

GET it digital

## Modul 8: Schaltungen variabler Frequenz



Stand: 10. März 2026



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 8: Schaltungen variabler Frequenz“ von M. Werle, T. Bache, R. Bechler, T. Wever Lizenz: CC BY 4.0.

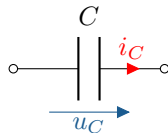
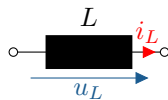
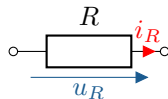
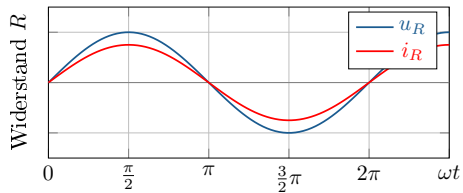
Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

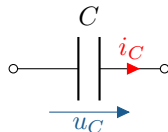
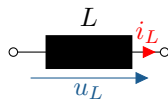
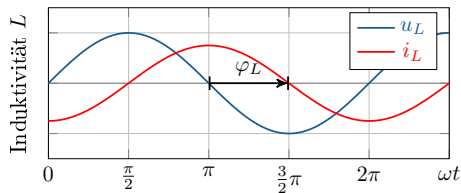
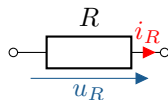
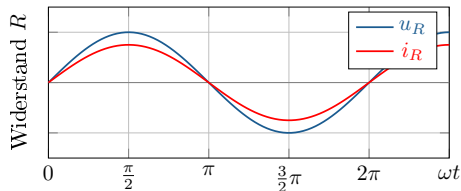
Das Werk ist online verfügbar unter:

<https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-8-schaltungen-variabler-frequenz>

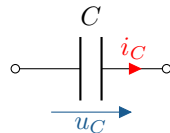
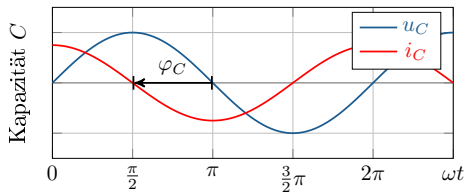
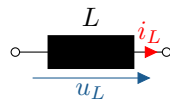
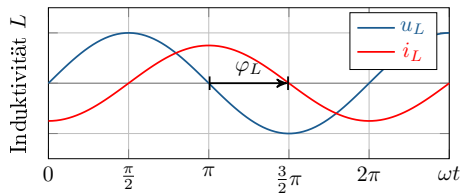
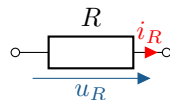
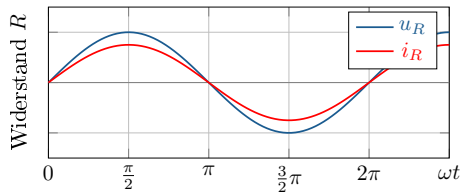
# Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente



# Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente

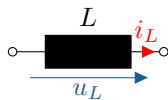


# Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente



## Induktivität

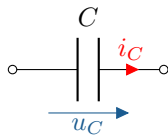
- ▶ Impedanz:  $\underline{Z}_L = j\omega L$
- ▶ Zeitb.:  $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$
- ▶ Energie im Magnetfeld
- ▶ Ströme stetig (keine Sprünge)



Spule


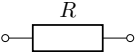
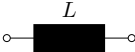
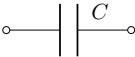
## Kapazität

- ▶ Impedanz:  $\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$
- ▶ Zeitb.:  $i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$
- ▶ Energie im elektrischen Feld
- ▶ Spannungen stetig (keine Sprünge)



Kondensator

# Vergleich der linearen Zweipole $R$ , $L$ und $C$

Größe	Allgemein	El. Widerstand	Induktivität	Kapazität
Symbol				
Einheit	[Form.z.] = Einheit	$[R] = \Omega$ (Ohm)	$[L] = \text{H}$ (Henry)	$[C] = \text{F}$ (Farad)
Zeitbereich	$\frac{d}{dt}$ bzw. $\int dt$	$u_R = R \cdot i_R$	$u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$	$i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$
Frequenzb.	$j\omega$ bzw. $\frac{1}{j\omega}$	$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$	$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L$	$\underline{I}_C = j\omega C \cdot \underline{U}_C$
Impedanz	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$
Wirkanteil	$R = \text{Re}\{\underline{Z}\}$	$R = \frac{U}{I}$	0	0
Blindanteil	$X = \text{Im}\{\underline{Z}\}$	0	$X_L = \omega L$	$X_C = -\frac{1}{\omega C}$

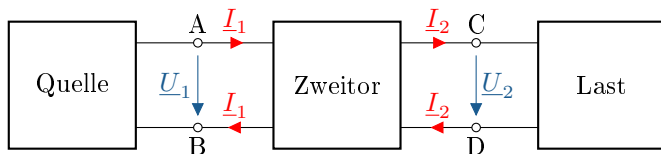


## Lernziele: Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

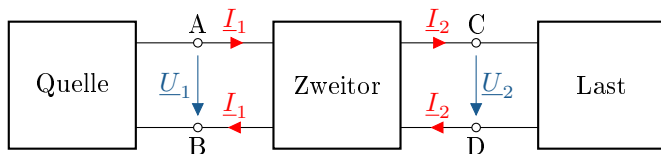
Studierende lernen:

- ▶ Frequenzgänge anhand der Schaltungstopologie algebraisch zu bestimmen
- ▶ die Funktionsweise einfacher Hoch- und Tiefpassfiltern zu verstehen
- ▶ das Grenzverhalten von Vierpolen anhand ihrer Frequenzgänge zu analysieren

## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze

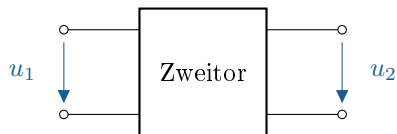


## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze



Wie sieht das Übertragungsverhalten aus?

## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitor)



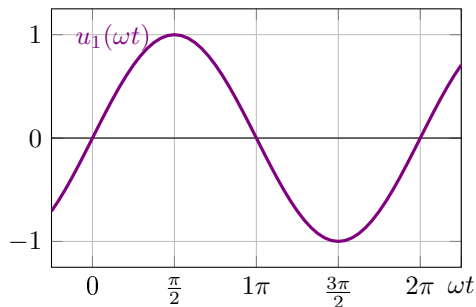
Linear und zeitinvariant (LZI):

## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)



**Linear und zeitinvariant (LZI):**

- ▶ Sinusform am Eingang  $u_1(\omega t)$

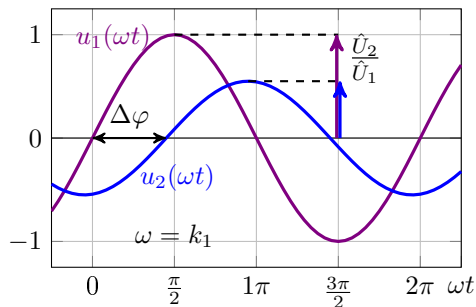


## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)



### Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang  $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang  $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$

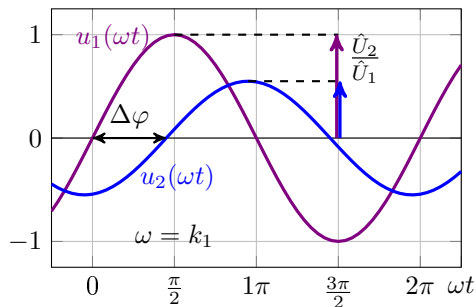


## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitor)



### Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang  $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang  $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis  $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

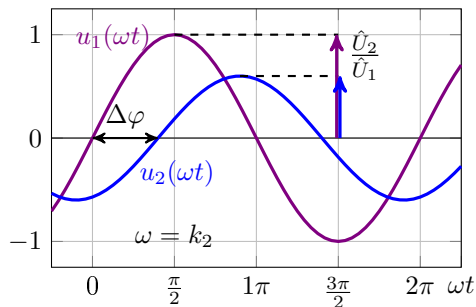


## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)



### Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang  $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang  $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis  $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

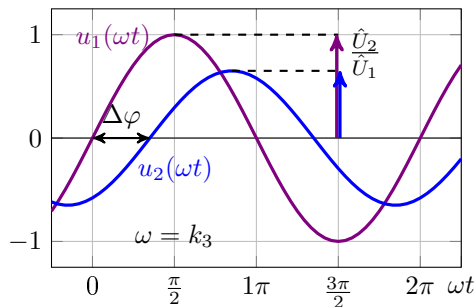


## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)



### Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang  $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang  $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis  $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

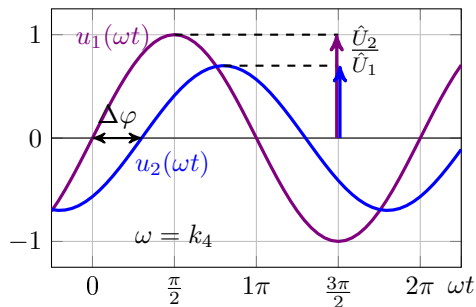


## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)



### Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang  $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang  $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis  $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

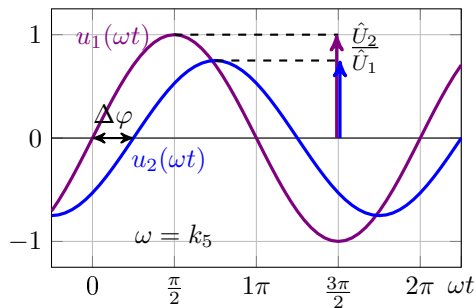


## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitor)



### Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang  $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang  $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis  $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

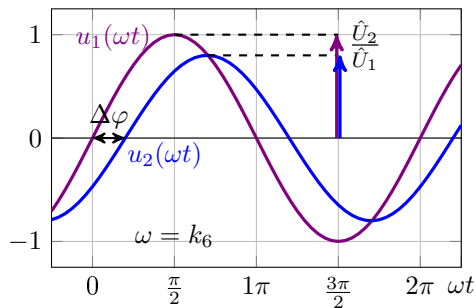


## Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitor)

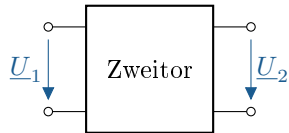


### Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang  $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang  $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis  $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$



## Zweitor (Vierpol):



## Zweitor (Vierpol):



## Linear, zeitinvariant (LZI):

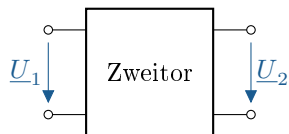
$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$

**Zweitor (Vierpol):**



**Frequenzgang:**

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

**Linear, zeitinvariant (LZI):**

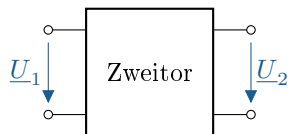
$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$

## Zweitor (Vierpol):



## Linear, zeitinvariant (LZI):

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$

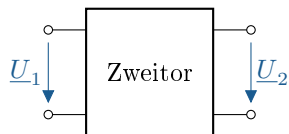
## Frequenzgang:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

## Amplitudengang:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\})^2} \end{aligned}$$

**Zweitor (Vierpol):**



**Linear, zeitinvariant (LZI):**

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich  $\omega_2 = \omega_1$

**Frequenzgang:**

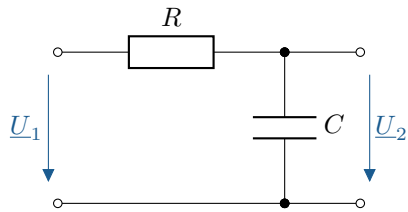
$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

**Amplitudengang:**

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\})^2} \end{aligned}$$

**Phasengang:**

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \angle \underline{F}(j\omega) = \angle \underline{U}_2 - \angle \underline{U}_1 \\ &= \arctan \left( \frac{\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\}} \right) \end{aligned}$$

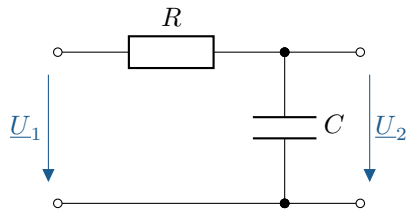


## RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

# Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



## RC-Tiefpass 1. Ordnung

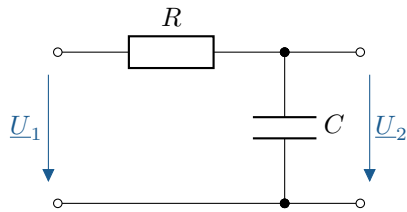
$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Frequenzgang:

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned}$$

# Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



## RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Frequenzgang:

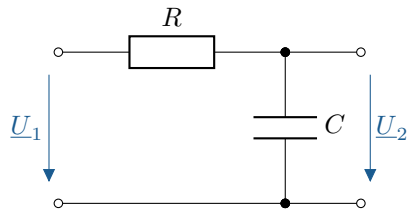
$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned}$$

Amplituden- und Phasengang:

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}}\right) = \arctan(-\omega CR)$$

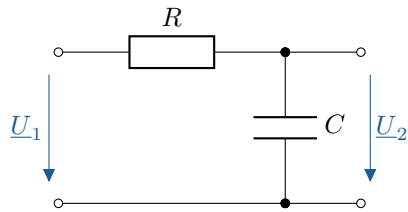
# Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



**Grenzverhalten:** für  $f \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow \infty$

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

# Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters

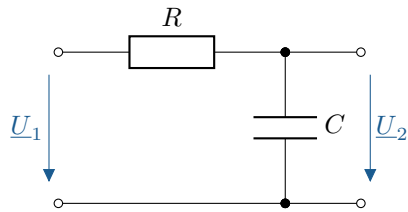


**Grenzverhalten:** für  $f \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow \infty$

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

# Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



**Grenzverhalten:** für  $f \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow \infty$

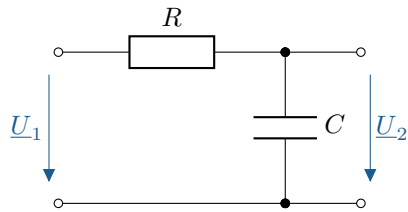
$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

# Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



**Grenzverhalten:** für  $f \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow \infty$

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

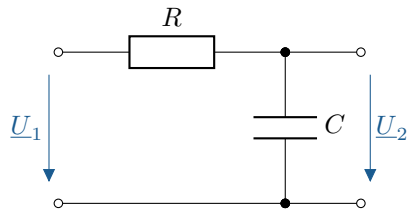
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

# Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



**Grenzverhalten:** für  $f \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow \infty$

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

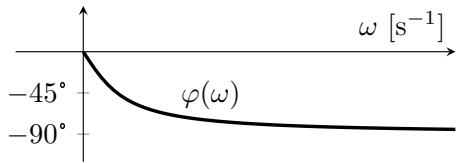
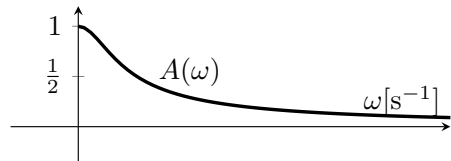
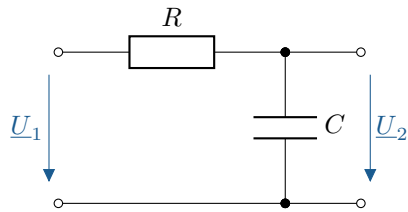
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

# Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



**Grenzverhalten:** für  $f \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow \infty$

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

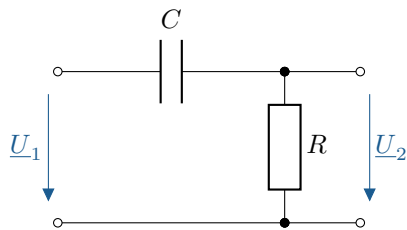
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$



## RC-Hochpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

## Frequenzgang:

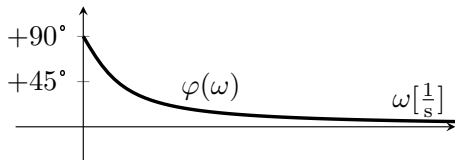
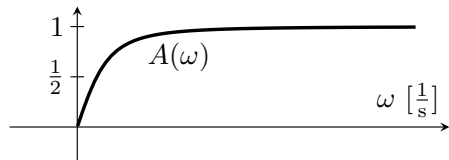
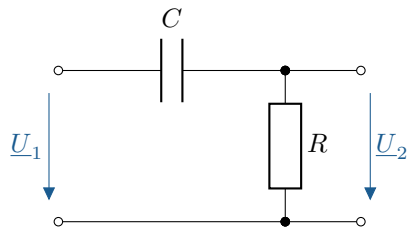
$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} \\ &= \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega CR}} = \frac{1 + j \frac{1}{\omega CR}}{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2} \end{aligned}$$

## Amplituden- und Phasengang:

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

# Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters



**Grenzverhalten:** für  $f \rightarrow 0$  und  $f \rightarrow \infty$

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega CR}}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{\infty} = 0$$

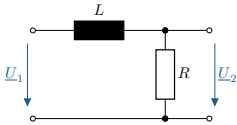
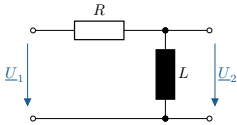
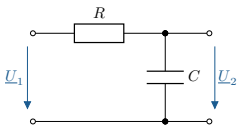
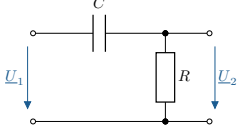
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

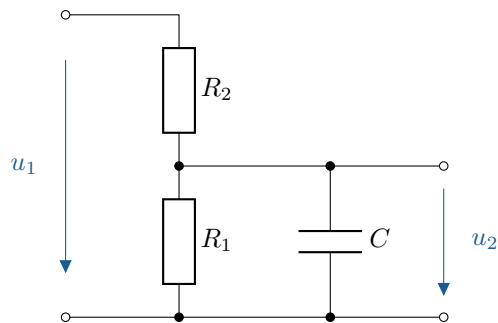
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(+\infty) = +90^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

# Vergleich passive Filter 1. Ordnung mit $L$ und $R$

	Tiefpass	$\underline{F}(j\omega)$	Hochpass	$\underline{F}(j\omega)$	$\omega_g$
RL		$\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$		$\frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}}$	$\frac{R}{L}$
RC		$\frac{1}{1 + j\omega CR}$		$\frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega CR}}$	$\frac{1}{CR}$

# Beispiel Filterschaltung: Aufgabe



$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) \quad \underline{U}_1 = \hat{U}_1$$
$$u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \underline{U}_2 = \hat{U}_2 \cdot e^{j\varphi}$$

## Aufgabe:

- a) Leiten Sie  $\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$  allgemein her.
- b) Zeichnen Sie Betrag und Phase von  $\underline{F}(j\omega)$  für:

$$R_1 = 900 \, \Omega$$

$$R_2 = 100 \, \Omega$$

$$C = 1,25 \, \mu\text{F}$$

- c) Bei welcher Frequenz  $f$  ist  $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$ ? Welche Phasenverschiebung besitzt  $u_2$  nun gegenüber  $u_1$ ?

## Lösung a) Frequenzgang allgemein

$$\begin{aligned}
 \underline{F}(j\omega) &= \frac{R_1 \parallel \underline{Z}_C}{R_2 + (R_1 \parallel \underline{Z}_C)} = \frac{\frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}}{R_2 + \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}} \left| \cdot \frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} \right. \\
 &= \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 \cdot R_2 + \frac{R_2}{j\omega C} + \frac{R_1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} \stackrel{\hat{=}}{=} \frac{a + jb}{c + jd} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{R_1(R_1 + R_2) - j\omega C R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} \quad (\text{kartesisch}) \quad \stackrel{\hat{=}}{=} \frac{a' + jb'}{c'} \quad a', b', c' \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{R_1}{\underbrace{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}_{\hat{=} \frac{a+jb}{c+jd}}} = \frac{R_1(R_1 + R_2) - j\omega C R_1^2 R_2}{\underbrace{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}_{\hat{=} \frac{a'+jb'}{c'}}$$

Betrag:  $A(\omega) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$  mit  $|\underline{F}(j\omega)| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

Phase:  $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega C R_1^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)}\right)$  mit  $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{b'}{a'}\right)$   
 $= \arctan\left(\frac{-\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$

Altern.:  $\varphi(\omega) = \arctan(0) - \arctan\left(\frac{\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$  mit  $\varphi(\omega) = \underbrace{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}_{\varphi_Z} - \underbrace{\arctan\left(\frac{d}{c}\right)}_{\varphi_N}$

## Lösung b) Grenzverhalten und Skizze

$$A(\omega) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega CR_1R_2)^2}}$$

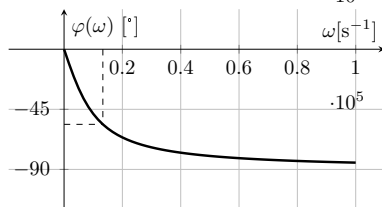
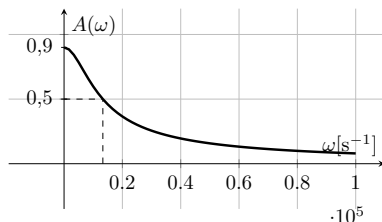
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{R_1}{R_1+R_2} = 0,9$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{R_1}{\infty} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega CR_1R_2}{R_1+R_2}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$



## Lösung c) Bestimmten Arbeitspunkt ermitteln

Ges.: Frequenz  $f_1$  bei der  $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$  und Phasenverschiebung  $u_2$  zu  $u_1$  bei  $f_1$ :

$$A(\omega_1) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad A(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Big|_{f=f_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}{R_1^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2$$

$$\Rightarrow (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2 - (R_1 + R_2)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \pm \frac{\sqrt{4R_1^2 - (R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2)}}{C R_1 R_2}$$

$$\omega_1 = 1,3304 \cdot 10^4 \frac{1}{s}, f_1 = 2,117 \text{ kHz} \quad \text{mit} \quad \omega_1 < 0 \text{ unphysikalisch, } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\varphi(\omega_1) = \arctan(-1,4967) = -56,25^\circ \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}}\right)$$



## Lernziele: Logarithmische Darstellung, Frequenzgang

Studierende lernen:

- ▶ Unterschiede zwischen linearer und logarithmischer Darstellung kennen.
- ▶ Dezibel als Einheit kennen und zu verwenden.
- ▶ Grenzfrequenzen von Filterschaltungen kennen und zu bestimmen.
- ▶ Bodediagramme zu konstruieren und zu interpretieren.
- ▶ Funktionsweise von Bandpass- und Bandsperrefilter kennen und verstehen.
- ▶ Aufbau und Verhalten von Filtern höherer Ordnung kennen und verstehen.

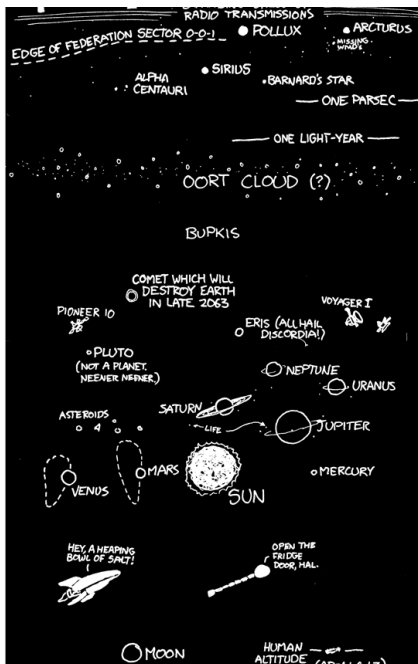
# Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



Multipage Comic Strip (vertikal Scrollen)

Quelle: xkcd #482, *Depth*, <https://xkcd.com/485/> (Abruf: 04.04.2024)

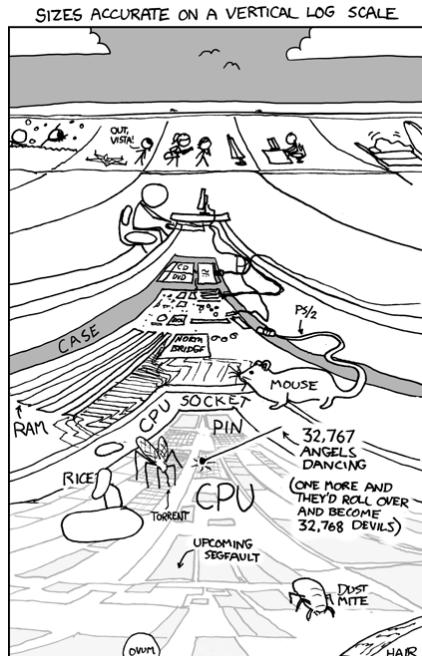
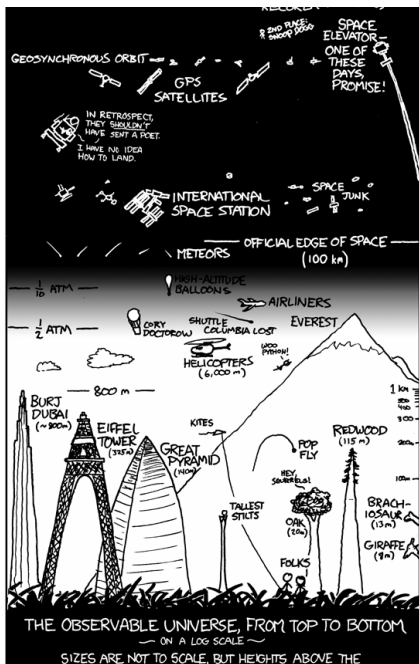
# Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



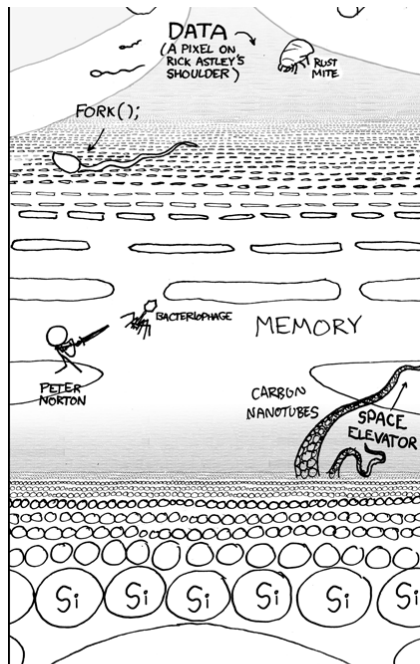
Multipage Comic Strip (vertikal Scrollen)

Quelle: xkcd #482, *Depth*, <https://xkcd.com/485/> (Abruf: 04.04.2024)

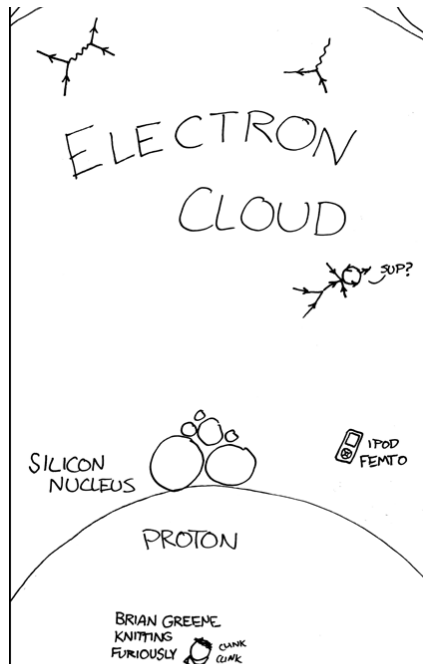
# Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



# Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

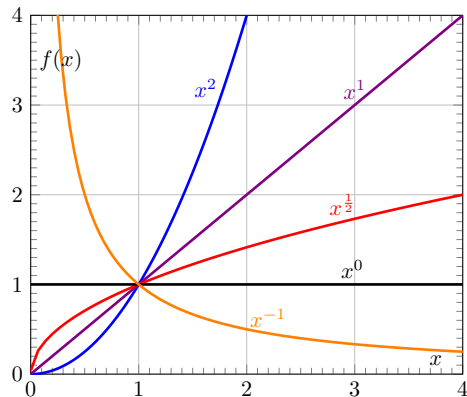


Quelle: xkcd #482, *Height*, <https://xkcd.com/482/> (Abruf: 04.04.2024)



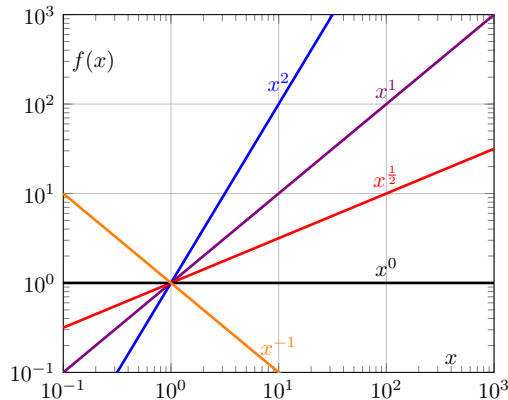
Quelle: xkcd #482, Height, <https://xkcd.com/482/> (Abruf: 04.04.2024)

# Logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen



## Lineare Darstellung

- ▶ Gerade:  $f(x) = a(x - x_0) + y_0$
- ▶ Add./Subtr. → Verschiebung
- ▶ Mult./Div. → Streckung



## (Doppelt-)Logarithmische Darstellung

- ▶ Gerade:  $f(x) = (x/x_0)^a \cdot y_0$
- ▶ Mult./Div. → Verschiebung
- ▶ Exponent → Streckung

**Dezibel** Hilfsmaßeinheit zur Kennzeichnung logarithmischer Verhältnisse zweier Größen.

Leistungsgrößen (z.B.  $P$ ,  $W$ )       $Q_{(P)} = \log \frac{P_2}{P_1}$  B =  $10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$  dB

Leistungswurzelgr. (z.B.  $U$ ,  $I$ )       $Q_{(R)} = \log \frac{U_2^2}{U_1^2}$  B =  $20 \cdot \log \frac{U_1}{U_2}$  dB

Typische Dezibelwerte (Verstärkung in dB) bei Spannungsverhältnissen

$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{10}$	10	20	100
$Q_{dB}$	-3 dB	0 dB	+3 dB	+6 dB	10 dB	20 dB	26 dB	40 dB

**Grenzfrequenz:**  $f_g$  ( $\omega_g$ )

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Grenzfrequenz:**  $f_g$  ( $\omega_g$ )

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Bereiche:**

Durchlassbereich:  $A(\omega) > 1/\sqrt{2}$

Grenzfrequenz:  $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$

Sperrbereich:  $A(\omega) < 1/\sqrt{2}$

**Grenzfrequenz:**  $f_g$  ( $\omega_g$ )

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Bereiche:**

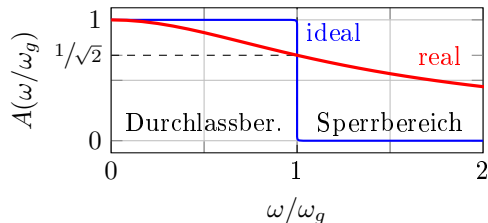
Durchlassbereich:  $A(\omega) > 1/\sqrt{2}$

Grenzfrequenz:  $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$

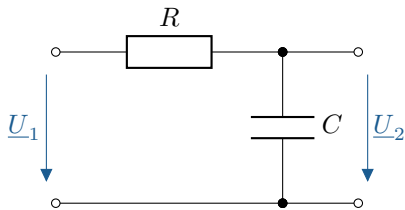
Sperrbereich:  $A(\omega) < 1/\sqrt{2}$

**Beispiel:** Tiefpass erster Ordnung

$$A(\omega/\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad \text{mit } \omega_g = \frac{1}{CR}$$



## Logarithmische Darstellung



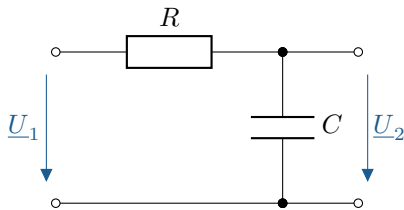
**RC-Tiefpass 1. Ordnung**

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

## Logarithmische Darstellung

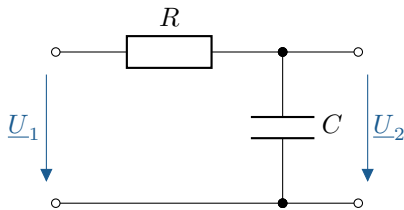


**RC-Tiefpass 1. Ordnung**

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

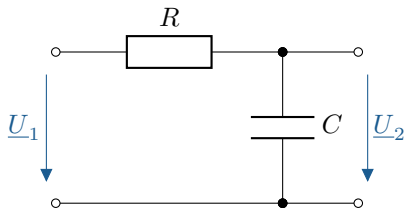


**RC-Tiefpass 1. Ordnung**

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$



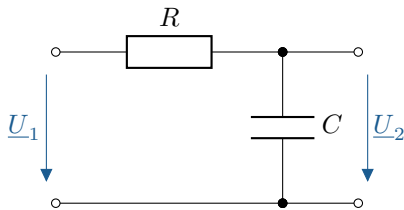
**RC-Tiefpass 1. Ordnung**

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

## Logarithmische Darstellung

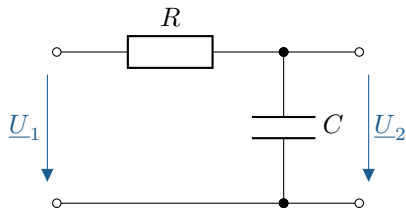


**RC-Tiefpass 1. Ordnung**

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

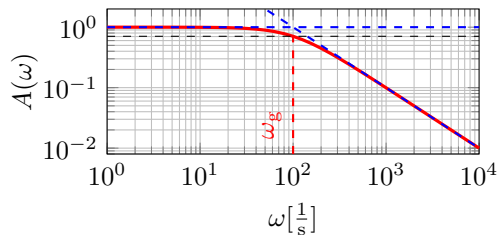
$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

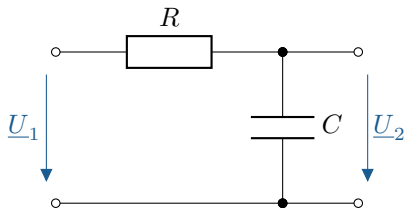


RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

Logarithmische Darstellung

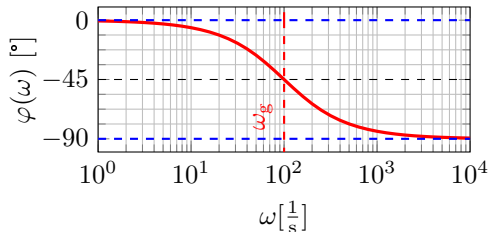
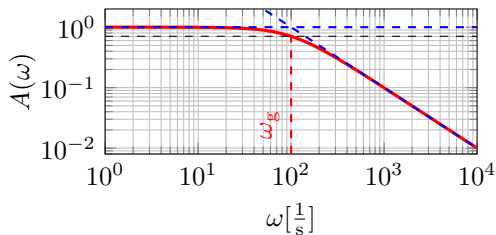




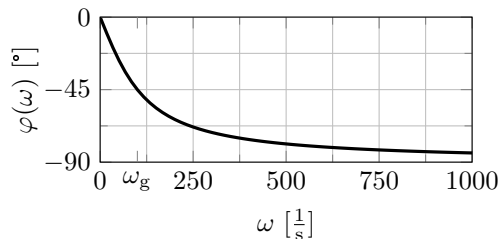
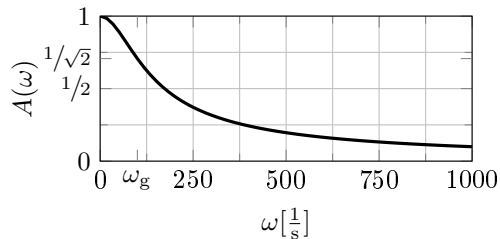
RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

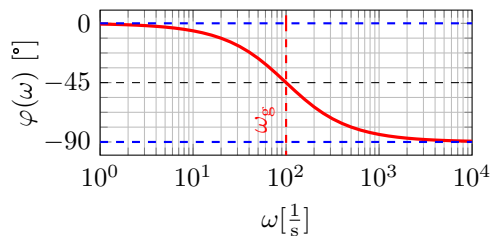
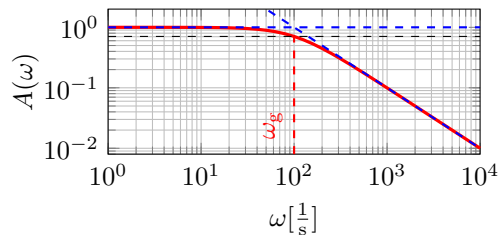
Logarithmische Darstellung



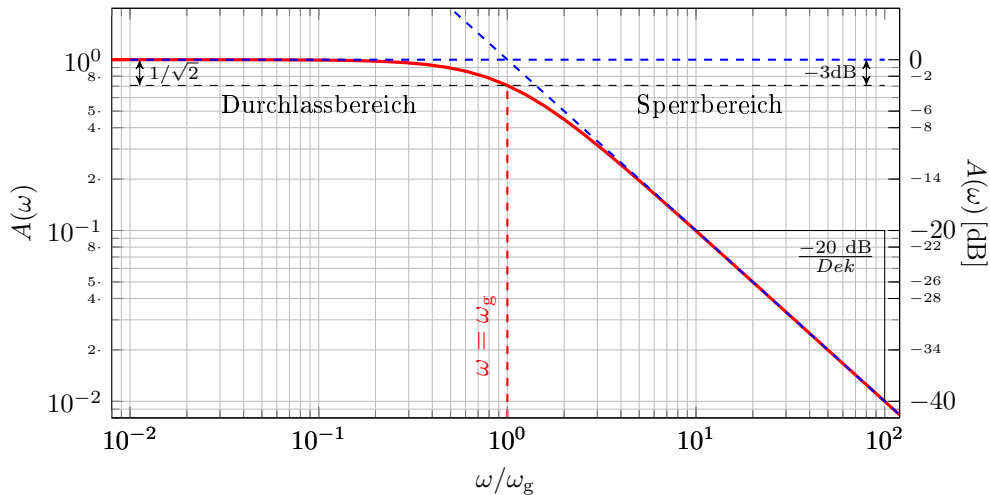
## Lineare Darstellung



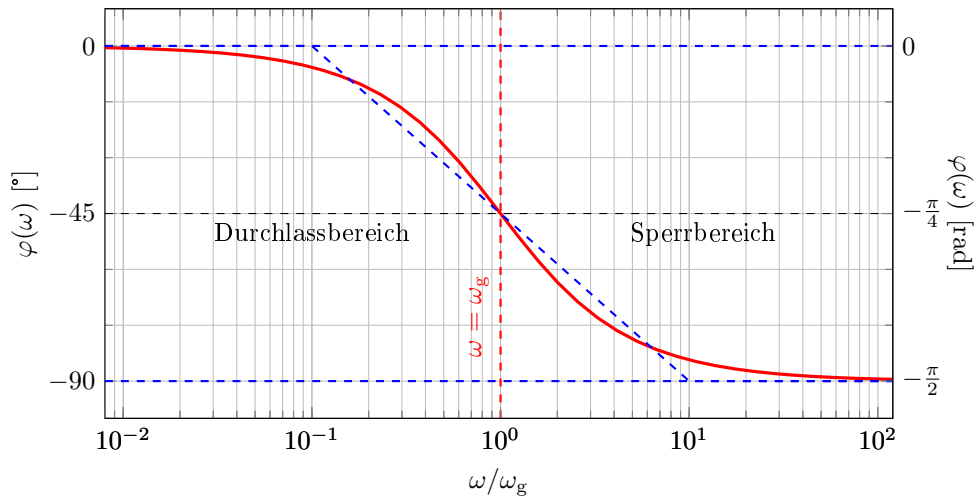
## Logarithmische Darstellung



# Tiefpass 1. Ordnung, Amplitudengang

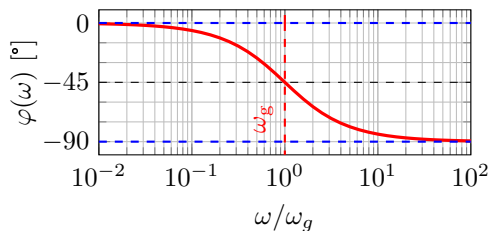
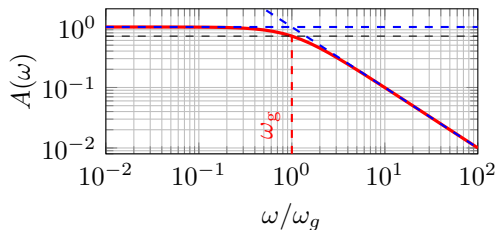


# Tiefpass 1. Ordnung, Phasengang

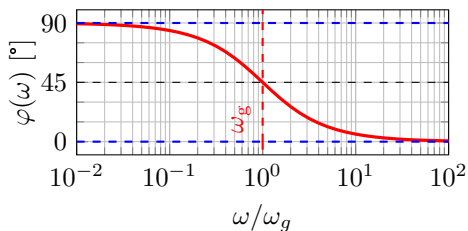
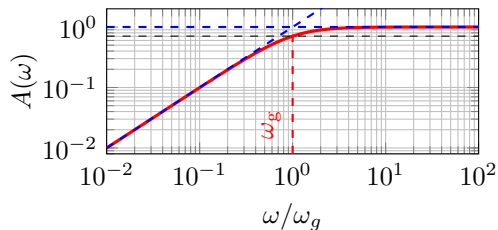


# Vergleich Tief- und Hochpass 1. Ordnung

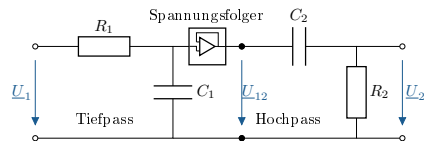
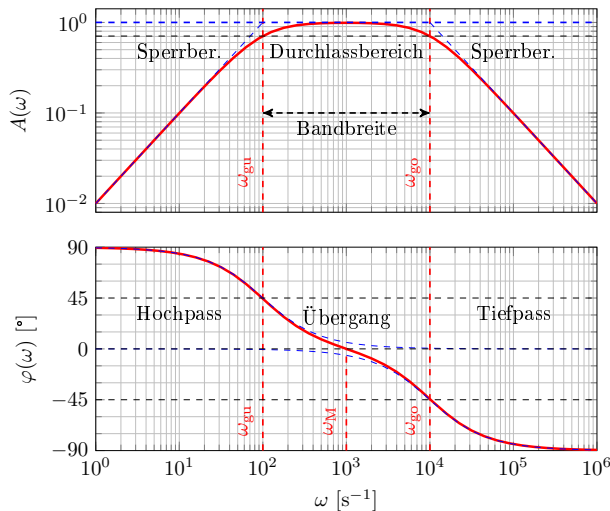
## Tiefpass



## Hochpass



# Bandpass 2. Ordnung



Grenzfrequenz: (obere, untere)

$$f_{go}, f_{gu}$$

Bandbreite:

$$B = \Delta f = f_{go} - f_{gu}$$

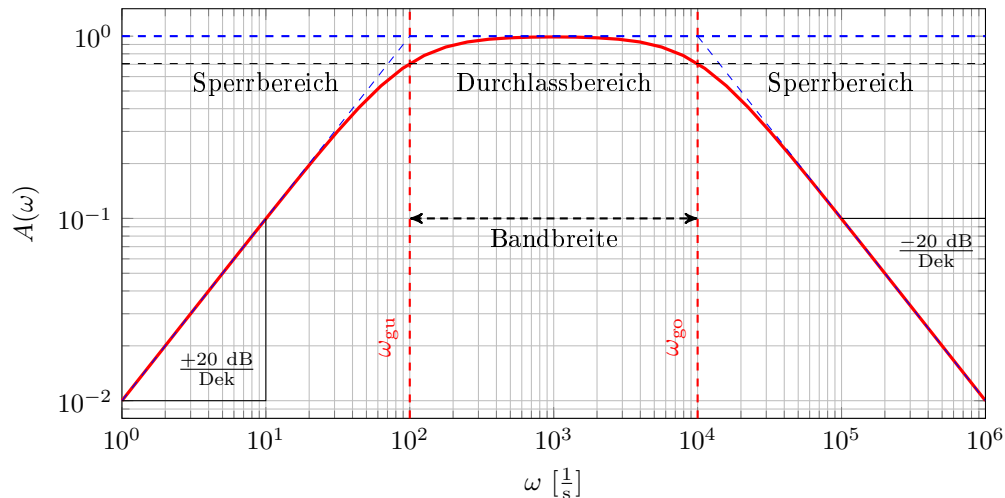
Mittenfrequenz:

$$f_m = \sqrt{f_{go} \cdot f_{gu}}$$

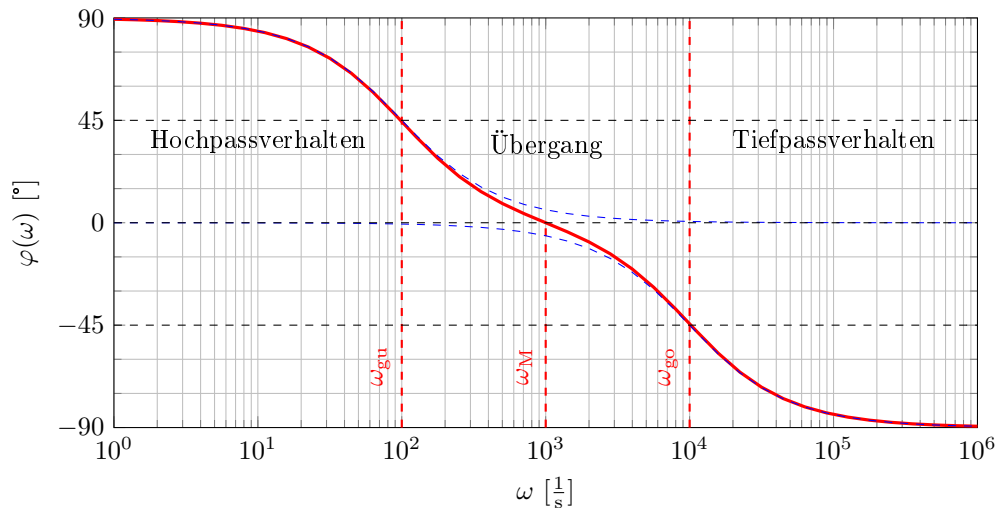
Frequenzgang<sup>1</sup>:  $\underline{F}_{BP}(j\omega) = \underline{F}_{TP}(j\omega) \cdot \underline{F}_{TP}(j\omega)$

<sup>1</sup>Bei rückwirkungsfreier Serienschaltung aus Multiplikation der Einzelfrequenzgänge

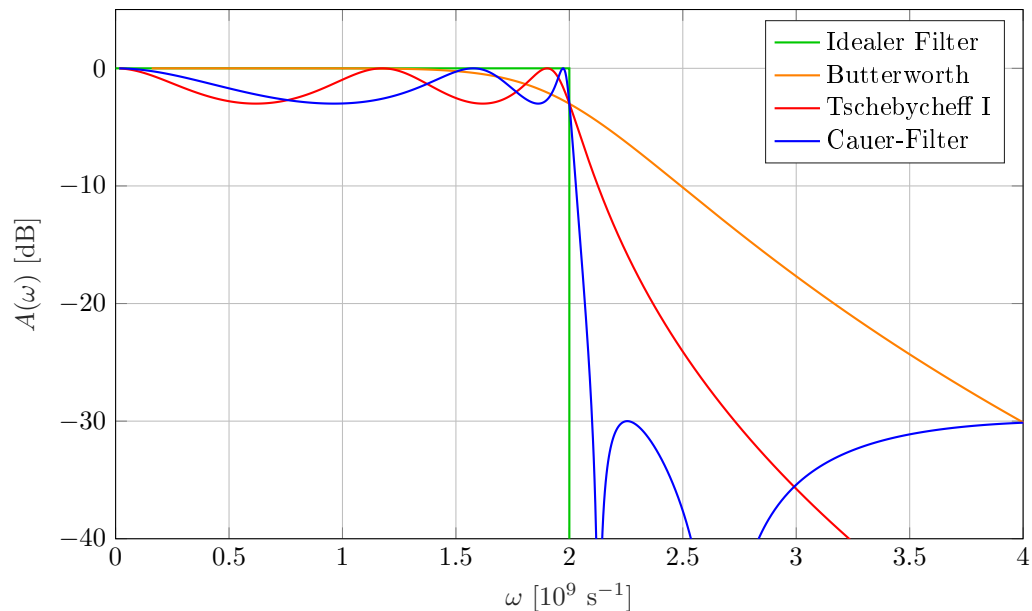
# Bandpass 2. Ordnung - Amplitudengang, Detail



# Bandpass 2. Ordnung - Phasengang, Detail



# Ordnung von Filtern, Beispielfilter höherer Ordnung



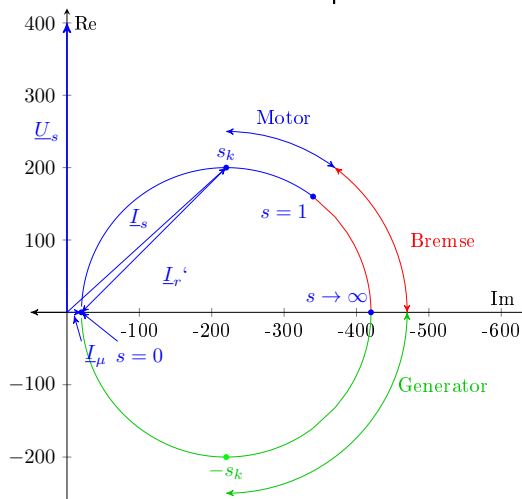
## Lernziele: Ortskurven

Studierende lernen:

- ▶ Ortskurven kennen und mögliche Anwendungsbereiche kennen.
- ▶ Ortskurven prinzipiell zu konstruieren und zu interpretieren.
- ▶ Impedanz- und Admittanzortskurven von Grundsaltungen kennen.

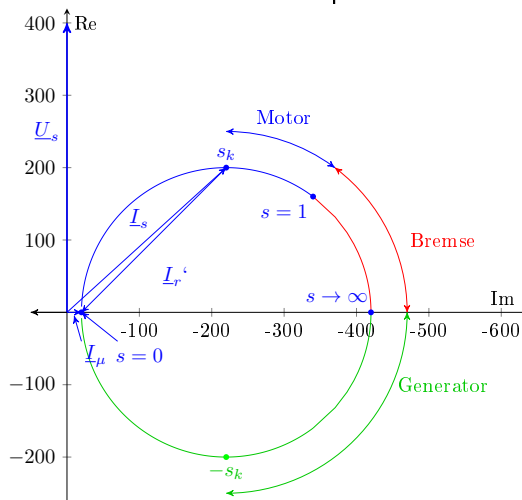
**Def. Ortskurve:** Darstellung eines komplexen Zeigers  $\underline{z}(p) = \operatorname{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{z}(p)\}$  in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter  $p$ .

**Def. Ortskurve:** Darstellung eines komplexen Zeigers  $\underline{z}(p) = \text{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \text{Im}\{\underline{z}(p)\}$  in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter  $p$ .



**Beispiel:** Stromortskurve einer Asynchronmaschine für  $\underline{I}_s(s)$

**Def. Ortskurve:** Darstellung eines komplexen Zeigers  $\underline{z}(p) = \text{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \text{Im}\{\underline{z}(p)\}$  in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter  $p$ .



Anwendungsbereiche?

Beispiel: Stromortskurve einer Asynchronmaschine für  $\underline{I}_s(s)$



Zeigerdiagramm:

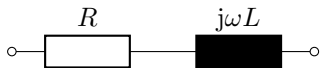
Zeigt Größe in komplexer Ebene als Zeiger (eines Punktes).



## Merke: Ortskurve

Zeigt Größe in komplexer Ebene parameterabhängig als Kurve (Punkteschar).

# Impedanzortskurve - RL-Glied , $R$ variabel

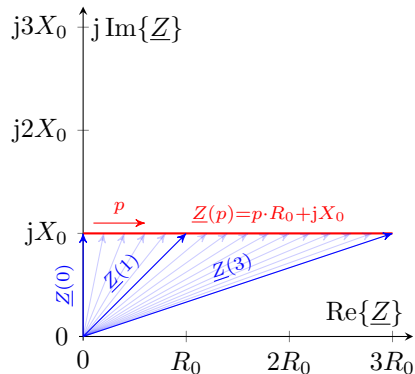


$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

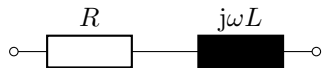
$$\underline{Z} = p \cdot R_0 + jX_0$$

mit  $p \in [0,3]$

$R_0, X_0 = konst.$



# Impedanzortskurve - RLs-Glied, $\omega$ variabel

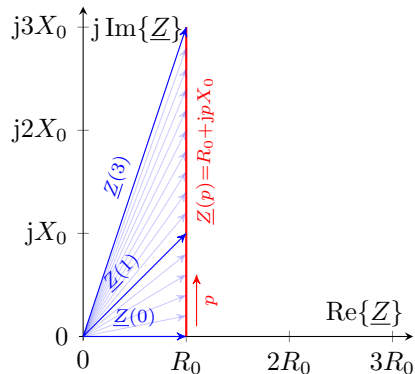


$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

$$\underline{Z} = R_0 + jp \cdot \omega_0 L_0$$

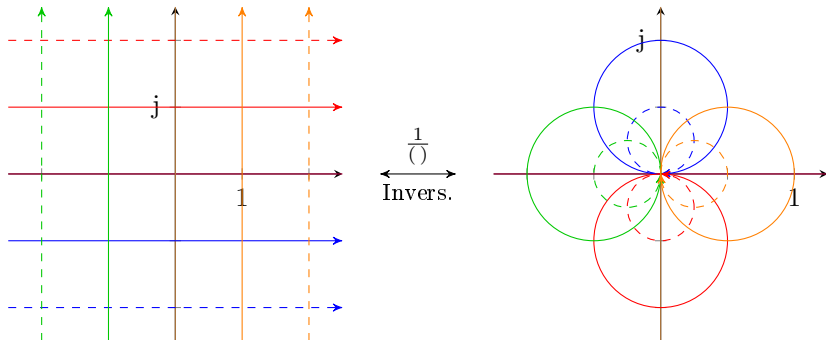
mit  $p \in [0,3]$

$R_0, L_0, \omega_0 = \textit{konst.}$




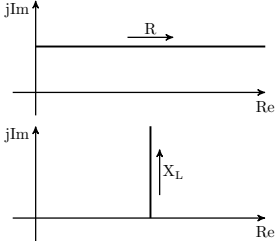
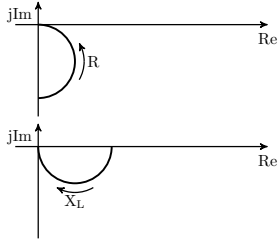
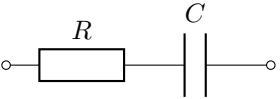
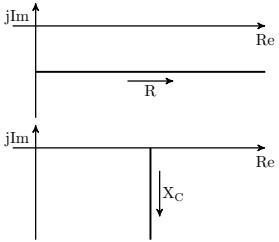
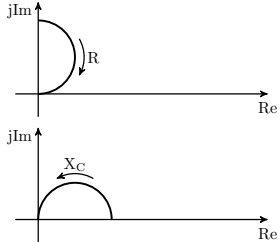
# Admittanzortskurve - Inversion von Ortskurven

ursprüngliche Ortskurve		invertierte Ortskurve	
Gerade	durch den Ursprung	Gerade	durch den Ursprung
Gerade	nicht durch den Ursprung	Kreis	durch den Ursprung
Kreis	durch den Ursprung	Gerade	nicht durch den Ursprung
Kreis	nicht durch den Ursprung	Kreis	nicht durch den Ursprung

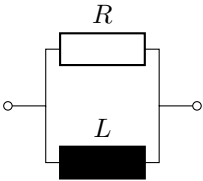
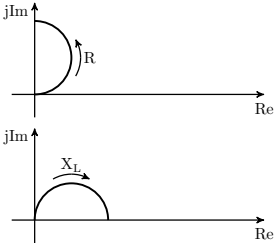
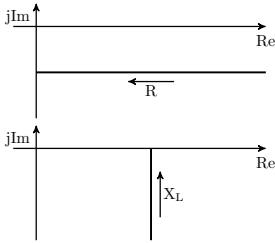
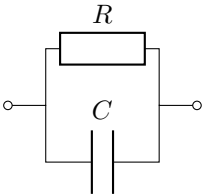
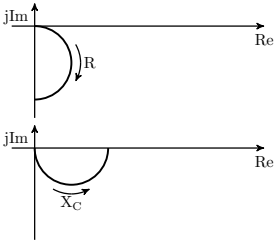
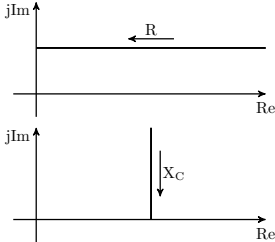


<sup>1</sup>Angelehnt an MoebiusInversion.svg von Chrislb, CC-BY-SA-2.0-DE, 2005,  
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MoebiusInversion.svg>

# Ortskurven von Grundschaltungen - in Reihe

Grundschaltung	<u>Z</u> -Ortskurve	<u>Y</u> -Ortskurve
		
		

# Ortskurven von Grundschaltungen - in Parallel

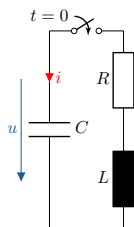
Grundschaltung	<u>Z</u> -Ortskurve	<u>Y</u> -Ortskurve
		
		

## Lernziele: Resonanzkreise

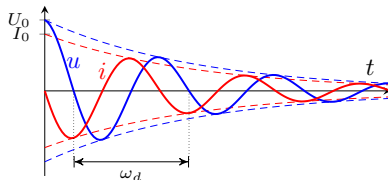
Studierende lernen:

- ▶ Resonanzkreise zu erkennen und zu berechnen
- ▶ Resonanzfrequenz, Kennwiderstand und Güte zu bestimmen
- ▶ Resonanzkurven zu berechnen, zu beschreiben und zu zeichnen

# Resonanzerscheinung



Freie Schwingung:

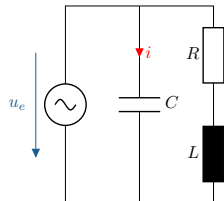


Randbedingung:

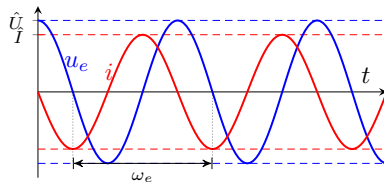
$$u(t=0) = U_0$$

$$i(t=0) = 0$$

mit Eigenkreisfrequenz  $\omega_d$ ,  
abklingend (gedämpft)



Erzwungene Schwingung:



Erregerspannung:

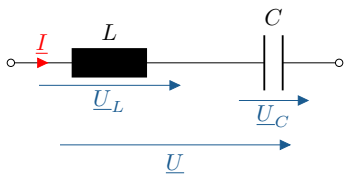
$$u_e(t) = \hat{U} \sin(\omega_e t)$$

mit Erregerkreisfrequenz  $\omega_e$

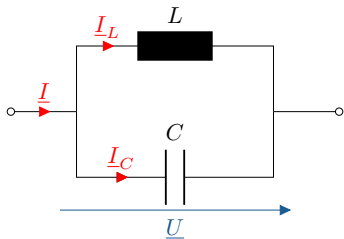
# Definition Resonanzbedingung, -frequenz, Güte, Kennwiderstand

Grundtypen

Reihen-Resonanzkreis



Parallel-Resonanzkreis



Resonanzbedingung  $\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0$

Resonanzfrequenz  $f_0$

Kennwiderstand  $X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}|$

Kennleitwert  $B_k = \frac{1}{X_k}$

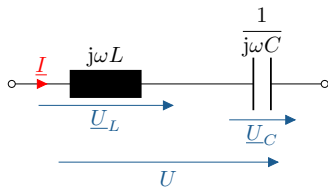
Güte  $Q = \frac{|Q_{L,0}|}{P_0} = \frac{|Q_{C,0}|}{P_0}$

Eigenfrequenz  $f_d$  (gedämpft)

Eigenfrequenz  $f_0$  (ungedämpft)

# Resonanzfrequenz am Beispiel idealer LC-Schwingkreise

in Reihe



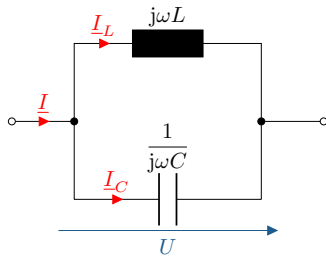
spannungsbezogen

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{I} \cdot \left( j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \\ &= \underline{I} \cdot j \left( \underbrace{\omega L - \frac{1}{\omega C}}_{=0 \text{ Resonanz}} \right)\end{aligned}$$

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{I} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \underline{U} = \text{konst.}$$

parallel



strombezogen

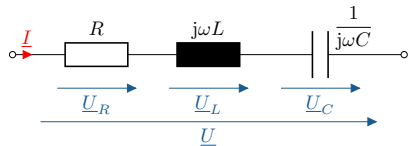
$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{U} \cdot \left( j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \\ &= \underline{U} \cdot j \left( \underbrace{\omega C - \frac{1}{\omega L}}_{=0 \text{ Resonanz}} \right)\end{aligned}$$

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{U} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \underline{I} = \text{konst.}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

# RLC-Reihenschwingkreis - Resonanzverhalten



$$\underline{Z} = R + j \underbrace{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}_{= 0 \text{ für } \omega = \omega_0}$$

## Resonanzbedingung (allg.)

Phasenverschiebung zwischen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  entspricht  $\varphi = 0$ .

Oder:

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right\} = \operatorname{Im} \{ \underline{Z} \} \stackrel{!}{=} 0$$

Fall 1:  $\omega < \omega_0$

→  $\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) < 0$  ohmsch-kapazitiv

Fall 2:  $\omega = \omega_0$  (Resonanzfall)

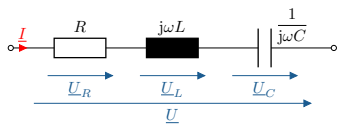
→  $\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 0$  rein ohmsch

Fall 3:  $\omega > \omega_0$

→  $\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) > 0$  ohmsch-induktiv



# Fallunterscheidung in Impedanzkurve



$$\underline{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Resonanzbedingung

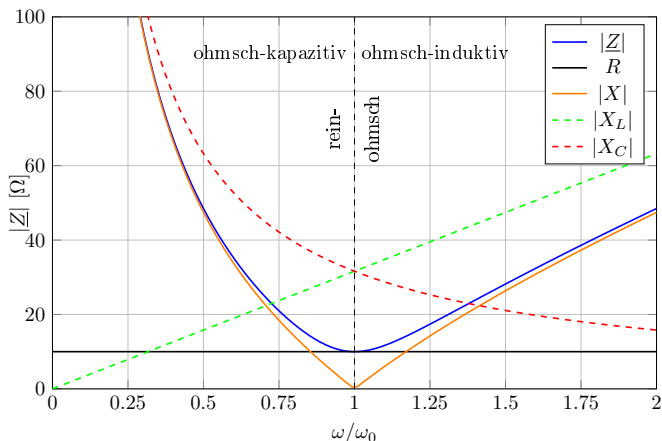
$$\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0$$

Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

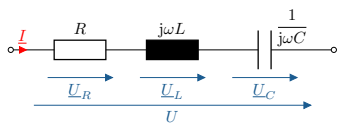
Resonanzimpedanz

$$\underline{Z}_0 = R$$



$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

# Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Reihenschwingkreises



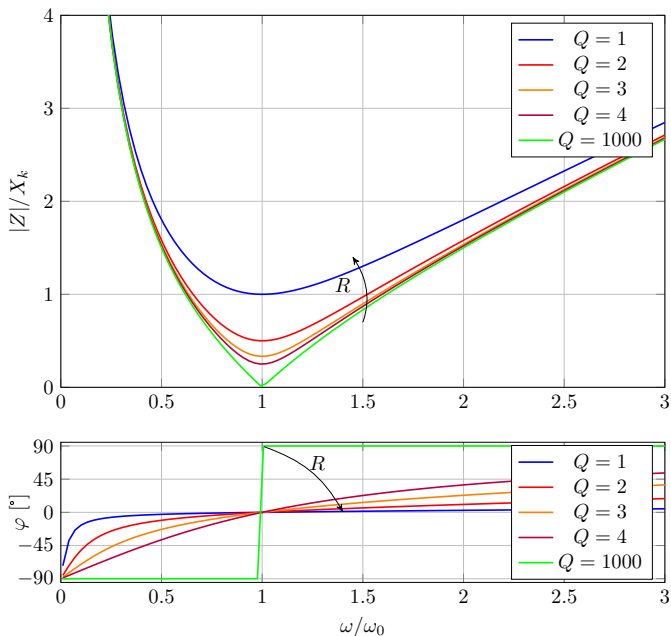
$$\underline{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

normiert

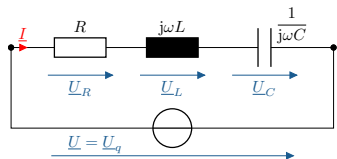
$$\frac{\underline{Z}}{X_k} = \frac{1}{Q} + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Güte und Kennwiderstand

$$Q = \frac{X_k}{R} \quad X_k = \sqrt{\frac{L}{C}}$$



# Spannungsresonanz am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises I

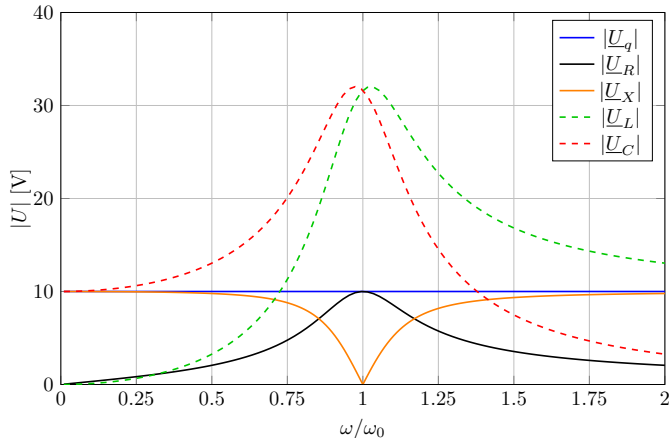


Spannungsteiler (Bsp.)

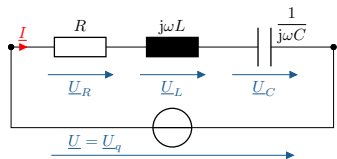
$$\frac{U_L}{U} = \frac{j \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\frac{1}{Q} + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Güte und Überspannung

$$Q = \frac{X_k}{R} = \frac{U_{L,0}}{U} = \frac{U_{C,0}}{U}$$



$U_q(\omega_0) \Rightarrow$  Überspannung!



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}_q$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R = \underline{I}_L = \underline{I}_C$$

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{U_{L,0}I}{U_{R,0}I} = \frac{U_{L,0}}{U_q} = \frac{X_k}{R}$$

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

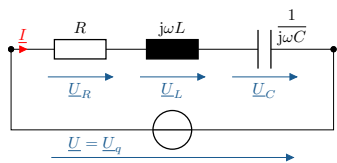
normiert

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{1/Q}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{+j\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{-j\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

# Stromkurve des RLC-Reihenschwingkreises II

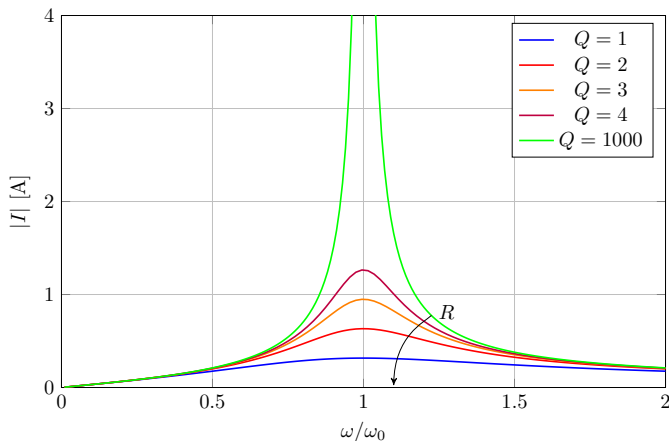


Strom

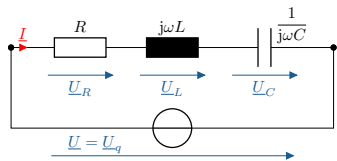
$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) Q}$$

Maximalstrom, Güte

$$I_0 = \frac{U_q}{R} \quad Q = \frac{X_k}{R}$$



Strom maximal bei  $\omega_0$   
Begrenzung durch  $R$



$$\underline{Z} = R + j(X_L + X_C)$$

$$X_L = +X_k \frac{\omega}{\omega_0} = \omega L$$

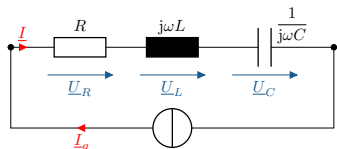
$$X_C = -X_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{X_k}{R} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{U_q}{\underline{Z}} \\ &= \frac{U_q}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{U_q}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k} \\ &= \frac{U_q}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \frac{X_k}{R}} \\ &= I_0 \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) Q} \end{aligned}$$

# Spannungskurve des RLC-Reihenschwingkreis



Stromquelle

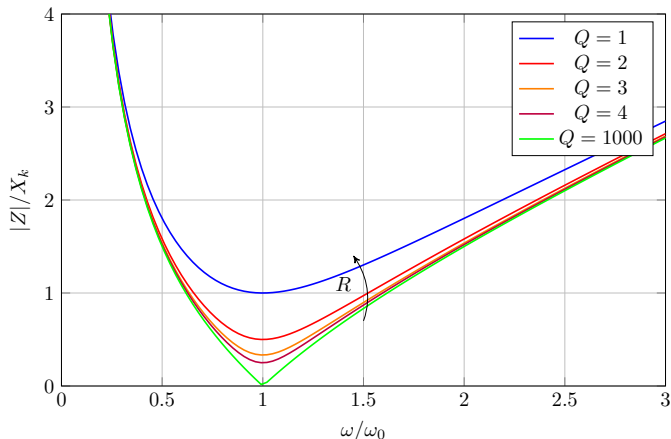
$$\underline{I} = I_q$$

Spannung

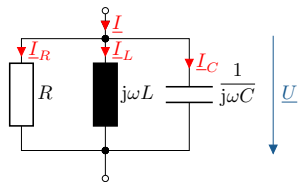
$$\underline{U} = I_q \cdot \underline{Z}$$

Impedanz

$$\underline{Z} = R + jX$$



Spannungskurve  $\sim$  Impedanzkurve



$$\underline{Y} = G + j \left( \underbrace{\omega C - \frac{1}{\omega L}}_{= 0 \text{ für } \omega = \omega_0} \right)$$

## Resonanzbedingung (allg.)

Phasenverschiebung zwischen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  entspricht  $\varphi = 0$ .

Oder:

$$\text{Im} \left\{ \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \right\} = \text{Im} \{ \underline{Y} \} \stackrel{!}{=} 0$$

Fall 1:  $\omega < \omega_0$

$$\rightarrow \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) < 0 \quad \text{ohmsch-induktiv}$$

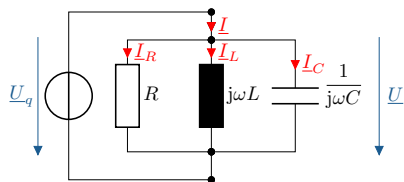
Fall 2:  $\omega = \omega_0$  (Resonanzfall)

$$\rightarrow \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = 0 \quad \text{rein ohmsch}$$

Fall 3:  $\omega > \omega_0$

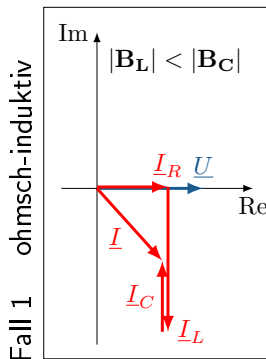
$$\rightarrow \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) > 0 \quad \text{ohmsch-kapazitiv}$$

# Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm

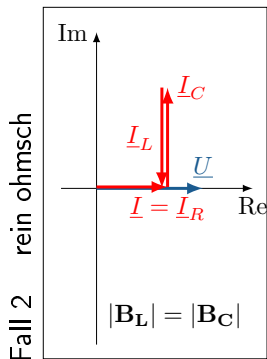


$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C \\ &= \underline{U} \cdot \left[ G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \\ &= \underline{U} \cdot \underbrace{\left[ G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]}_{= \text{Im}\{Y\}} \end{aligned}$$

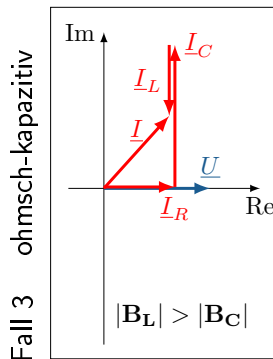
$$\begin{aligned} \underline{U} &= \text{konst.} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$



$$\omega < \omega_0$$

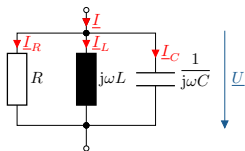


$$\omega = \omega_0$$



$$\omega > \omega_0$$

# Fallunterscheidung in Admittanzkurve



$$\underline{Y} = G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

Resonanzbedingung

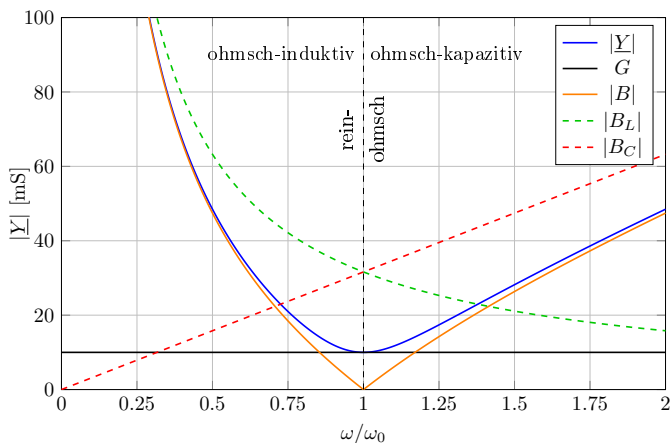
$$\text{Im}\{\underline{Y}\} \stackrel{!}{=} 0$$

Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

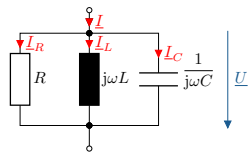
Resonanzadmittanz

$$\underline{Y}_0 = G$$



$$B_k = |B_{C,0}| = |B_{L,0}| = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

# Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Parallelschwingkreis



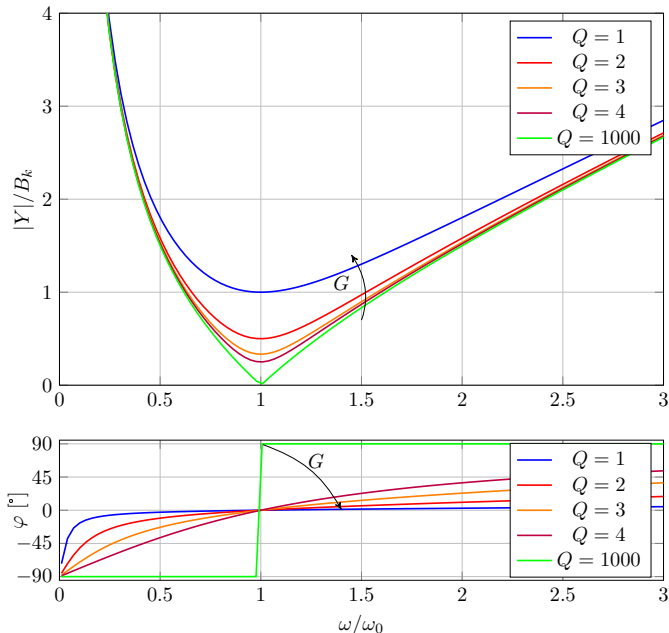
$$\underline{Y} = G + j \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

normiert

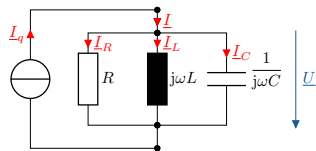
$$\frac{\underline{Y}}{B_k} = \frac{1}{Q} + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Güte und Kennleitwert

$$Q = \frac{B_k}{G} \quad B_k = \sqrt{\frac{C}{L}}$$



# Stromresonanz am Beispiel eines RLC-Parallelschwingkreises



$$\underline{U} = \underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C$$

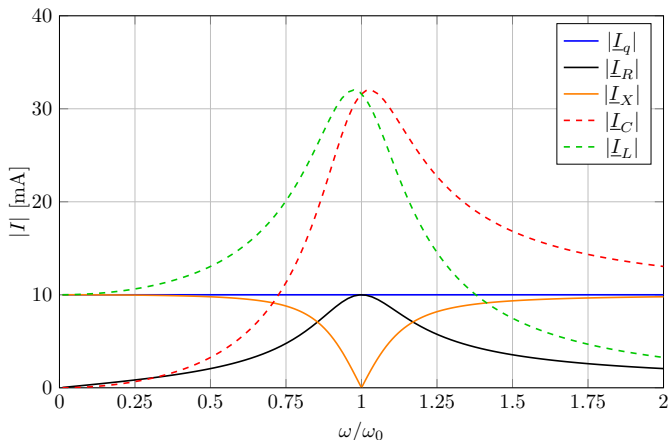
$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I}_q$$

Stromteiler (Bsp.)

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{I}} = \frac{j \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\frac{1}{Q} + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

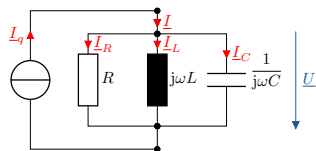
Güte und Überstrom

$$Q = \frac{B_k}{G} = \frac{I_{C,0}}{I} = \frac{I_{L,0}}{I}$$



Stromquelle  $I_q(\omega_0) \Rightarrow$  Überstrom!

# Spannungskurve des RLC-Parallelschwingkreis II

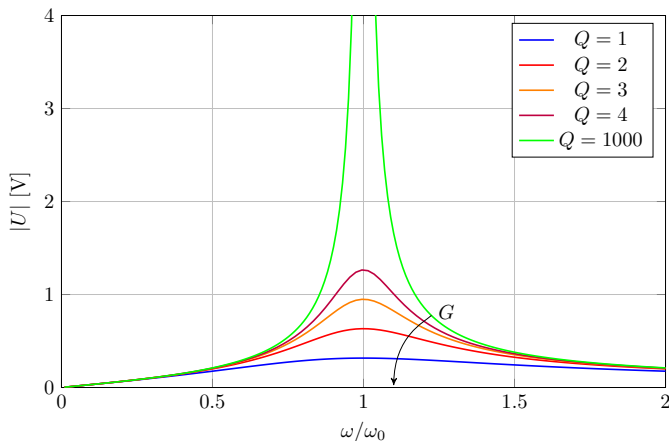


Spannung

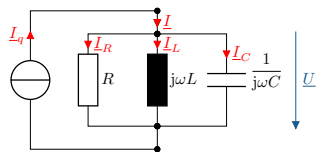
$$\underline{U} = \frac{U_0}{1 + j \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) Q}$$

Maximalspannung, Güte

$$U_0 = \frac{I_q}{G} \quad Q = \frac{B_k}{G}$$



Spannung maximal bei  $\omega_0$   
Begrenzung durch  $G$



$$\underline{Y} = G + j(B_L + B_C)$$

$$B_L = -B_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{\omega L}$$

$$B_C = +B_k \frac{\omega}{\omega_0} = \omega C$$

$$B_k = |B_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$Q = \frac{B_k}{G} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_q}{\underline{Y}}$$

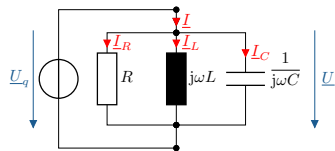
$$= \frac{I_q}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$= \frac{I_q}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k}$$

$$= \frac{I_q}{G} \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \frac{B_k}{G}}$$

$$= U_0 \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) Q}$$

# Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises



Spannungsquelle

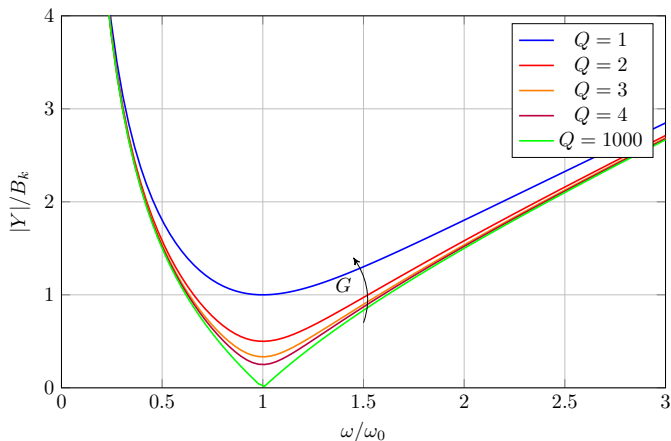
$$\underline{U} = U_q$$

Strom

$$\underline{I} = U_q \cdot \underline{Y}$$

Admittanz

$$\underline{Y} = G + jB$$



Stromkurve  $\sim$  Admittanzkurve

