusammensetzung von Blind-, Wirk- und Scheinleistung in Abhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Hier eine induktive Last im positiven Imaginärteil.

Die Blindleistung wird unter anderem benötigt, um Magnetfelder in elektrischen Maschinen zu erzeugen. Der Blindleistungsbedarf entsteht durch Komponenten im System, welche entweder induktiv oder kapazitiv wirken. Wenn der Strom zur Erzeugung des Magnetfeldes (Erregerstrom) höher ist, als es für die nominale Leistung des Generators erforderlich wäre, ist ein Generator übererregt. In diesem Fall ist der Generator in der Lage, Blindleistung in das Netz abzugeben. Die hierdurch erhöhte Blindleistung im Netz führt zu einer Spannungsanhebung. Steigt der Energiebedarf im Netz, kann diese Gegebenheit dafür genutzt werden, einem Absinken der Netzspannung entgegenzuwirken. Andersherum arbeitet ein Generator mit einem geringeren Erregerstrom als benötigt im untererregten Zustand. Der Generator nimmt hier Blindleistung aus dem Netz auf, um das erforderliche Magnetfeld aufrecht zu halten. Der Bezug von Blindleistung führt dann wiederum zu einer Spannungsabsenkung im Netz. Bei einer starken untererregung eines Generators kann es zum Ausfall der elektrischen Maschine kommen.

Die Einheiten der drei Leistungsarten sind theoretisch alle vergleichbar. Um zwischen den Leistungsarten zu unterscheiden, wurden für die Scheinleistung und die Blindleistung neue Einheiten gewählt, welche physikalisch jedoch dasselbe aussagen. Für die Scheinleistung wurde die Einheit Volt-Ampere

[VA] festgelegt und für die Blindleistung Volt-Ampere-reaktiv [var]. Die Wirkleistung wird in der bekannten Einheit Watt [W] angegeben.

Tabelle 6.1: **Zusammenfassung der Leistungsarten.** Wirkleistung, Blindleistung und Scheinleistung welche durch Wechselgrößen hervorgerufen werden, aufgelistet mit den Formelzeichen und Einheiten.

Leistungsart			**Einheit**
Wirkleistung	P	W	(Watt)
Blindleistung	Q	var	(Volt-Ampere-reaktiv)
Scheinleistung	S	VA	(Volt-Ampere)

6.4 Leistung und elektrische Energie

Neben der elektrischen Leistung ist auch die elektrische Energie eine genutzte Größe, um beispielsweise Verbräuche von Haushalten zu erfassen. Hier wird die elektrische Leistung pro Zeiteinheit gemessen. Nach der Definition aus der Thermodynamik ist die Energie die über einen bestimmten Zeitraum aufgebrachte Leistung. Es wird also gemäß Gleichung 6.20 die elektrische Leistung während einer Zeit zwischen t_1 und t_2 aufintegriert um die elektrische Energei zu bestimmen.

$$E_{\mathrm{el}} = \int_{t_1}^{t_2} p_{\mathrm{el}}(t)\ \mathrm{d}t \tag{6.20}$$

Vergleichbar mit der Wirkleistung und der Blindleistung lässt sich auch die Energie in eine Wirkarbeit und eine Blindarbeit unterteilen. Die Blindarbeit beschreibt dabei denjenigen Anteil der elektrischen Energie, welcher nicht in Nutzenergie, bzw. Wirkarbeit. umgewandelt wird.

$$W_{\mathrm{N}} = \int_{t_1}^{t_2} p(t)\ \mathrm{d}t \qquad W_{\mathrm{Q}} = \int_{t_1}^{t_2} Q\ \mathrm{d}t \tag{6.21}$$

Im stationären Zustand werden lediglich die Effektivwerte von Spannung und Strom und somit auch von der Scheinleistung, Wirkleistung und Blindleistung betrachtet und sind somit zeitlich konstant.

$$W_{\mathrm{N}} = P \cdot (t_2 - t_1) \qquad W_{\mathrm{Q}} = Q \cdot (t_2 - t_1) \tag{6.22}$$

Beispiel 6.1: Leistungsberechnung

An einer Wechselstromlast werden die folgenden Werte für die Wechselspannung und den Wechselstrom gemessen:

Gegeben sind:

$$\hat{U} = 12\ V \qquad \hat{I} = 2A \qquad \varphi = 60^{\circ}$$

Die folgenden Aufgaben sollen bearbeitet werden:

a) Berechnung von Wirkleistung und Blindleistung.

b) Berechnung der Scheinleistung mit dem konjugierten komplexen Strom.

a) Die Wirkleistung beträgt:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi) = \frac{12\ V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\ A}{\sqrt{2}} \cdot \cos(60^o)$$
$$P = 6\ W$$

Die Blindleistung beträgt:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\varphi) = \frac{12\ V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\ A}{\sqrt{2}} \cdot \sin(60^o)$$
$$Q = 10{,}392\ var$$

b) Die Scheinleistung beträgt:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{\hat{\underline{U}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{\underline{I}}^*}{\sqrt{2}} = \frac{12\ V}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(2\pi \cdot 20\ Hz)} \cdot \frac{2\ A}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(2\pi \cdot 20\ Hz + \frac{\pi}{3})}$$
$$\underline{S} = 12\ VA \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 6\ W + j10{,}392\ var$$

7 Drehstrom

Um einen möglichst effizienten Energietransport zu gewährleisten wird in vielen Netzsystemen Drehstrom eingesetzt. Grundlage des Drehstrom ist der Wechselstrom, welcher nicht als einzelne Phase, sondern als Zusammenschluss von mehreren Phasen genommen wird. Erzeugt wird Wechselstrom mit Generatoren, die nicht nur eine einzelne Wicklung im Rotor verbaut haben, sondern mehrere. Werden diese Wicklungen mit einem symmetrischen Abstand zu einander verbaut, werden je nach Anzahl der Wicklungen Phasen erzeugt. Es wird dann von einem Mehrphasensysteme gesprochen. Wenn genau drei Phasen vorliegen, wird das System Drehstrom genannt. Für das Verständniss von Drehstrom sind besonders die Grundlagen zum Wechselstrom und dem komplexen Rechnen relevant.

Lernziele: Drehstrom

Die Studierenden

- verstehen die grundsätzlichen Gegebenheiten des Drehstroms und der dazugehörigen Operatoren.
- können Drehstromsysteme mit gleicher Belastung (Symmetrische Komponenten) analysieren.
- kennen die Gegebenheiten von Drehstromsystemen mit unterschiedlicher Phasenbelastung (Unsymmetrische Komponenten).

7.1 Symmetrische Komponenten

Im Bereich der Energieerzeugung, -übertragung und -verteilung wird hautpsächlich mit Drehstrom gearbeitet. Der Begriff „Drehstrom“kommt aus der technischen Gegebenheit, dass die Systeme mit dem räumlich rotierenden Magnetfeld des Generators verbunden sind: Dem Drehfeld. Alle Phasen in einem Mehrphasensystem werden mit der gleichen Frequenz erzeugt, die bekanntermaßen in Europa bei 50 Hz liegt. Die erzeugten Phasen werden am Ort der Erzeugung, also dem Generator, und hinter den Verbrauchern verschaltet. Im Drehstromsystem, also einem Drei-Phasen-System, stehen dafür die Sternschaltung oder die Dreiecksschaltung zur Verfügung. Im symmetrischen Fall erzeugt der Generator so viele Phasen, wie Wicklungen im Rotor verbaut sind. Die Wicklungen sind dabei mit immer im gleichen Winkel verbaut. Dieser Winkel bekommt den griechischen Buchstaben α zugeordnet:

$$\alpha = \frac{2\pi}{m} \tag{7.1}$$

Das m steht in der Formel für die Anzahl an Phasen, die in dem System erzeugt werden. Bei einem Drehstromsystem sind drei Phasen vorhanden. Daraus ergibt sich ein α von 120°.

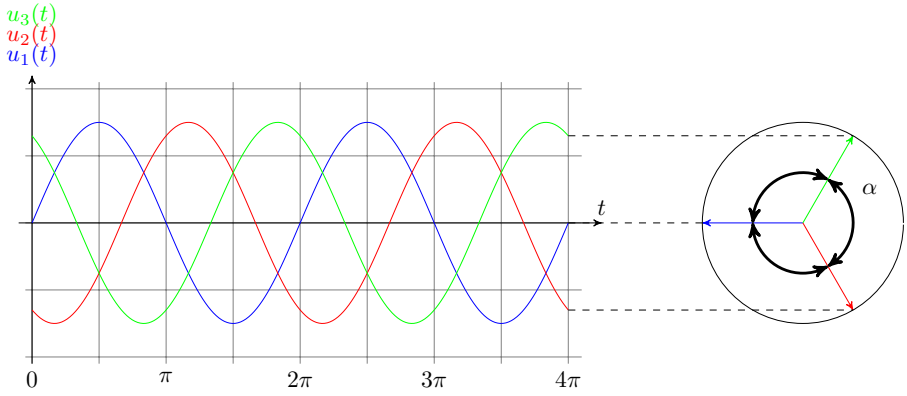


Abbildung 7.1: **Drei Phasen des Drehstroms.** Die drei Phasen des Drehstromsystems sind alle zueinander um 120° phasenverschoben. Hieraus ergibt sich der Winkel α von 120°.

Im nächsten Schritt soll ein Drehoperator aus dem Winkel α abgeleitet werden. Dieser Drehoperator dient der Umrechnung der Spannungen und Ströme zur Bezugsspannung/zum Bezugsstrom.

$$\underline{a} = e^{j\alpha} = e^{j\frac{2\pi}{m}} \tag{7.2}$$

Für $m = 3$:

$$\begin{aligned}
\underline{a} &= e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\
\underline{a}^2 &= e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a}^* \\
\underline{a}^3 &= e^{j2\pi} = 1 \\
\underline{a}^4 &= e^{j\frac{8\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a} \\
\underline{a}^5 &= e^{j\frac{10\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{a}^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Merke: Drehoperator

Der Winkel α gibt die Phasenverschiebung zwischen den Phasen an. Mithilfe des Drehoperators $\underline{a}$ können Spannungen und Ströme umgerechnet werden.

Die komplexen Spannungen der jeweiligen Außenleiter gegenüber einem Neutralleiter können mit der folgenden Gleichung formuliert werden:

$$\underline{U}_{\mathrm{Lm}} = U_{\mathrm{L1}} \cdot e^{-j(m-1)\alpha} \tag{7.3}$$

Die Spannung U_1 ist dabei eine reele Bezugsgröße für das Mehrphasensystem.

Nun werden die Gleichungen für den Drehoperator mit der für die Spannung zusammengebracht und ergeben folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{\mathrm{L1}} &= \underline{a}^{m} \cdot U_{\mathrm{L1}} = 1 \cdot U_{\mathrm{L1}} \\
\underline{U}_{\mathrm{L2}} &= \underline{a}^{m-1} \cdot U_{\mathrm{L1}} \\
&\vdots \\
\underline{U}_{\mathrm{Lm-1}} &= \underline{a}^{2} \cdot U_{\mathrm{L1}} \\
\underline{U}_{\mathrm{Lm}} &= \underline{a} \cdot U_{\mathrm{L1}}
\end{aligned}$$

Mit einer Anzahl von drei Phasen, also $m = 3$, ergibt sich folgender Zusammenhang der drei Spannungen und dem Drehoperator:

$$\underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{U}_{\mathrm{L2}} + \underline{U}_{\mathrm{L3}} = U_1(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) \tag{7.4}$$

Anmerkung:

In der Literatur sind die Indizes für die Spannungen nicht immer einheitlich gewählt. Die häufigste Alternative sind die Buchshtaben u, v, w für die Phasen $1, 2, 3$. Es werden noch weitere Indizes verwendet, die hier jedoch nicht weiter erwähnt werden sollen.

In Abb. 7.2 soll nochmals deutlich gemacht werden, wie sich die Drehoperatoren im Komplexen zusammensetzen.

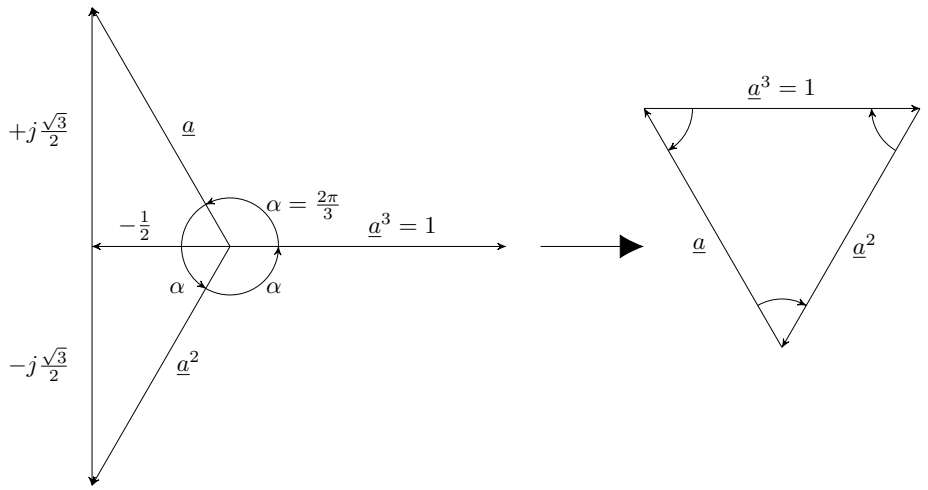


Abbildung 7.2: **Zeigerdiagramm des Drehoperators im Drehstromsystem.** Werden die Drehoperatoren aufsummiert, ergibt sich als Ergebniss Null.

Wird dem Weg über die drei Drehoperatoren gefolgt, gelangt man zurück zum Ursprung und erhält Null.

$$\begin{aligned}
1 + \underline{a} + \underline{a}^2 &= 0 \\
\underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{U}_{\mathrm{L2}} + \underline{U}_{\mathrm{L3}} &= 0
\end{aligned}$$

7.1.1 Verkettete Systeme im Stern

In den folgenden Kapiteln soll darauf eingegangen werden, welche Formen der Verschaltung in einem Drehstromsystem vorkommen können. Zuerst soll auf die sogenannte Sternschaltung eingegangen werden. Sternschaltung bedeutet, dass die Stränge so zusammengeführt werden, dass sich ein sogenannter Sternpunkt bildet. Ein System kann sowohl auf Generator-, als auch auf Verbraucherseite verschaltet werden. In Abb. 7.3 sind die die typischen Komponenten einer Sternschaltung in einem dreiphasigen Ersatzschaltbild eingetragen. Für jede Phase, die der Generator erzeugt wird eine Spannungsquelle eingetragen. Wenn der Generator eine Sternschaltung aufweist, werden in dem ESB auf die einzelnen Spannung in einem Knotenpunkt zusammengeführt. Dieser Knotenpunkt soll den Buchstaben N_Q erhalten. Von jeder Spannungsquelle geht ein Strang aus, welcher die jeweilige Phase wiederspiegeln soll. Auf Grund der physikalischen Gegebenheiten weisen die Komponenten, die nach dem Generator angeschlossen sind, also vor allem die Leitung und der Verbraucher, sowohl Wirk- wie auch Blindwiderstände auf. Diese werden in dem ESB zu jeweils einer Impedanz pro Strang zusammengefasst. Die Impedanzen der Stränge werden in der Sternschaltung wie auch die Spannungsquellen zu dem Knotenpunkt N_V zusammengeführt. In einem System, in dem sowohl die Generator- als auch die Verbraucherseite im Stern verschaltet sind, kann es zu den Strängen der Phasen noch einen Neutralleiter oder Rückleiter geben, welcher die beiden Knotenpunkte miteinander verbindet.

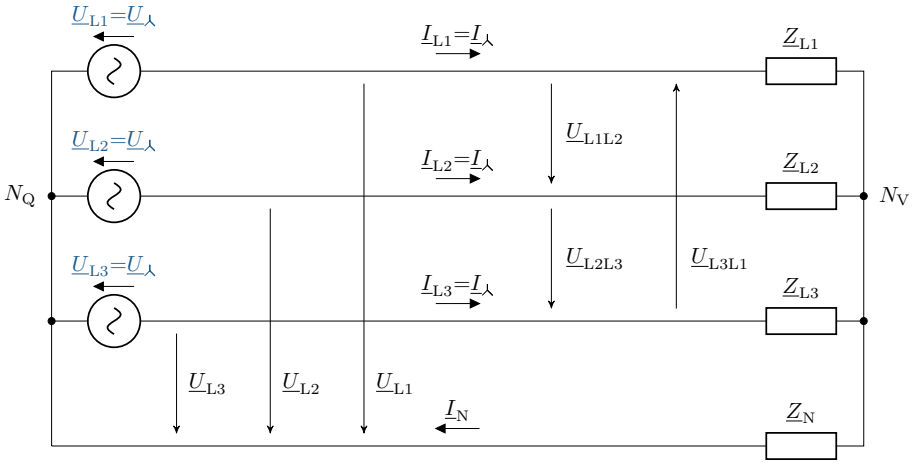


Abbildung 7.3: **ESB für ein Drehstromsystem.** Erzeugern und Verbraucher im Stern und ein Neutralleiter zwischen den Knotenpunkten.

Spannungen

Grundsätzlich gibt es in einem Drehstromsystem drei Spannungen, welche spezifisch genannt werden sollten:

- Außenleiter-Neutralleiter-Spannung (Sternspannung) $U_{\curlywedge}$: Spannung des Leiters gegenüber dem Neutralleiter (U_{L1}, U_{L2}, U_{L3})
- Außenleiter-Spannung (verkettete Spannung) U: Spannung zwischen zwei Leitern (U_{L1L2}, U_{L2L3}, U_{L3L1}) – diese Spannung wird auch als Dreieckspannung bezeichnet
- Strangspannung U_{str}: Spannung über die Impedanz des Leiters gegenüber dem Neutralleiter. Je nach Verschaltung ist die Strangspannung entweder gleich der Sternspannung oder der Dreieckspannung

Ströme

Für Ströme in einem Sternsystem ist es hilfreich das 1. Kirchhoffsche Gesetz anzuwenden. Die Summe der Ströme der Stränge muss gleich dem Strom im Neutralleiter sein:

$$\underline{I}_{\mathrm{N}} = \underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}_{\mathrm{L3}} \tag{7.5}$$

Im Bezug zu den Spannungen und Impedanz ergibt sich nach dem Ohmschen Gesetz:

$$\underline{I}_{\mathrm{N}} = \frac{\underline{U}_{\mathrm{L1}}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{\mathrm{L2}}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{\mathrm{L3}}}{\underline{Z}_3} = \underline{U}_{1\mathrm{m}}\underline{Y}_1 + \underline{U}_{2\mathrm{m}}\underline{Y}_2 + \underline{U}_{3\mathrm{m}}\underline{Y}_3 \tag{7.6}$$

Wenn von einem symmetrischen System gesprochen wird, gilt das nicht nur für den Generator, sondern auch für die Impedanzen. Demnach sind die Impedanzen der drei Stränge alle gleich groß:

$$\underline{Z}_{\mathrm{L1}} = \underline{Z}_{\mathrm{L2}} = \underline{Z}_{\mathrm{L3}} = \underline{Z} \tag{7.7}$$

Wird dieser Zusammenhang für ein symmetrisches System für die Gleichung 7.7 berücksichtigt, kann die Impedanz herausgezogen werden. Nun ist bereits bekannt, dass die Summe der Spannungen in einem symmetrischen System null ergibt. Somit lässt sich beweisen, dass die Summe der Ströme auch null ergeben muss.

$$\underline{I}_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\underline{Z}}(\underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{U}_{\mathrm{L2}} + \underline{U}_{\mathrm{L3}}) = 0 \tag{7.8}$$

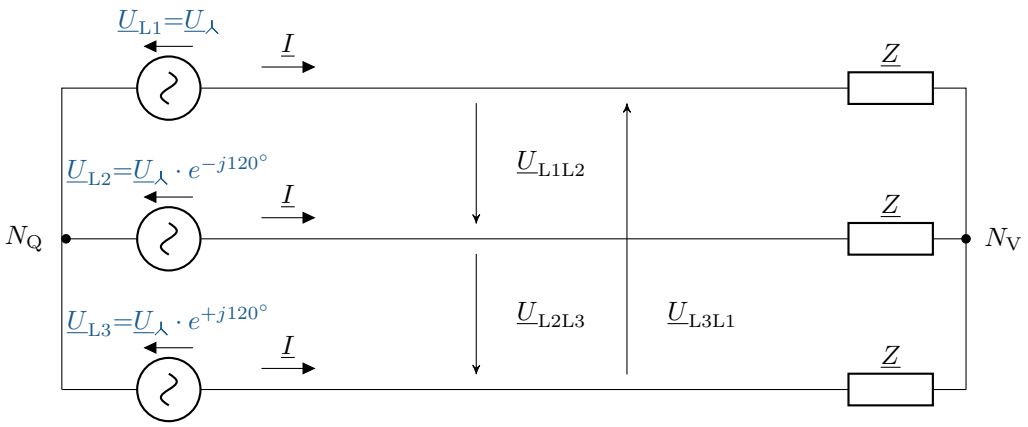


Abbildung 7.4: **Dreiphasiges Ersatzschaltbild Stern-Stern.** ESB mit symmetrischen Verbrauchern im Stern

Um nicht immer das vollständige dreiphasige ESB zeichnen zu müssen, wie in Abb 7.4, gibt es die Möglichkeit, ein vereinfachtest einphasiges ESB zu zeichnen. Wichtig bei der Aufstellung des einphasigen ESB (natürlich auch bei jedem anderen ESB) ist, dass die korrekten Bezeichnungen für die Ströme, Spannungen und Impedanzen über die Indizes gewählt wird. Für die Sternschaltung ist das einphasige ESB in Abb. 7.5 abgebildet.

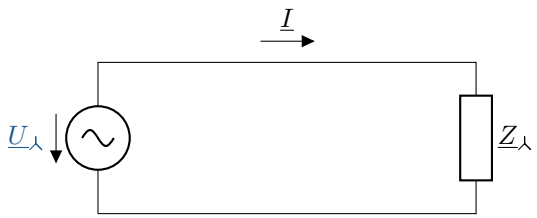


Abbildung 7.5: **Einphasiges Ersatzschaltbild Stern-Stern.** ESB mit symmetrischen Verbrauchern im Stern

Merke: Symmetrische Komponenten

Symmetrischen Komponenten beschreiben eine **gleiche Belastung der Phasen**, beispielsweise in einem Dreiphasensystem. Hier werden alle drei Phasen durch identische Verbraucher belastet.

7.1.2 Verkettete Systeme im Dreieck

Alternativ zu der Verschaltung im Stern können die Quellen und Verbraucher im Dreieck verschaltet werden. Für die Generatorseite gilt jedoch, dass diese in den meisten Fällen im Stern verschaltet ist. Hintergrund ist, dass bei kleinsten unsymmetrien Ausgleichströme fließen, die den Betrieb des Generators beienflussen würden. Das soll möglichst vermieden werden, wodurch eine Sternschaltung eine bessere Betriebsweise darstellt. Deswegen wird angenommen, dass die Generatorseite grundlegend im Stern verschaltet ist. Wenn also von einer Dreieckschaltung die Rede ist, wird, außer es wird explizit erwähnt, nur die Verbraucherseite gemeint.

Es wurde bereits definiert, dass die Außenleiter-Spannung auch Dreiecksspannung genannt wird. Nach dem Maschen-Gesetz ergibt sich die Dreieckspannung zweier Leiter aus der Differenz der jeweiligen Sternspannung:

$$\underline{U}_{\mathrm{L1L2}} = \underline{U}_{\mathrm{L1}} - \underline{U}_{\mathrm{L2}} \tag{7.9}$$

Wenn nun der Wert der jeweiligen Außenleiterspannung errechnet werden soll, müsste nach der Gleichung 7.9 komplex gerechnet werden. Es kann jedoch mit Hilfe einer trigonometrischen Herleitung ein Verhältnis zwischen Sternspannung und Dreiecksspannung beschrieben werden.

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{m}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{G}{H} \tag{7.10}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\frac{\underline{U}_{\mathrm{L1L2}}}{2}}{\underline{U}_{\mathrm{L1}}} \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\underline{U}_{\mathrm{L1L2}}}{\underline{U}_{\mathrm{L1}}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L1}} &= \frac{\underline{U}_{\mathrm{L1L2}}}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{7.11}$$

Merke: Stern-Dreieck-Umrechnungsfaktor

Die Sternspannung und die Dreieckspannung können über den Umrechnungsfaktor $\sqrt{3}$ ineinander umgewandelt werden:

$$U_{\curlywedge} = \frac{U_{\triangle}}{\sqrt{3}}$$

In Abb. 7.6 soll mit Hilfe des Zeigerdiagramm der komplexen Drehspannungen das Verhältinis zwischen Stern- und Dreieckspannung aufgezeigt werden. Dafür werden die trigonometrischen Grundlagen genommen, um die Länge der Außenleiterspannung (also der Dreieckspannung) anders darzustellen. In Gleichung 7.10 ist zuerst allgemein beschrieben, wie in einem Mehrphasensystem der Sinus verwendet werden kann. Diese Gleichung gilt allgemein, unabhängig wie viele Phasen das System aufweist. In Gleichung 7.11 wird für m 3 eingesetzt. Der Winkel wird dadurch immer halb so groß, wie der eigentliche Winkel zwischen den Phasen wäre. Dadurch ist die Gegenkathete des Sinus die halbe Dreieckspannung. Mit Umstellung und Umwandlung des Wertes $sin(\frac{\pi}{3})$ in $\frac{\sqrt{3}}{2}$ erhält man schließlich den Faktor, um Stern- und Dreieckspannung umrechnen zu können.

In der Praxis wird die Sternspannung immer gekennzeichnet mit einem Sternsymbol als Index, bei der Dreieckspannung wird meistens auf ein Index verzichtet.

$$U_{\curlywedge} = \frac{U_{\triangle}}{\sqrt{3}} = \frac{U}{\sqrt{3}} \tag{7.12}$$

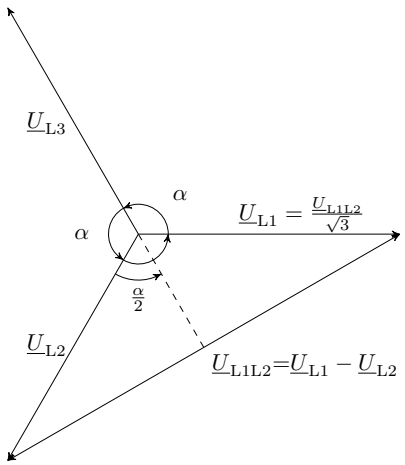


Abbildung 7.6: **Zeigerdiagramm zur Darstellung der Herleitung des Faktors zwischen Stern- und Dreieckschaltung.** Die verkettete Spannung zwischen zwei Außenleitern $\underline{U}_{\mathrm{L1L2}}$ lässt sich über den Umrechnungsfaktor $\sqrt{3}$ in die Außenleiterspannung $\underline{U}_{\mathrm{L1}}$ umwandeln.

Wie in der Abbildung 7.7 zu sehen, sind die Impedanzen der Verbraucher nun so geschaltet, dass es keinen Sternpunkt mehr gibt. In dieser Schaltung entsprechen die Strangspannungen nun den Außenleiter- oder Dreieckspannung.

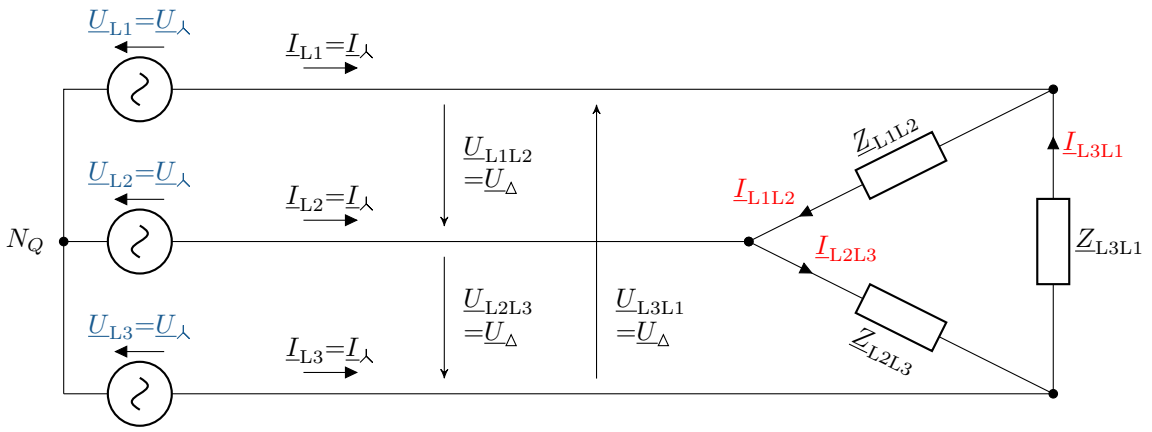


Abbildung 7.7: **Dreiphasiges Ersatzschaltbild Stern-Dreieck.** ESB mit Erzeugern im Stern und Verbrauchern im Dreieck.

Die Ströme zwischen den Strängen können aus der Knotenregel folgendermaßen ermittelt werden:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L1L2} - \underline{I}_{L3L1} \tag{7.13}$$
$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{L2L3} - \underline{I}_{L1L2} \tag{7.14}$$
$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L3L1} - \underline{I}_{L2L3} \tag{7.15}$$

Wie auch bei der Sternschaltung kann im symmetrischen Fall gesagt werden, dass alle Impedanzen den gleichen Wert haben. Daraus ergibt sich für die Ströme im Strang:

$$\underline{I}_{L1} = \underline{I}_{L1L2} - \underline{I}_{L3L1} = \frac{\underline{U}_{L1L2} - \underline{U}_{L3L1}}{\underline{Z}} = \frac{U_{\curlywedge}}{\underline{Z}} \cdot (1 - \underline{a}^2 - \underline{a} + 1) = 3 \cdot \frac{U_{\curlywedge}}{\underline{Z}} \tag{7.16}$$
$$\underline{I}_{L2} = \underline{I}_{L2L3} - \underline{I}_{L1L2} = \frac{\underline{U}_{L2L3} - \underline{U}_{L1L2}}{\underline{Z}} = \frac{U_{\curlywedge}}{\underline{Z}} \cdot (\underline{a}^2 - \underline{a} - 1 + \underline{a}^2) = 3 \cdot \underline{a}^2 \cdot \frac{U_{\curlywedge}}{\underline{Z}} \tag{7.17}$$
$$\underline{I}_{L3} = \underline{I}_{L3L1} - \underline{I}_{L2L3} = \frac{\underline{U}_{L3L1} - \underline{U}_{L2L3}}{\underline{Z}} = \frac{U_{\curlywedge}}{\underline{Z}} \cdot (\underline{a} - 1 - \underline{a}^2 + \underline{a}) = 3 \cdot \underline{a} \cdot \frac{U_{\curlywedge}}{\underline{Z}} \tag{7.18}$$

Aus diesen Umformungen geht hervor, dass die Ströme sich nur durch den Drehoperator a unterscheiden. Äquivalent zu der Umrechnung von der Stern- zur Dreiecksspannung kann auch ein Verhältniss zwischen Strang- und Dreiecksstrom aufgestellt werden. Nach gleicher Herleitung, wie in Abb. 7.6 zu sehen, nur die Spannung durch die passenden Stromwerte ersetzt, ergibt sich folgendes Verhältnis:

$$I_{str} = \sqrt{3} \cdot I_{\triangle} \tag{7.19}$$

Mit den vorhandenen Angaben kann nun auch ein einphasiges ESB für die Dreieckschaltung aufgestellt werden (siehe Abb. 7.8).

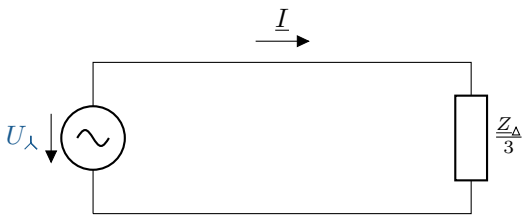


Abbildung 7.8: **Einphasiges Ersatzschaltbild Stern-Dreieck.** ESB einer Dreieckschaltung mit symmetrischen Verbrauchern

7.1.3 Leistung im symmetrischen Drehstromnetz

Die Berechnung von Leistung basiert, wie in allen elektrischen System, auf der Gleichung $P = U \cdot I$. Für das Drehstromsystem gilt die Besonderheit, dass die Leistung pro Phase berechnet werden muss. Liegt ein symmetrisches System vor, sind die Ströme und Spannungen pro Phase gleich und dementsprechend muss kann das Ergebnis aus einer Phase mit 3 multipliziert werden.

$$\begin{aligned} S &= 3 \cdot I_{\text{str}} \cdot U_{\curlywedge} = 3 \cdot I_{\text{str}} \cdot \frac{U_{\triangle}}{\sqrt{3}} \\ &= 3 \cdot I_{\triangle} \cdot U_{\triangle} = 3 \cdot \frac{I_{\text{str}}}{\sqrt{3}} \cdot U_{\triangle} \\ &= \sqrt{3} \cdot U_{\triangle} \cdot I_{\text{str}} \end{aligned} \tag{7.20}$$

Aus der Formel 7.20 geht hervor, dass es für die Leistungsberechnung keinen Unterschied macht, in welcher Schaltung gerechnet wird. Es muss nur darauf geachtet werden, mit welchen Spannungen und Strömen gerechnet wird (Dreieck oder Stern).

Anmerkung:

Die Notation der Indizes zu Dreiecks- oder Stern-Werten ist in der Literatur nicht eindeutig. Meistens wird für die Dreieckspannung (Außenleiterspannung) und dem Strangstrom kein Index angegeben $U_{\triangle} = U$ und $I_{str} = I$, sondern nur für die Sternspannung und dem Dreieckstrom.

Vergleicht man direkt die Leistung einer Dreieckschaltung und einer Sternschaltung, erhält man unterschiedliche Ergebnisse.

Für die Sternschaltung erhält man folgenden Wert:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot U \cdot \frac{U_{\curlywedge}}{Z} = \frac{U^2}{Z} \tag{7.21}$$

Für die Dreieckschaltung erhält man wiederum:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot U \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{U}{Z} = 3 \cdot \frac{U^2}{Z} \tag{7.22}$$

Demnach ist der Leistungsumsatz bei gleichen Impedanzen in einer Dreieckschaltung um den Faktor 3 größer als in einer Sternschaltung.

7.2 Unsymmetrische Komponenten

Die Grundlagen eines Drehstromsystems wurden im vorangegangenen Kapitel erläutert. Es wurde jedoch stets vorausgesetzt, dass sowohl die Erzeugung als auch die Verbraucher symmetrisch sind. Nun soll betrachtet werden, wie sich das System verhält, wenn Unsymmetrien vorliegen. Es bleibt

jedoch erstmal dabei, dass die Generatorseite symmetrisch und im Stern verschaltet ist. Bleibt die Erzeugung star, können drei unterschiedliche Schaltungsarten vorliegen:

- Vierleiternetz in Sternschaltung
- Dreileiternetz in Sternschaltung
- Dreileiternetz in Dreieckschaltung

Merke: Unsymmetrische Komponenten

Unsymmetrischen Komponenten beschreiben im Gegensatz zu symmetrischen Komponenten die **ungleiche Belastung der Phasen** durch unterschiedliche Verbraucher.

7.2.1 Vierleiternetz in Sternschaltung

Der Aufbau eines Vierleiternetz in Sternschaltung wurde als ESB in Abb. 7.3 dargestellt. Der Rückleiter wird dabei an die beiden Sternpunkte angeschlossen und verbindet damit Generator- und Verbraucherseite. Dadurch, dass die Sternspannung symmetrisch sind (aus der Vorgabe, dass die Generatorseite symmetrisch ist), sind auch die Verbraucherspannungen spannungssymmetrisch. Die Ströme hingegen weichen durch die unterschiedlichen Impedanzen von einander ab. So ist der Strom im Rückleiter in der Regel ungleich Null.

$$\underline{I}_{\mathrm{N}} = \underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}_{\mathrm{L3}} \tag{7.23}$$

Logischerweise kann dann auch nicht mehr die Leistung so berechnet werden, wie in Formel 7.20 dargestellt. Es muss nun jeder Leiter einzeln berechnet und schließlich addiert werden.

$$\underline{S} = \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}^*_{\mathrm{L2}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}^*_{\mathrm{L3}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L3}} \tag{7.24}$$

7.2.2 Dreileiternetz in Sternschaltung

Prinzipiell gelten die gleichen Voraussetzungen im Dreileiternetz in Sternschaltung wie im Vierleiternetz. Der Unterschied liegt darin, dass der Strom nicht im Rückleiter abfließen kann und somit Auswirkung auf die anderen Leiter hat (s. Abb. 7.9). Aquivalent gilt das auch für die Spannung. Da kein Spannungsabfall im Rückleiter stattfindet, wirkt sich das auf die Spannung über den Verbrauchern aus. Es entstehet eine Spannungsdifferenz zwischen den beiden Sternpunkten, die mit den Spannungen über den Verbrauchern erst berechnet werden muss. Bei der Ermittlung der gesuchten Werte, können zwei Methoden angewendet werden. Für die erste Methode werden die Impedanzen rechnerisch in eine Dreieckschaltung umgewandelt, damit einfach und mit bekannten Methoden gerechnet werden kann. Denn in der Dreieckschaltung sind die Spannungen über die Impedanzen gleich den Leiterspannungen. Auch die Außenleiterströme lassen sich relativ einfach bestimmen.

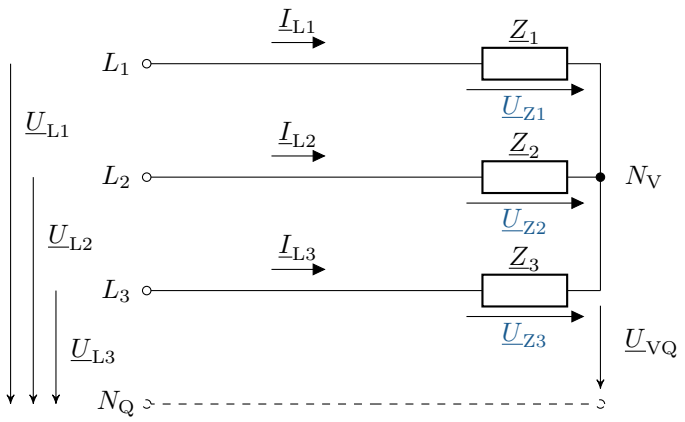


Abbildung 7.9: **Vereinfachtes ESB.** Dreileiternetz in Sternschaltung mit unsymmetrischen Verbrauchern

Bei dem alternativen Lösungsweg können mit den bekannten Gesetzen nach Ohm und Kirchhoff Gleichungen aufgestellt werden mit den bekannten Werten des Systems. Für die Differenzspannung zwischen den beiden Sternpunkten kann folgende Gleichung aufgestellt werden:

$$\underline{U}_{VQ} = \frac{\frac{\underline{U}_{L1}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_{L2}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_{L3}}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{U}_{L1} \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{U}_{L2} \cdot \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{U}_{L3} \cdot \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_3 \cdot \underline{Z}_1} \tag{7.25}$$

Die Leistung berechnet sich wie bekannt aus der Summer der Leistungen der einzelnen Phasen. Wichtig ist jedoch, dass nicht mit den Außenleiterspannung gerechnet wird, sondern mit den Spannungen über die Impedanzen:

$$\underline{S} = \underline{I}^*_{L1} \cdot \underline{U}_{Z1} + \underline{I}^*_{L2} \cdot \underline{U}_{Z2} + \underline{I}^*_{L3} \cdot \underline{U}_{Z3} \tag{7.26}$$

Theoretisch könnte mit dieser Formel die Berechnung erfolgen. Jedoch werden mit Messungen nicht die Werte gemessen, die für diese Formel benötigt werden. (Wie Messungen in einem Drehstromsystem durchgeführt werden, wird noch in einem folgenden Kapitel erklärt.) Wird die Formel für die Leistung wie folgt umgestellt, erkannt man, dass die Summe der Leiterströme Null ergeben müssen und somit der letzte Term wegfällt.

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{I}^*_{L1} \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}^*_{L2} \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}^*_{L3} \cdot \underline{U}_{L3} - \underline{U}_{VQ} \cdot (\underline{I}^*_{L1} + \underline{I}^*_{L2} + \underline{I}^*_{L3}) \\ &= \underline{I}^*_{L1} \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}^*_{L2} \cdot \underline{U}_{L2} + \underline{I}^*_{L3} \cdot \underline{U}_{L3} \end{aligned} \tag{7.27}$$

Hier sieht man, dass diese Formel für die Leistung die gleiche ist, wie im Vierleiternetz in Sternschaltung. Es kann jedoch hier eine Vereinfachung vorgenommen werden, da mit der Knotenregel ein Strom durch die beiden anderen Ströme ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{I}^*_{L1} \cdot \underline{U}_{L1} + \underline{I}^*_{L2} \cdot \underline{U}_{L2} + (-\underline{I}^*_{L1} - \underline{I}^*_{L2}) \cdot \underline{U}_{L3} \\ &= (\underline{U}_{L1} - \underline{U}_{L2}) \cdot \underline{I}^*_{L1} + (\underline{U}_{L2} - \underline{U}_{L3}) \cdot \underline{I}^*_{L2} \\ &= \underline{U}_{L3L1} \cdot \underline{I}^*_{L1} + \underline{U}_{L2L3} \cdot \underline{I}^*_{L2} \end{aligned} \tag{7.28}$$

7.2.3 Dreileiternetz in Dreieckschaltung

Bei einer Dreieckschaltung steht kein Sternpunkt zur Verfügung, weshalb die Dreickschaltung nur in einem Dreileiternetz ausgeführt werden kann. In der Dreieckschaltung sind auf Grund der symmetrischen Einspeisung die Außenleiterspannungen ebenfalls symmetrisch. Die Ströme stellen sich je nach den Impedanzen ein und lassen sich wie bereits bekannt errechnen:

$$\underline{I}_{\mathrm{L1}} = \underline{I}_{\mathrm{L1L2}} - \underline{I}_{\mathrm{L3L1}} \tag{7.29}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{L2}} = \underline{I}_{\mathrm{L2L3}} - \underline{I}_{\mathrm{L1L2}} \tag{7.30}$$
$$\underline{I}_{\mathrm{L3}} = \underline{I}_{\mathrm{L3L1}} - \underline{I}_{\mathrm{L2L3}} \tag{7.31}$$

Die Summe der Außenleiterströme muss natürlich auch bei unsymmetrischen Strömen stets Null sein. Somit ergibt sich für die Leistungsberechnung die gleiche Rechnung wie bei der Sternschaltung im Dreileiternetz und somit auch die gleichen Umformungen.

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{I}^*_{\mathrm{L1L2}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L1L2}} + \underline{I}^*_{\mathrm{L2L3}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L2L3}} + \underline{I}^*_{\mathrm{L3L1}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L3L1}} \\ &= \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}^*_{\mathrm{L2}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}^*_{\mathrm{L3}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L3}}\end{aligned} \tag{7.32}$$

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}^*_{\mathrm{L2}} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L2}} + (-\underline{I}^*_{\mathrm{L1}} - \underline{I}^*_{\mathrm{L2}}) \cdot \underline{U}_{L3} \\ &= (\underline{U}_{\mathrm{L1}} - \underline{U}_{\mathrm{L2}}) \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} + (\underline{U}_{\mathrm{L2}} - \underline{U}_{\mathrm{L3}}) \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L2}} \\ &= \underline{U}_{\mathrm{L3L1}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} + \underline{U}_{\mathrm{L2L3}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L2}}\end{aligned} \tag{7.33}$$

8 Mehrphasensysteme - Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem

Im Kapitel Drehstrom wurde erläutert, wie sich die Spannungen, die Ströme und die Leistungen in verschiedenen dreiphäsigen Systemen zusammensetzen. In dem besonderen Fall von symmetrischen Verbrauchern konnte gezeigt werden, dass relativ einfach eine Netzberechnung druchgeführt werden kann. Vor allem die vereinfachte Darstellung durch die einphasigen Ersatzschaltbilder hilft bei der Berechnung. Durch unsymmetrische Verbraucher können diese Vereinfachungen nicht angenommen werden und führen dazu, dass umfassendere Netzberechnungen auch schon bei kleinen Netzen unübersichtlich und aufwändig werden. Unsymmetrien treten z.B. durch Netzfehler wie ein einpoliger Kurzschluss, durch Schalthandlungen, oder unsymmetrische Belastung der einzelnen Phasen auf. Die Zusammenhänge von auslösenden Ereignissen und den Ergebnissen sind allein anhand von Zahlenwerten schwer nachvollziehbar. Um auch umfassende und unsymmetrische Netze berechnen zu können, kann mit einer Transformation des bekannten Systems in drei neue Systeme abhilfe geschaffen werden. Dafür werden die drei folgenden Systeme näher betrachtet:

Lernziele: Mehrphasensysteme

Die Studierenden

- verstehen die Funktionen von Mit-, Gegen- und Nullsystem.
- können die Drehstromleistung der verschiedenen Systeme berechnen.
- können Ersatzschaltbilder für symmetrische Quellen, Lasten und Leitungen erstellen.

8.1 Mit-, Gegen- und Nullsystem

Grundlegend ist das Ziel der Transformation, ein unsymmetrisches System von n Zeigern in n Systeme mit symmetrischer Zeigeranordnung zu überführen. Für ein Drehstromsystem bedeutet das, dass drei Systeme geschaffen werden sollen. Jeder Leiter, also L_1, L_2 und L_3 soll ersetzt werden durch ein System was eine symmetrische Zeigeranordnung hat. Grundlage der Transformationsvorschrift ist der bereits bekannte Drehoperator $\underline{a}$ und $\underline{a}^2$ (vgl. Gleichung 7.2). Für den Strom in den jeweiligen Leitern lassen sich so die Symmetriebedingungen aufstellen (Hier ist anzumerken, dass alles was für den Strom gilt an Zusammenhängen auch für die Spannung gilt!):

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{\mathrm{L1}} &= \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\
\underline{I}_{\mathrm{L2}} &= \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a} \cdot \underline{I}_2 \\
\underline{I}_{\mathrm{L3}} &= \underline{I}_0 + \underline{a} \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_2
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Die Indizes den rechten Seiten der Gleichungen stehen für die drei Systeme: Mitsystem (1), Gegensystem (2) und Nullsystem (0). Schaut man sich die Werte des Mitsystems an, dann ergeben sich durch die Drehoperatoren rechtsdrehende Phasenströme. Bei dem Gegensystem sind die transformierten Phasenströme linksdrehend angeordnet und bei dem Nullsystem sind alle Komponenten gleichgerichtet. Grundsätzlich tritt das Nullsystem nur dann auf, wenn die Summe aller Ströme des Ausgangssystems ungleich Null sind.

Im nächsten Schritt werden die sogenannten Zerlegungsgleichungen (Gleichungen 8.1) so umgestellt, dass das Verhältnisse vom Strom des Mit- Gegen- Nullsystemes zu den Leiterströmen des Ursprungssytem aufzeigt wird.

Für den Strom im Nullsystem gilt durch Addition:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}_{\mathrm{L3}} &= 3 \cdot \underline{I}_0 + \underline{I}_1 \cdot (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) + \underline{I}_2 \cdot (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) \\ &= 3 \cdot \underline{I}_0 \qquad (8.2)\\ \Leftrightarrow \underline{I}_0 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}_{\mathrm{L3}}) \qquad (8.3)\end{aligned}$$

Für die Ermittlung des Stroms des Mitsystems werden zuerst die Gleichungen so multipliziert, dass die Vorfaktoren vor dem Mitstrom 1 ergeben. Danach werden die Zerlegungsgleichungen wieder addiert.

$\underline{a}^3 = 1$; $\underline{a}^4 = \underline{a}$; $\underline{a}^5 = \underline{a}^2$; ...

$$\underline{I}_{\mathrm{L1}} = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \qquad (8.4)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} = \underline{a} \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_2 \qquad (8.5)$$

$$\underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}} = \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a} \cdot \underline{I}_2 \qquad (8.6)$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}} &= \underline{I}_0 \cdot (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) + 3 \cdot \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \cdot (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) \qquad (8.7)\\ &= 3 \cdot \underline{I}_1 \\ \Leftrightarrow \underline{I}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}})\end{aligned}$$

Zum Schluss wird noch der Strom für das Gegensystem berechnet. Dabei wird das gleiche Prinzip angewendet, wie beim Mitsystem: Erst wird der Vorfaktor angepasst, dann alle Zerlegungsgleichungen addiert:

$$\underline{I}_{\mathrm{L1}} = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \qquad (8.8)$$

$$\underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} = \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^4 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_2 \qquad (8.9)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}} = \underline{a} \cdot \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_1 + \underline{a}^3 \cdot \underline{I}_2 \qquad (8.10)$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}} &= (1 + \underline{a}^2 + \underline{a})\underline{I}_0 + (1 + \underline{a} + \underline{a}^2) \cdot \underline{I}_1 + 3 \cdot \underline{I}_2 \qquad (8.11)\\ &= 3 \cdot \underline{I}_2 \\ \Leftrightarrow \underline{I}_2 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{a} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}})\end{aligned}$$

So ergeben sich für die Ströme aller System folgende Gleichungen:

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}_{\mathrm{L3}}) \qquad (8.12)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}}) \qquad (8.13)$$

$$\underline{I}_2 = \frac{1}{3} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{a}^2 \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{\mathrm{a}} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}}) \qquad (8.14)$$

Schaut man sich diese drei Gleichungen genau an, sieht man, dass der Leiter L1 in keiner der drei Gleichungen einen Drehoperator als Vorfaktor hat. Deshalb soll der L1 Leiter als Bezugsleiter gewählt

werden. Das bedeutet, dass das der Leiter ist, durch den eine Unsymmetrie im Originalsystem auftritt (z.B. durch einen einpoligen Erdkurzschluss). Die vorhanden Restsymmetrien im Originalsystem können dann einfacher über die anderen Leiter betrachtet werden Es kann natürlich jeder Leiter als Bezugsleiter genommen werden, da grundsätzlich jeder Leiter einem Index (L1, L2, L3) frei zugeordnet werden kann. So kann jedoch die anfänglich festgelegte Vorderung erfüllt werden: Die Symmetrien der realen Netze und Betriebsmittel müssen vorteilhaft genutzt werden!

Beispielhaft kann ein unsymmetrischer Strom im Dreiphasensytem und die Transformation folgendermaßen aussehen:

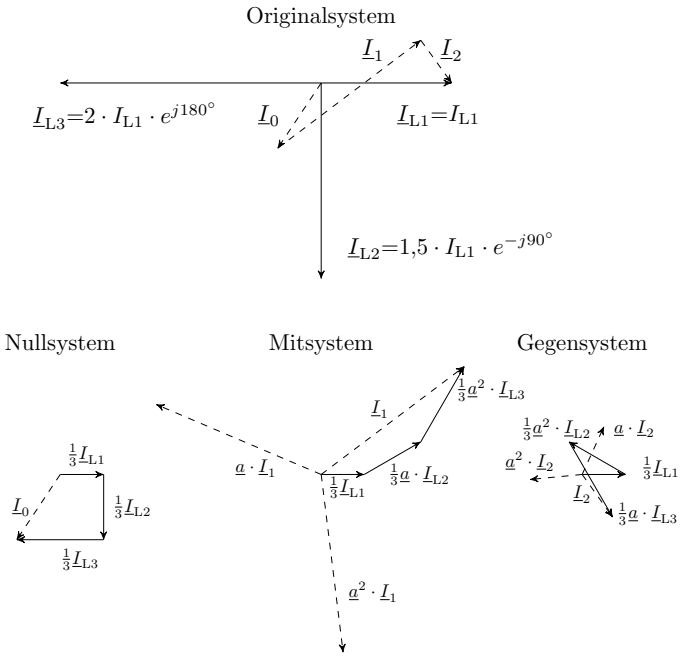


Abbildung 8.1: **Zeigerdiagramme eines unsymmetrischen Systems.** Transformationen aus einem Originalsystem in Mit-, Gegen- und Nullsystem.

Abb. 8.1 zeigt das Zeigerdiagramm einer unsymmetrischen Belastung. Im Originalsystem ist an den Zeigern zu erkennen, dass sowohl die Winkel, wie auch die Amplituden vom symmetrischen Zustand abweichen. Durch die Transformation in die drei Systeme erhält man wiederum symmetrische Zeiger, mit denen dann einfacher gerechnet werden kann. An den Drehoperatoren und dem Vorfaktor von $\frac{1}{3}$ ist mit den Zeigern gut zu erkennen, wie sich die transformierten Ströme verhalten.

Um die Transformationsgleichungen nicht immer vollständig hinschreiben zu müssen, können die Gleichungen auch in Matrixschreibweise geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{L1} \\ \underline{I}_{L2} \\ \underline{I}_{L3} \end{bmatrix} \tag{8.15}$$

Die Schreibweise kann noch weiter vereinfacht werden, wenn der Term mit den Drehoperatoren und der Term mit Vorfaktor in einer Matrix zusammengfasst wird. Diese Matrix wird auch Symmetrierungsmatrix genannt:

$$[\underline{T}] = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \tag{8.16}$$

In der Kompaktschreibweise erhält man so folgende Form:

$$\left[\underline{I}_{012}\right] = \left[\underline{T}\right] \cdot \left[\underline{I}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \tag{8.17}$$

Gemäß den Rechenregeln für Matrizen kann mit der Inversen von $\left[\underline{T}\right]$ die Rücktransformation erfolgen:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L2}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \tag{8.18}$$

$$\left[\underline{I}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] = \left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right] \tag{8.19}$$

Merke: Mit-, Gegen- und Nullsystem

Ein System wird zur Analyse in die drei Systeme: Mitsystem, Gegensystem und Nullsystem transformiert.
Das **Mitsystem** wird mit dem Index 1 versehen: $\underline{I}_1$
Das **Gegensystemsystem** wird mit dem Index 2 versehen: $\underline{I}_2$
Das **Nullsystem** wird mit dem Index 0 versehen: $\underline{I}_0$

8.2 Drehstromleistung

Wie die Leistung berechnet wird, wurde bereits im Kapitel Drehstrom erläutert. Auch hier kann die Gleichung zur Leistungsberechnung zur Vereinfachung in Matrizenschreibweise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{\mathrm{L1L2L3}} &= \underline{U}_{\mathrm{L1}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} + \underline{U}_{\mathrm{L2}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L2}} + \underline{U}_{\mathrm{L3}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L3}} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} & \underline{U}_{\mathrm{L2}} & \underline{U}_{\mathrm{L3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} \\ \underline{I}^*_{\mathrm{L2}} \\ \underline{I}^*_{\mathrm{L3}} \end{bmatrix} = \left[\underline{U}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \cdot \left[\underline{I}_{\mathrm{L1L2L3}}\right]^*_t \end{aligned} \tag{8.20}$$

Mit den gegebenen Drehoperatoren können die Ströme und Spannungen in einem symmetrische System auf jeweils eine Phase bezogen werden ($\underline{U}_{\mathrm{L2}} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{\mathrm{L1}}, \underline{U}_{\mathrm{L3}} = \underline{a} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L1}}$)

Daraus ergibt sich für die Leistung die bekannte Vereinfachung:

$$\underline{S}_{\mathrm{L1L2L3}} = \underline{U}_{\mathrm{L1}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} + \underline{U}_{\mathrm{L1}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} + \underline{U}_{\mathrm{L1}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} \tag{8.21}$$

$$= 3 \cdot \underline{U}_{\mathrm{L1}} \cdot \underline{I}^*_{\mathrm{L1}} \tag{8.22}$$

Nun kann mit der Matrixschreibweise die Transformation in die neuen Systeme berechnet werden:

$$\left[\underline{U}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] = \left(\left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{U}_{012}\right]\right) = \left[\underline{U}_{012}\right] \cdot \left[\underline{T}\right]^{-1} \tag{8.23}$$

$$\left[\underline{I}_{\mathrm{L1L2L3}}\right]^{*} = \left(\left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right]\right)^{*} = \left[\underline{T}\right]^{-1*} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right]^{*} \tag{8.24}$$

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\mathrm{L1L2L3}} &= \left[\underline{U}_{012}\right]_t \cdot \left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{T}\right]^{-1*} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right]^{*} \qquad (8.25)\\
&= \left[\underline{U}_{012}\right]_t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}^{*} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right]^{*} \\
&= \left[\underline{U}_{012}\right]_t \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right]^{*} \\
&= \left[\underline{U}_{012}\right] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right]^{*} \\
&= 3 \cdot \left(\underline{U}_0 \cdot \underline{I}_o^{*} + \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^{*} + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^{*}\right) = 3 \cdot \underline{S}_{012}
\end{aligned}$$

8.3 Ersatzschaltbilder

ESB dienen grundlegend immmer der einfacheren Betrachtung und einem erleichterten Verständniss der Komponenten. Es sollen sich nun verschiedene Betriebsmittel angeschaut werden und wie sich die Transformationen in verschiedenen Netzsituationen verhalten.

8.3.1 Symmetrische Spannungsquelle

Symmetrische Spannungsquellen findet man z.B. bei der Netzeinspeisung und auch bei Synchronmaschienen. Im ersten Schritt wird sich das Ausgangssystems angeschaut. Die Zusammenhänge zwischen der Sternspannung und den einzelnen Phasen ist bereits aus dem Kapitel ??? bekannt. Mit der Formel für die Transformation (vgl. 8.15) lässt sich nun rechnerisch zeigen, dass in einem solchen symmetrischen Fall die Spannungen des Gegen- und Nullsystems 0 ergeben.

Lediglich im Mitsystem tritt eine treibende Spannung, in Höhe der Sternspannung auf:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L3}} \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

$$\left[\underline{U}_{012}\right] = \left[\underline{T}\right] \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{\curlywedge} \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{\curlywedge} \\ \underline{a} \cdot \underline{U}_{\curlywedge} \end{bmatrix} \tag{8.27}$$

Löst man die Gleichungen für die transformierten Systeme auf erhält man die Spannungsergebnisse:

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{3} \cdot U_{\curlywedge} \cdot \left(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}\right) = 0 \tag{8.28}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{3} \cdot U_{\curlywedge} \cdot \left(1 + \underline{a} \cdot \underline{a}^2 + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}\right) = U_{\curlywedge} \tag{8.29}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{3} \cdot U_{\curlywedge} \cdot \left(1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^2 + \underline{a} \cdot \underline{a}\right) = 0 \tag{8.30}$$

Mit den Ergebnissen des Gegen- und Nullsystems kann bildlich gesagt werden, dass diese kurzgeschlossen sind. So können für die drei transformierten Systeme die jeweiligen ESB erstellt werden:

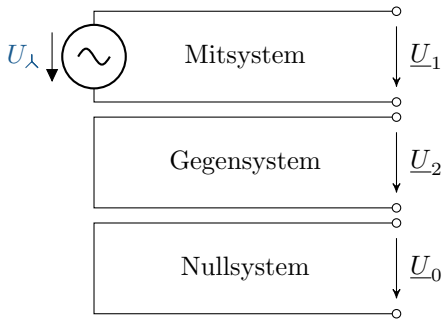


Abbildung 8.2: **Ersatzschaltbilder der transformierten Spannungsquelle.** Bei der symmetrischen Spannungsquelle verfügt nur das ESB des Mitsystems über die Spannungsquelle.

In der Abbildung 8.2 soll nochmal deutlich hervorgehoben werden, dass einerseits drei einzelne System gebildet werden und weiter, dass in dem spezial Fall der symmetrischen Quellen nur in einem der Systeme eine Spannung auftaucht.

8.3.2 Symmetrische Last

Für die Betrachtung der Lasten soll eine Sternschaltung mit Rückleiter gewählt werden. Es wird in jedem Leiter, auch im Rückleiter, eine Impedanz Z angenommen. Für den symmetrischen Fall werden die Impedanzen als gleich groß angenommen, lediglich die Impedanz im Rückleiter kann von den anderen abweichen und bekommt einen eigenen Index.

Für das Originalsystem werden die Gleichung für die Spannung folgendermaßen aufgestellt:

$$\underline{U}_{\mathrm{L1}} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}_{\mathrm{L3}}) \tag{8.31}$$
$$\underline{U}_{\mathrm{L2}} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}_{\mathrm{L3}}) \tag{8.32}$$
$$\underline{U}_{\mathrm{L3}} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{\mathrm{L3}} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} \cdot (\underline{I}_{\mathrm{L1}} + \underline{I}_{\mathrm{L2}} + \underline{I}_{\mathrm{L3}}) \tag{8.33}$$

Auch hier kann mittels Matrixschreibweise vereinfacht werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z}_{\mathrm{E}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z}_{\mathrm{E}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L2}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L3}} \end{bmatrix} \tag{8.34}$$

Mit...

$$\left[\underline{Z}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] = \begin{bmatrix} \underline{Z} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z}_{\mathrm{E}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z}_{\mathrm{E}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z}_{\mathrm{E}} & \underline{Z} + \underline{Z}_{\mathrm{E}} \end{bmatrix} \tag{8.35}$$

...ergibt sich

$$\left[\underline{U}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] = \left[\underline{Z}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \cdot \left[\underline{I}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \tag{8.36}$$

Wird mit den Transformationsgleichungen umgeformt folgt:

$$\left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{U}_{012}\right] = \left[\underline{Z}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right] \tag{8.37}$$

Bei den symmetrischen Spannungsquellen konnte aus der Transformation die Spannung abhängig vom Originalsystem errechnet werden. Das gleiche soll auf für die Impedanzen für die Verbraucher geschafft werden. Dafür müssen die aufgestellten Gleichunge noch so umgeformt werden, dass sich ein Verhältnis von transformierten Impedanzen und Impedanzen des Originalsystem ergibt. Um das zu erreichen werden beide Seiten erst mit $\left[\underline{T}\right]$ erweitert und dann auf Grundlage des Ohmschen-Gesetzes umgestellt.

$$\left[\underline{T}\right] \cdot \left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{U}_{012}\right] = \left[\underline{T}\right] \cdot \left[\underline{Z}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right] \tag{8.38}$$

$$\left[\underline{U}_{012}\right] = \left[\underline{T}\right] \cdot \left[\underline{Z}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \left[\underline{T}\right]^{-1} \cdot \left[\underline{I}_{012}\right] \tag{8.39}$$

$$\left[\underline{Z}_{012}\right] = \left[\underline{T}\right] \cdot \left[\underline{Z}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \left[\underline{T}\right]^{-1} \tag{8.40}$$

Wird die Matrixoperation der letzten Gleichung durchgeführt, dann ergibt sich der gewünschte Zusammenhanhg von Original- und Transformationssystem.

$$\left[\underline{Z}_{012}\right] = \begin{bmatrix} \underline{Z} + 3\underline{Z}_E & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z} \end{bmatrix} \tag{8.41}$$

Nun können auch für die symmetrischen Lasten die jeweiligen ESB der transformierten Systeme aufgestellt werden:

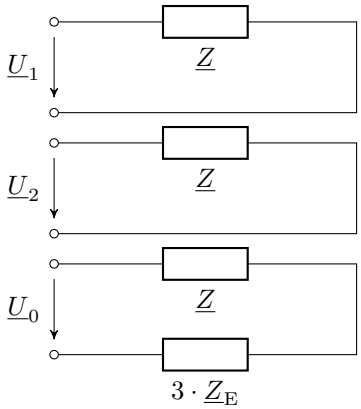


Abbildung 8.3: **Ersatzschaltbilder der transformierten Last.** Bei der symmetrischen Last weisen die drei Systeme alle eine symmetrische Impedanz auf, jedoch verfügt das Nullsystem zusätzlich noch über die dreifache Impedanz für einen Rückleiter.

In Abb. 8.3 treten im Mit- und Gegensystem die gleichen Impedanzen auf. Sollten die Verbraucher im Dreieck verschaltet sein, müssten die Impedanzen mit den bekannten Verhältnissen in Sterngrößen umgerechnet werden. Für die Nullimpedanzen gilt, dass Ströme nur fließen, wenn auch in der Realität eine Verbindung zu einem Stern besteht. Dann treten die Impedanzen im Rückleiter mit dreifachem Wert auf.

8.3.3 Symmetrische Leitungen

Die Leitung ist die Verbindung zwischen der Spannungsquelle und den Verbrauchern. Bisher wurden in den Betrachtungen zum Drehstrom nur unterschieden zwischen Erzeugung und Verbrauchern. Mit den Leitungen kommt nun eine zusätzliche Komponente hinzu, die separat betrachtet werden soll. Leitungen weisen grundsätzlich Eigenimpedanzen, Koppelimpedanzen und Leiter-Erde-Impedanzen auf. Die Leiter-Erde-Impedanzen können jedoch vernachlässigt werden. So hat jeder Leiter eine Eigenimpedanzen und zwei Koppelimpedanzen, also zu den jeweils anderen Leitern. Die Spannung für

diese Berechnung wird definiert als Differenz der Spannungen am Anfang und am Ende der Leitung. So lässt sich die Matrix-Gleichung für ein Leitungssystem aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{\mathrm{L1A}} - \underline{U}_{\mathrm{L1B}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L2A}} - \underline{U}_{\mathrm{L2B}} \\ \underline{U}_{\mathrm{L3A}} - \underline{U}_{\mathrm{L3B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{\mathrm{S}} & \underline{Z}_{\mathrm{K}} & \underline{Z}_{\mathrm{K}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{K}} & \underline{Z}_{\mathrm{S}} & \underline{Z}_{\mathrm{K}} \\ \underline{Z}_{\mathrm{K}} & \underline{Z}_{\mathrm{K}} & \underline{Z}_{\mathrm{S}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{L1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L2}} \\ \underline{I}_{\mathrm{L3}} \end{bmatrix} \tag{8.42}$$

Daraus kann wieder eine Kompaktschreibweise abgeleitet werden (Mit $U_{\mathrm{L1A}} - U_{\mathrm{L1B}} = U_{\mathrm{L1}}$, ...):

$$\left[\underline{U}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] = \left[\underline{Z}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \cdot \left[\underline{I}_{\mathrm{L1L2L3}}\right] \tag{8.43}$$

Es liegt nun eine sehr ähnliche Gleichung vor, wie die bei den symmetrischen Verbrauchern. Auch hier soll die Gleichung so umgeformt werden, dass eine direkte Abhängigkeit von Originalsystem und Transformationssystem vorliegt. Da die Gleichung grundlegend gleich aufgebaut ist, können die gleichen Erweiterungen und Umformungen durchgeführt werden, wie bereits bei den symmetrischen Verbrauchern:

$$\left[\underline{Z}_{012}\right] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{\mathrm{S}} + 2 \cdot \underline{Z}_{\mathrm{K}} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_{\mathrm{S}} - \underline{Z}_{\mathrm{K}} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_{\mathrm{S}} - \underline{Z}_{\mathrm{K}} \end{bmatrix} \tag{8.44}$$

Wichtig ist bei der Umformung immer, dass die umgeformte Impedanzmatrix nur aus Werten auf der Hauptdiagonale besteht, damit es nur direkte Zusammenhänge zwischen den einzenlen Leitern und den Transformationssytemen gibt.

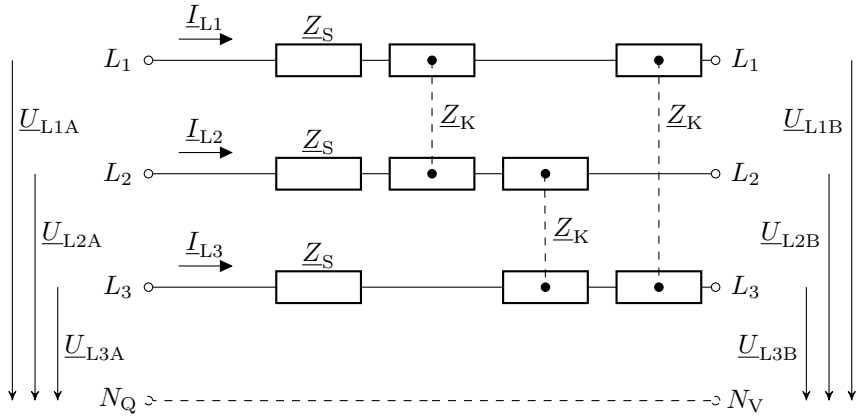


Abbildung 8.4: **Ersatzschaltbilder der transformierten Leitung.** ESB einer symmetrischen Leitung mit den drei Phasen L_1, L_2 und L_3 sowie gestrichelt die angedeutete Leitung der Sternpunktbehandlung.

Abb. 8.4 zeigt das ESB der drei Systeme für symmetrische Leitungen. Die gestrichelte Leitung soll die Sternpunktbehandlung auf Erzeugungs- und Verbraucherseite widerspiegeln zur Referenz der Sternspannungen.

A Übungsaufgaben

A.1 Komplexe Zahlen 1

Es gelte für folgende komplexe Zahlen:
$Z_1 = 3 + j4$
$Z_2 = 2 - j$
$Z_3 = j7$

Berechnet werden sollen folgende Aufgabenteile:

a) $Z_1 + Z_2$

b) $Z_1 - Z_3$

c) Polarform von Z_1, Z_2 und Z_3

d) $Z_1 \cdot Z_2$

e) $\frac{Z_1}{Z_3}$

f) Zeigerdiagramm von $Z_1 + Z_2$ und $Z_1 \cdot Z_2$

A.2 Komplexe Zahlen 2

Es gelte für folgende komplexe Zahlen:
$K_1 = 10 + j40$
$K_2 = 50 \cdot e^{-j40^o}$
$K_3 = 250 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

Berechnet werden sollen folgende Aufgabenteile:

a) $K_1 - K_2$, Ergebnis in Polarkoordinaten

b) $K_3 + K_2$, Ergebnis in kartesischen Koordinaten

c) $K_1 \cdot K_3$, Ergebnis in Polarkoordinaten

d) $K_1 + K_2$, zeichnerisch im Zeigerdiagramm

e) $(K_1 - K_2)^2$

f) $\sqrt{K_1 + K_3}$

A.3 Zeigerdiagramme 1

Gegeben sei die Spannung $\hat{U} = 325\ V \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}$.

a) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm für die Spannung $\hat{U}$ im komplexen Zahlenraum.

b) Berechnen Sie die Real- und Imaginärteile der komplexen Spannung $\hat{U}$.

c) Erklären Sie die Bedeutung des Phasenwinkels in Bezug auf die Wechselspannung.

A.4 Komplexe Wechselstromrechnung 1

Gegeben sind die spezifischen Werte für den Widerstand R, die Spule L und den Kondensator C.
$R = 10\ \Omega$, $L = 10\ mH$, $C = 10\ pF$
Berechnet werden sollen die Impedanzen der drei Bauteile bei den Frequenzen:
$1\ \mu Hz$,$1\ mHz$,$1\ Hz$,$1\ kHz$,$1\ MHz$

Tragen Sie die Ergebnisse in eine Tabelle ein.

A.5 Komplexe Wechselstromrechnung 2

Eine Impedanz weist bei der Frequenz $f = 1\ kHz$ den Wert $\underline{Z} = (300 + \mathrm{j}400)\ \Omega$ auf.

a) Bestimmen Sie den Scheinwiderstand (Betrag) der Impedanz.

b) Ermitteln Sie die Admittanz $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ sowie den Scheinleitwert.

c) Geben Sie zur Realisierung der Impedanz $\underline{Z}$ eine Schaltung aus zwei in Reihe geschalteten Bauelementen an und dimensionieren Sie diese Schaltung.

d) Geben Sie zur Realisierung der Impedanz $\underline{Z}$ eine Schaltung aus zwei parallel geschalteten Bauelementen an und dimensionieren Sie diese Schaltung.

Außerdem wird an die Impedanz $\underline{Z} = (300 + \mathrm{j}400)\ \Omega$ eine Spannung $u(t) = \hat{U} \cdot \cos(2\pi f t + \varphi_U)$ mit $\hat{U} = 5\ V$, $\varphi_U = \pi/4$ und $f = 1\ kHz$ gelegt.

e) Ermitteln Sie die komplexe Amplitude $\underline{\hat{U}}$ der anliegenden Spannung.

f) Berechnen Sie die komplexe Amplitude $\underline{\hat{I}}$ des Stromes durch die Impedanz.

g) Geben Sie den zeitlichen Verlauf des Stromes $i(t)$ an.

h) Stellen Sie die Impedanz in Polarform dar und geben Sie den Winkel $\varphi = arg\{\underline{Z}\}$ an. Vergleichen Sie den Winkel der Impedanz mit der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Was stellen Sie fest?

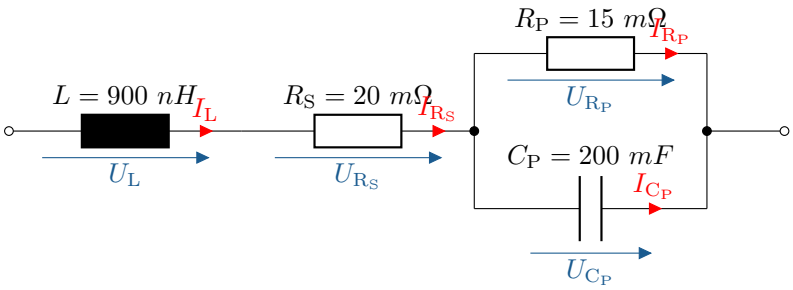
A.6 Komplexe Wechselstromrechnung 3

Das nachfolgende elektrische Netzwerk soll als Beispiel eines Ersatzschaltbildes einer Lithium-Ionen Zelle auf seine komplexen Größen analysiert werden. Das Ersatzschaltbild besteht aus einer Serienschaltung aus einer Spule L, dem Serienwiderstand R_S und der Paralellschaltung der Paralellwiderstandes R_P und dem paralell verschalteten Kondensator C_P. Die Berechnung der komplex Ströme und Spannungen aller Komponenten soll in der folgenden Reihenfolge stattfinden:

a) Größe der komplexen Impedanzen aller Komponenten und der gesamten komplexen Impedanz

b) Komplexe Ströme durch die Komponenten

c) Komplexe Spannungen an den Komponenten



A.7 Effektivwert 1

Gegeben sei eine sinusförmige Spannung

$$u(t) = 150\ V \cdot \sin(100\pi t)$$

wobei t in Sekunden und die Spannung $u(t)$ in Volt angegeben sind.

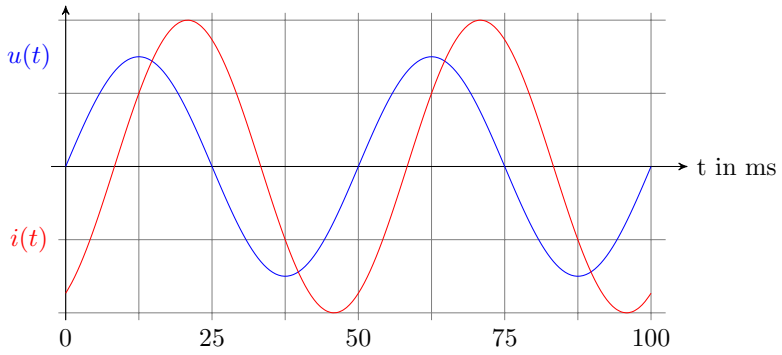
Berechnen Sie für diese Spannung:

a) Den **arithmetischen Mittelwert** $\bar{u}$ der Spannung über eine Periode.

b) Den **Effektivwert** U_{Eff} der Spannung.

A.8 Leistungsberechnung 1

Text



a) Ablesen des Betrages der Phasenwinkel von Spannung und Strom. Bennenung des Verhaltens.

b) Angabe von Periodendauer, Frequenz und Kreisfrequenz.

c) Berechnung der Augenblicksleistung zum Zeitpunkt t = 12,5 ms.

d) Berechnung von Wirkleistung und Blindleistung.

e) Berechnung der Scheinleistung mit dem konjugierten komplexen Strom.

A.9 Drehstrom 1

Ein Drehstrommotor hat die folgenden Nennwerte:

- Nennspannung $U_N = 400\ V$
- Nennstrom $I_N = 10\ A$

a) Berechnen Sie die Spannung über jede Wicklung des Motors im Sternbetrieb $U_{\curlywedge}$.

b) Berechnen Sie die Spannung über jede Wicklung des Motors im Dreieckbetrieb $U_{\triangle}$.

c) Berechnen Sie den Strom durch jede Wicklung $I_{\curlywedge}$ im Sternbetrieb.

d) Berechnen Sie den Strom durch jede Wicklung $I_{\triangle}$ im Dreieckbetrieb.

A.10 Drehstrom 2

Es ist ein symmetrisches Drehstromsystem mit folgenden Spannungen gegeben:

$\underline{U}_1 = 230\ V$, $\underline{U}_2 = 230\ V \cdot \underline{a}^2$, $\underline{U}_3 = 230\ V \cdot \underline{a}$

Die Impedanzen haben alle den Wert $Z = 10\Omega$

Für alle Aufgabenteile gilt: Lösen Sie die Aufgaben mit dem geringstmöglichen Aufwand!

a) Zeichnen Sie die dreiphasigen und einphasigen ESB in Stern- und Dreieckschaltung und beschrifften Sie die ESB korrekt!

b) Berechnen Sie den Betrag der Verbraucherspannungen sowohl für die Stern- als auch die Dreieckschaltung!

c) Berechnen Sie die komplexen Verbraucherspannungen in der Dreieckschaltung!

d) Zeichnen Sie die Zeigerdiagramme der Verbaucherspannungen für die Stern- und Dreieckschaltung!

e) Berechnen Sie die komplexen Lastströme für die Sternschaltung und den Betrag der Lastströme für die Dreieckschaltung!

f) Berechnen Sie die Scheinleistung für die Stern- und Dreieckschaltung!

A.11 Mehrphasensysteme 1

Gegeben ist ein unsymmetrisches System mit folgenden Spannungen:

$\underline{U}_{\mathrm{L1}} = 230V$, $\underline{U}_{\mathrm{L2}} = 460V \cdot e^{-j45^\circ}$, $\underline{U}_{\mathrm{L1}} = 345V \cdot e^{j120^\circ}$

a) Zeichen Sie das Zeigerdiagramm des Originalsystems!

b) Stellen Sie die Zerlegungsgleichungen für die Spannungen auf!

c) Berechnen Sie die Spannungen der transformierten Systeme!

d) Zeichen Sie die Zeigerdiagramme der transformierten Systeme!

B Lösungen zu den Übungsaufgaben

B.1 Komplexe Zahlen 1

a) $Z_1 + Z_2$

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (3 + j4) + (2 - j) \\ &= 5 + j3 \end{aligned}$$

b) $Z_1 - Z_3$

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_3 &= (3 + j4) - (0 + j7) \\ &= 3 - j3 \end{aligned}$$

c) Polarform von Z_1, Z_2 und Z_3

$$\begin{aligned} Z_1 &= 5 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}53.13^\circ} \\ Z_2 &= 2{,}236 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}-26{,}57^\circ} \\ Z_3 &= 7 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ} \end{aligned}$$

d) $Z_1 \cdot Z_2$

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (3 + j4) \cdot (2 - j) \\ &= 10 + j5 \end{aligned}$$

e) $\frac{Z_1}{Z_3}$

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{3 + j4}{j7}$$

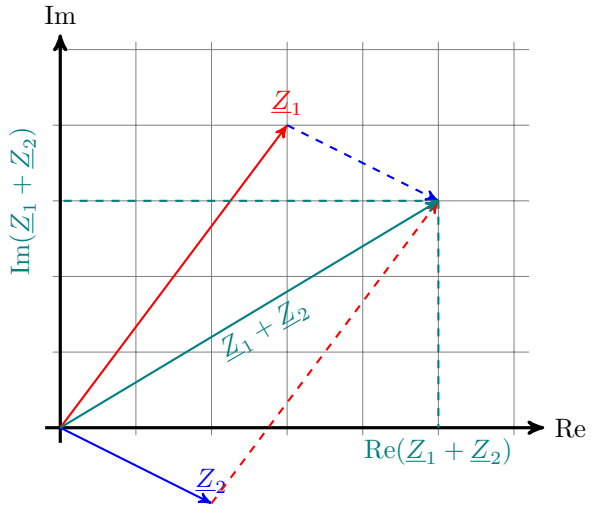
(Erweitern mit dem konjugierten Wert des Nenners, also -j7)

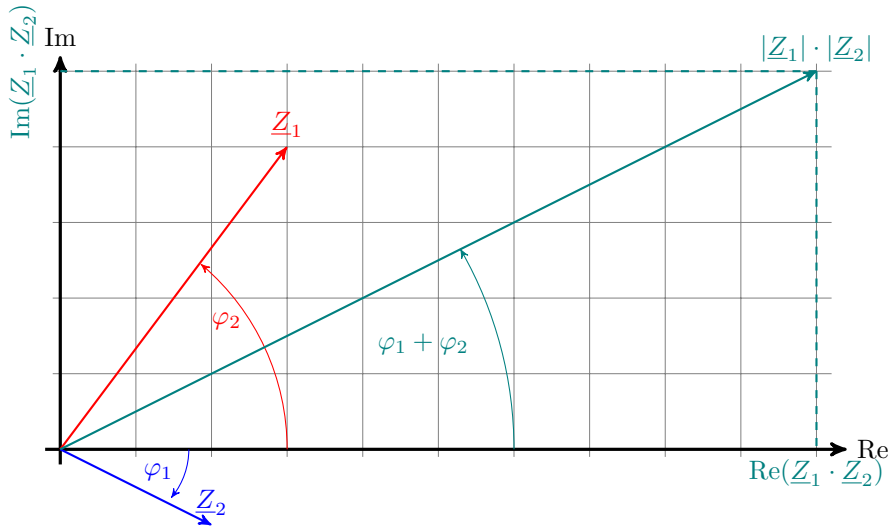
$$\frac{3 + j4}{j7} \cdot \frac{-j7}{-j7} = \frac{(3 + j4) \cdot (-j7)}{(j7) \cdot (-j7)}$$

Hinweis: $j^2 = -1$

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_3} &= \frac{28 - j21}{49} = \frac{28}{49} - j\frac{21}{49} = \frac{4}{7} - j\frac{3}{7} \\ &= \frac{4}{7} - j\frac{3}{7} \end{aligned}$$

f) Zeigerdiagramm von $Z_1 + Z_2$ und $Z_1 \cdot Z_2$





B.2 Komplexe Zahlen 2

a) $K_1 - K_2$, Ergebnis in Polarkoordinaten

$$10 + \mathrm{j} \cdot 40 - 50 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}40^\circ} = ?$$

$\underline{K}_2$ in kartesische Koordinaten wandeln:

$$\begin{aligned} 50 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}40^\circ} &= 50 \cdot \cos(-40^\circ) + \mathrm{j}50 \cdot \sin(-40^\circ) \\ &= 50 \cdot 0{,}766 + \mathrm{j}50 \cdot (-0{,}6427) \\ &= 38{,}302 - \mathrm{j}32{,}1393 \end{aligned}$$

$\underline{K}_2 - \underline{K}_2$ in kartesischen Koordinaten subtrahieren:

$$\begin{aligned}\underline{K}_1 - \underline{K}_2 &= (10 + \mathrm{j} \cdot 40) - (38{,}302 - \mathrm{j}32{,}1393)\\ &= 10 + \mathrm{j} \cdot 40 - 38{,}302 + \mathrm{j}32{,}1393\\ &= -28{,}3 + \mathrm{j}72{,}139\end{aligned}$$

Ergebnis in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\underline{K}_1 - \underline{K}_2 &= \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}})}\\ &= 77{,}49 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}111{,}42^\circ}\end{aligned}$$

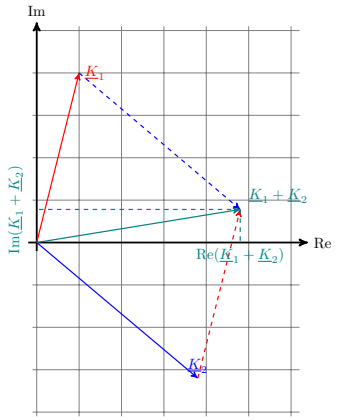
b) $K_3 + K_2$, Ergebnis in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}K_3 &= 250 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 176{,}78 + j176{,}78\\ K_2 &= 50 \cdot e^{-j40^\circ} = 38{,}3 - j32{,}15\\ K_3 + K_2 &= (176{,}78 + j176{,}78) + (38{,}3 - j32{,}15)\\ K_3 + K_2 &= 215{,}08 + j144{,}63\end{aligned}$$

c) $K_1 \cdot K_3$, Ergebnis in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}\underline{K}_1 &= 10 + \mathrm{j}40\\ &= 41{,}23 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}75{,}96^\circ}\\ \underline{K}_1 \cdot \underline{K}_3 &= 10 + \mathrm{j}40 \cdot 250 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}\\ &= 10307{,}75 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}120{,}96^\circ}\end{aligned}$$

d) $K_1 + K_2$, zeichnerisch im Zeigerdiagramm



e) $(K_1 - K_2)^2$

Ergebnis aus Teil a):

$$K_1 - Z_2 = 77{,}49 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}111{,}42^\circ}$$

Regel für das Quadrat einer komplexen Zahl:

$$\begin{aligned}(K_1 - K_2)^2 &= 77{,}49^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2 \cdot 111{,}42^\circ}\\ &= 6004 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}137^\circ}\end{aligned}$$

f) $\sqrt{K_1 + K_3}$

$$K_1 + K_3 = 186{,}78 + j216{,}78$$

Umwandlung in Polarform:

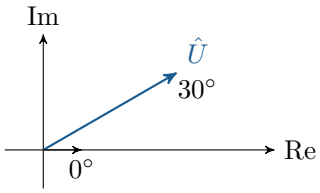
$$K_1 + K_3 = 286{,}09 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}49{,}32^\circ}$$

Die Quadratwurzel einer komplexen Zahl in Polarform ergibt:

$$\sqrt{r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \sqrt{r}\frac{\varphi}{2}$$
$$\sqrt{286{,}09} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{49{,}32^\circ}{2}} = 16{,}91 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}24{,}66^\circ}$$

B.3 Zeigerdiagramme 1

a) Zeigerdiagramm für die Spannung $\hat{U}$



b) Die Real- und Imaginärteile der Spannung $\hat{U}$ können mit den folgenden Formeln berechnet werden:

$$U_{\mathrm{Re}} = \hat{U} \cdot \cos(\varphi) = 325 \cdot \cos(30^\circ) \approx 281{,}46\ V$$
$$U_{\mathrm{Im}} = \hat{U} \cdot \sin(\varphi) = 325 \cdot \sin(30^\circ) = 162{,}5\ V$$

c) Der Phasenwinkel φ beschreibt den zeitlichen Versatz zwischen der Spannung und dem Strom in einem Wechselstromkreis. Ein positiver Phasenwinkel deutet darauf hin, dass die Spannung der Strom nachfolgt (induktive Last), während ein negativer Phasenwinkel anzeigt, dass der Strom der Spannung nachfolgt (kapazitive Last).

B.4 Komplexe Wechselstromrechnung 1

Frequenz	$\mathbf{X_R}$	$\mathbf{X_C}$	$\mathbf{X_L}$
$1\ \mu Hz$	$10\ \Omega$	$-j15{,}92\ M\Omega$	$j6{,}28$
$1\ mHz$	$10\ \Omega$	$-j15{,}92\ k\Omega$	k
$1\ Hz$	$10\ \Omega$	$-j15{,}92\ \Omega$	k
$1\ kHz$	$10\ \Omega$	$-j15{,}92\ m\Omega$	
$1\ MHz$	$10\ \Omega$	$-j15{,}92\ \mu\Omega$	

B.5 Komplexe Wechselstromrechnung 2

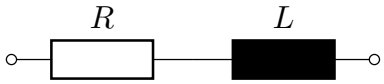
a)

$$\begin{aligned}|\underline{Z}| &= \sqrt{Re^2 + Im^2} \\ &= \sqrt{300^2 + 400^2}\ \Omega \\ &= 500\ \Omega\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{(300 + \mathrm{j}400)\ \Omega} \\ &= \frac{1}{(300 + \mathrm{j}400)\ \Omega} \cdot \frac{(300 - \mathrm{j}400)\ \cancel{\Omega}}{(300 - \mathrm{j}400)\ \cancel{\Omega}} \\ &= \frac{1}{300^2 + 400^2} \cdot (300 - \mathrm{j}400)\ S \\ &= (0.0012 - \mathrm{j}0.0016)\ S \\ |\underline{Y}| &= \frac{1}{|\underline{Z}|} \\ &= \frac{1}{500}\ S\end{aligned}$$

c) Reihenschaltung:
Realteil → Ohmscher Wiederstand
Imaginärteil → Spule oder Kondensator?
Reaktanz Spule: $X_L = 2\pi f \cdot L > 0$
Reaktanz Kondensator: $X_C = -\frac{1}{2\pi f \cdot C} < 0$

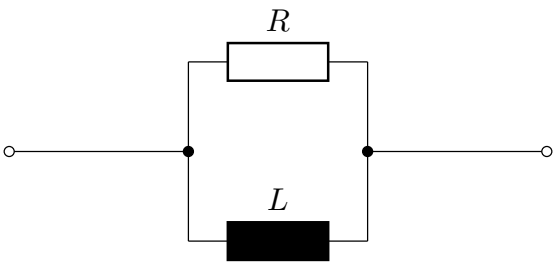


$$\begin{aligned}R &= 300\ \Omega \\ L &= \frac{X_L}{2\pi \cdot f} \\ &= \frac{400\ \Omega}{2\pi \cdot 1\ kHz} \\ &= 63.66\ mH \\ \underline{Z} &= R + \mathrm{j}X_L = R + \mathrm{j}\ 2\pi \cdot f \cdot L\end{aligned}$$

d) Parallelschaltung:
→ Addition von Leitwerten:

$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B = (0.0012 - \mathrm{j}0.0016)\ S \qquad \text{(aus b))}$$

$B < 0 \rightarrow$ Spule, induktiver Blindleitwert
$B > 0 \rightarrow$ Kondensator, kapazitiver Blindleitwert



$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{G} \\
&= \frac{1}{0.0012\ S} \\
&= 833\ \Omega \\
B &= -\frac{1}{2\pi \cdot f \cdot L} \\
L &= \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot B} \\
&= 99.47\ mH
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
\underline{U} &= \hat{U} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{U}} = 5\ V \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} = 5\ V \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ} \\
&= 5\ V \cdot (\cos(45^\circ) + \mathrm{j}\sin(45^\circ)) \\
&= 5\ V \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{j}) \\
&\approx (3{,}53 + \mathrm{j}3{,}53)\ V
\end{aligned}
$$

f)

g)

h)

B.6 Komplexe Wechselstromrechnung 3

a)

$$X_\mathrm{L} = j\omega \cdot L = j \cdot 2\pi \cdot 800\ Hz \cdot 900\ nH$$

$$X_\mathrm{Rs} = R_\mathrm{S} = 20\ m\Omega \tag{B.1}$$

b)

c)

B.7 Effektivwert 1

a) Der arithmetische Mittelwert einer Funktion u(t) über eine Periode T ist gegeben durch:

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$$

Da $u(t)$ eine Sinusfunktion darstellt und die Sinuswelle über eine Periode symmetrisch ist, heben sich die positiven und negativen Teile der Welle gegenseitig auf. Daher ist der arithmetische Mittelwert für jede Sinuswelle immer null:

$$\bar{u} = 0$$

b) Der Effektivwert einer Sinusspannung $u(t)$ wird durch die folgende Formel berechnet:

$$U_{Eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

In diesem Fall ist $\hat{U} = 150\ V$, die Amplitude der Spannung.

$$U_{Eff} = \frac{150\ V}{\sqrt{2}} \approx \frac{150\ V}{1.414} \approx 106.1\ V$$

B.8 Leistungsberechnung 1

a) Die Spannung weist einen Phasenwinkel von $\varphi_{\mathrm{u}} = 0$ und der Strom weist einen Phasenwinkel von $\varphi_{\mathrm{i}} = \pi/3$ auf.
Das Nacheilen des Stromes deutet auf ein **induktives Verhalten** hin.

b) Die Periodendauer T beträgt 50 ms.
Die Frequenz beträgt:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{50\ ms} = 20\ Hz$$

Die Kreisfrequenz beträgt:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 20\ Hz = 125{,}66\ Hz$$

c) Die Augenblicksleistung zum Zeitpunkt t = 12,5 ms beträgt:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 12\ V \cdot \sin(2\pi \cdot 20\ Hz \cdot 0{,}0125\ s) \cdot 2\ A \cdot \sin(2\pi \cdot 20\ Hz \cdot 0{,}0125\ s + \frac{\pi}{3})$$
$$p(t) = 12\ W$$

d) Die Wirkleistung beträgt:

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\varphi) = \frac{12\ V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\ A}{\sqrt{2}} \cdot \cos(60^o)$$
$$P = 6\ W$$

Die Blindleistung beträgt:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\varphi) = \frac{12\ V}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\ A}{\sqrt{2}} \cdot \sin(60^o)$$
$$Q = 10{,}392\ var$$

e) Die Scheinleistung beträgt:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{\underline{\hat{U}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\underline{\hat{I}}^*}{\sqrt{2}} = \frac{12\ V}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(2\pi \cdot 20\ Hz)} \cdot \frac{2\ A}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(2\pi \cdot 20\ Hz + \frac{\pi}{3})}$$
$$\underline{S} = 12\ VA \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 6\ W + j10{,}392\ var$$

B.9 Drehstrom 1

a) Spannung über jede Wicklung des Motors $U_{\curlywedge}$ im Sternbetrieb:

$$U_{\curlywedge} = \frac{U_N}{\sqrt{3}} = \frac{400\ V}{\sqrt{3}} \approx 230.94\ V$$

b) Spannung über jede Wicklung des Motors $U_{\triangle}$ im Dreieckbetrieb:

$$U_{\triangle} = U_N = 400\ V$$

c) Strom durch jede Wicklung $I_{\curlywedge}$ im Sternbetrieb:

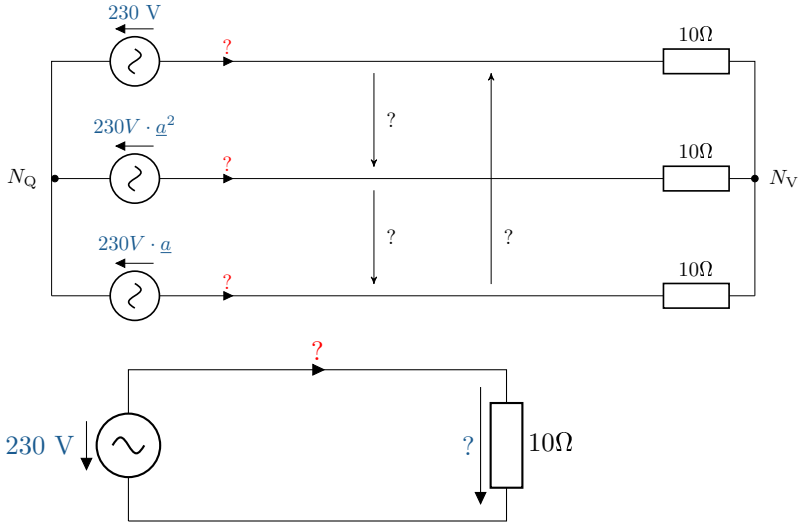
$$I_{\curlywedge} = I_N = 10\ A$$

d) Strom durch jede Wicklung $I_{\triangle}$ im Dreieckbetrieb:

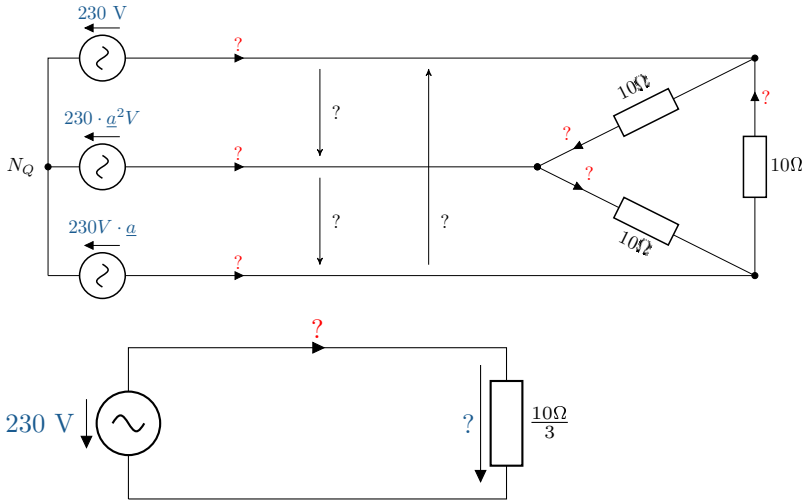
$$I_{\triangle} = \sqrt{3} \cdot I_{\curlywedge} = \sqrt{3} \cdot 10\ A \approx 17.32\ A$$

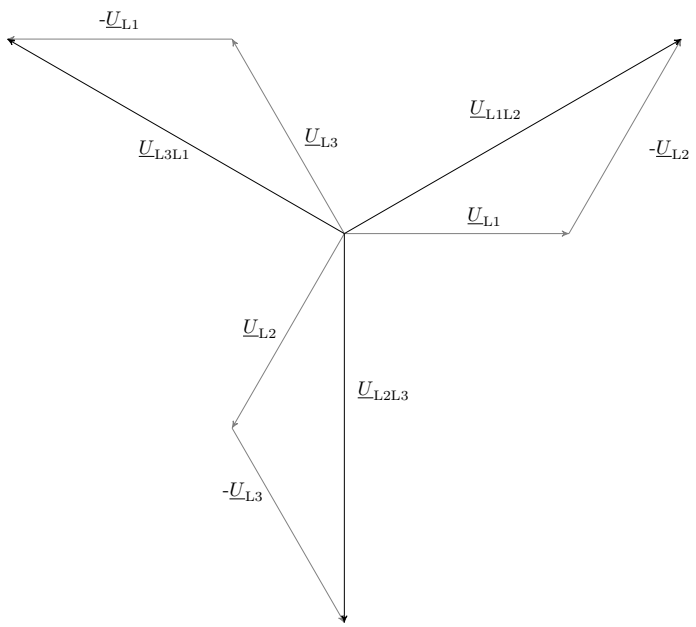
B.10 Drehstrom 2

a) ESBs der Sternschaltung:



ESBs der Dreieckschaltung:





b) Der Betrag Verbraucherspannungen ist in der Sternschaltung gleich der Quellspannung: 230 V
Der Betrag Verbraucherspannungen ist in der Dreieckschaltung $\sqrt{3}$ mal größer als in der Sternschaltung: $230V \cdot \sqrt{3} = 398{,}37V \approx 400V$

c) Die komplexe Verbaucherspannungen in der Dreieckschaltung errechnet sich aus den Differenzen der Sternspannungen.

$$\begin{aligned}\underline{U}_{\mathrm{L1L2}} &= \underline{U}_{\mathrm{L1}} - \underline{U}_{\mathrm{L2}} = 230V - 230V \cdot \underline{a}^2 \\ &= 230V(1 - (-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})) = \sqrt{3} \cdot 230V(\frac{3}{2} + j\frac{1}{2}) \\ &= \sqrt{3} \cdot 230V \cdot e^{j \cdot 30^\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{\mathrm{L2L3}} &= \underline{U}_{\mathrm{L2}} - \underline{U}_{\mathrm{L3}} = 230V \cdot \underline{a}^2 - 230V \cdot \underline{a} \\ &= 230V(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - (-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2})) = \sqrt{3} \cdot 230V(-j) \\ &= \sqrt{3} \cdot 230V \cdot e^{-j \cdot 90^\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{\mathrm{L3L1}} &= \underline{U}_{\mathrm{L3}} - \underline{U}_{\mathrm{L1}} = 230V \cdot \underline{a} - 230V \\ &= 230V(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = \sqrt{3} \cdot 230V(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}) \\ &= \sqrt{3} \cdot 230V \cdot e^{j \cdot 150^\circ}\end{aligned}$$

d) Zeigerdiagramme der Verbaucherspannungen für die Stern- und Dreieckschaltung:

e) Der Strom wird über das Ohmsche Gesetz berechnet. Für die Sternschaltung gilt:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{\mathrm{L1}}}{\underline{Z}} = \frac{230V}{10\Omega} = 23A$$
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{\mathrm{L2}}}{\underline{Z}} = \frac{230V \cdot \underline{a}^2}{10\Omega} = 23A \cdot \underline{a}^2$$
$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{\mathrm{L3}}}{\underline{Z}} = \frac{230V \cdot \underline{a}}{10\Omega} = 23A \cdot \underline{a}$$

Bei dem Dreieckstrom wird zwischen dem Strangstrom und dem Dreieckstrom, also dem Strom durch die Verbraucher unterschieden. Der Strom in den Verbaucherströngen kann mit den Spannung über die Verbraucher in der Dreieckschaltung errechnet werden:

$$I_\triangle = \frac{U\triangle}{Z} = \frac{400V}{10\Omega} = 40A$$

Der Strom im Strang ist wiederum um $\sqrt{3}$ größer, als in den Verbaucherströngen:

$$I_{\mathrm{str}} = \sqrt{3} \cdot I_\triangle = \sqrt{3} \cdot 40A = 69{,}28A$$

Dieser Wert entspricht dem dreifachen Wert des Stroms in einer Sternschaltung

f) Die allgemein Leistungsgleichung ist folgende:

$$S = \sqrt{3} \cdot U_\triangle \cdot I_{\mathrm{str}}$$

Welcher Strom eingesetzt werden muss, hängt von der jeweiligen Schaltung ab. Wie in Aufgabe 5. berechnet ist der Strangstrom in der Dreieckschaltung um den Faktor 3 größer als in der Sternschaltung

Für die Sternschaltung gilt:

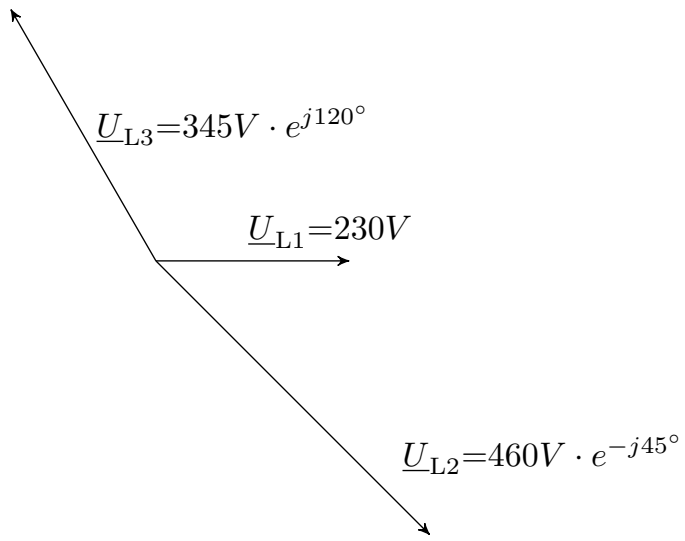
$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 400V \cdot 23A = 15.934VA$$

Und für die Dreieckschaltung gilt:

$$S = \sqrt{3} \cdot U \cdot I = \sqrt{3} \cdot 400V \cdot 3 \cdot 23A = 47.804VA$$

B.11 Mehrphasensysteme 1

a) Zeigerdiagramm des Originalsystems:



b)

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{\mathrm{L1}} &= 230V = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\
\underline{U}_{\mathrm{L2}} &= 460V \cdot e^{-j45^\circ} = \underline{U}_0 + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_1 + \underline{a} \cdot \underline{U}_2 \\
\underline{U}_{\mathrm{L3}} &= 345V \cdot e^{j120^\circ} = \underline{U}_0 + \underline{a} \cdot \underline{U}_1 + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_2
\end{aligned}$$

c) Für das Nullsystem:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_0 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{U}_{\mathrm{L2}} + \underline{U}_{\mathrm{L3}}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (230V + 460V \cdot e^{-j45^\circ} + 345V \cdot e^{j120^\circ}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (230V + 325{,}27V - j325{,}27V - 172{,}5V + 298{,}78V) \\
&= 127{,}59V - j8{,}83 = 127{,}9 \cdot e^{-j3{,}56^\circ}
\end{aligned}$$

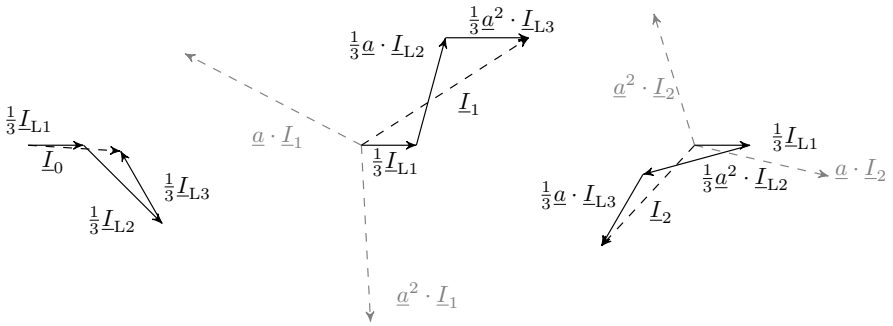
Für das Mitsystem:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{a} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L2}} + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{\mathrm{L3}}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (230V + (-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (325{,}27V - j325{,}7V) + (-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-172{,}5V + 298{,}78V)) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (230V + 119{,}42V + j444{,}54V + 345V) \\
&= 231{,}48V + j148{,}18V = 274{,}84 \cdot e^{j32{,}63^\circ}
\end{aligned}$$

Für das Gegensystem:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_2 &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_{\mathrm{L1}} + \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{\mathrm{L2}} + \underline{a} \cdot \underline{U}_{\mathrm{L3}}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (230V + (-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (325{,}27V - j325{,}7V) + (-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-172{,}5V + 298{,}78V)) \\
&= \frac{1}{3} \cdot (230V + (-444{,}33V - j119{,}16V) + (-172{,}5V - 298{,}78V)) \\
&= -128{,}95V - j139{,}28V = 189{,}8 \cdot e^{j132{,}79^\circ}
\end{aligned}$$

d) Zeigerdiagramme der transformierten Systeme:



Anmerkung: Das Erstellen der Zeigerdiagramme ist ein guter Weg um die errechneten Ergebnisse aus 3. zu überprüfen. Die Wege der Zeiger, die aus dem Originalsystem genommen werden, müssen da enden, wo auch der Zeiger des transformierten Systems hinführt. Stimmen die Endpunkte nicht überein, wurde in einer der Rechnungen ein Fehler gemacht.