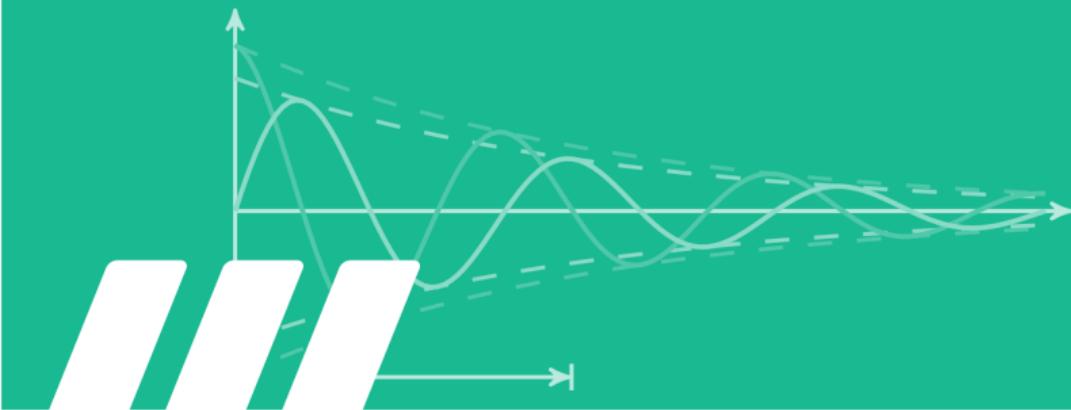


GET it digital

Modul 8: Schaltungen variabler Frequenz



Stand: 26. Mai 2025



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 8: Schaltungen variabler Frequenz“ von M. Werle Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Das Werk ist online verfügbar unter:

<https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-8-schaltungen-variabler-frequenz>

Gliederung - Wiederholung I

Wiederholung

Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente

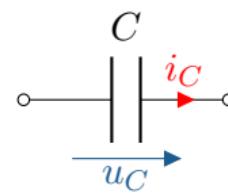
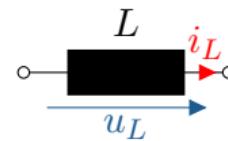
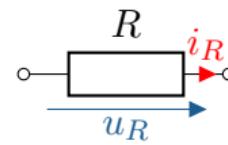
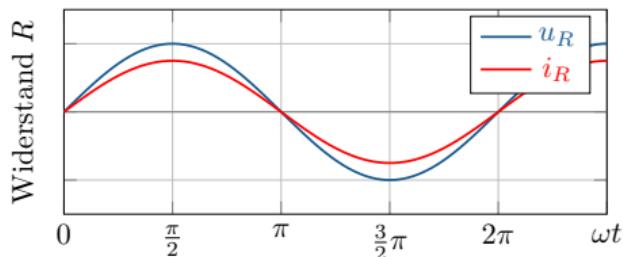
Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

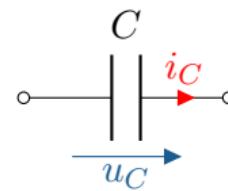
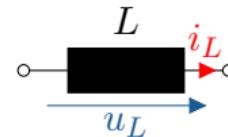
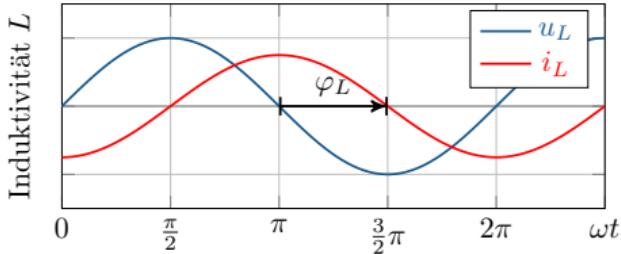
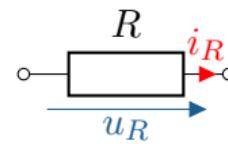
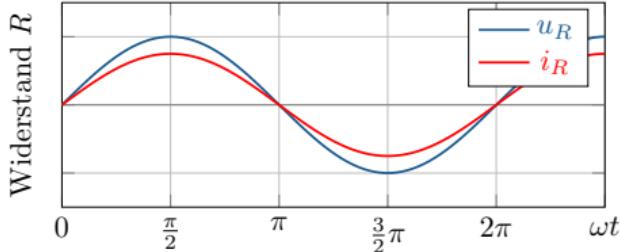
Ortskurven

Resonanzkreise

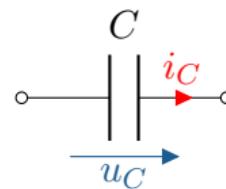
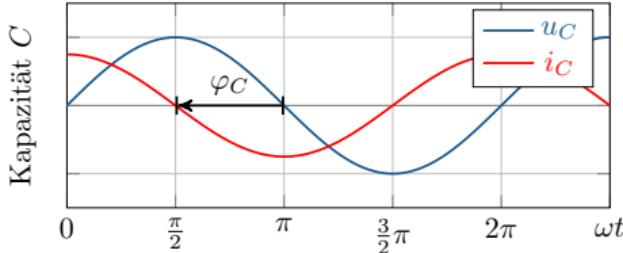
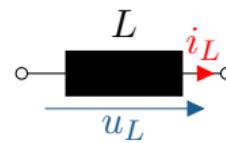
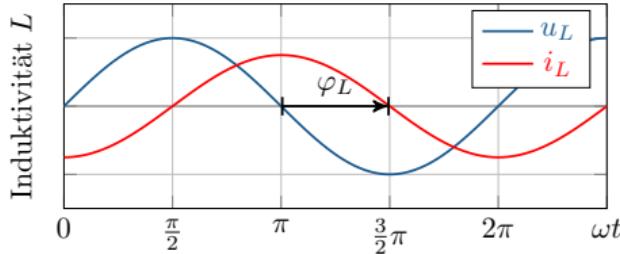
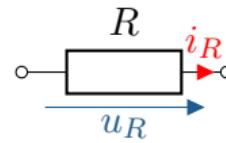
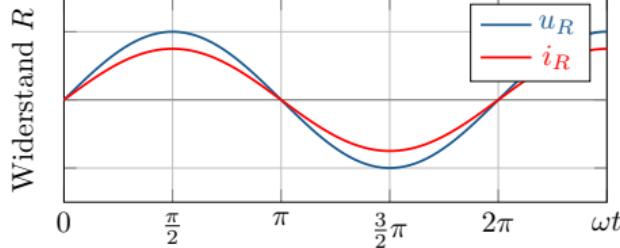
Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente



Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente



Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente



Verhalten von Induktivitäten und Kapazitäten



- ▶ Impedanz: $Z_L = j\omega L$
- ▶ DGL: $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$
- ▶ Energie im Magnetfeld
- ▶ Ströme stetig (keine Sprünge)



- ▶ Impedanz: $Z_C = -j \frac{1}{\omega C}$
- ▶ DGL: $i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$
- ▶ Energie im elektrischen Feld
- ▶ Spannungen stetig (keine Sprünge)



Spule



Kondensator

Vergleich der linearen Zweipole R , L und C

Größe	Allgemein	El. Widerstand	Induktivität	Kapazität
Symbol				
Einheit	[Form.z.] = Einheit	$[R] = \Omega$ (Ohm)	$[L] = \text{H}$ (Henry)	$[C] = \text{F}$ (Farad)
Zeitbereich	$\frac{d}{dt}$ bzw. $\int dt$	$u_R = R \cdot i_R$	$u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$	$i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$
Frequenzb.	$j\omega$ bzw. $\frac{1}{j\omega}$	$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$	$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L$	$\underline{I}_C = j\omega C \cdot \underline{U}_C$
Impedanz	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$
Wirkanteil	$R = \text{Re}\{\underline{Z}\}$	$R = \frac{U}{I}$	0	0
Blindanteil	$X = \text{Im}\{\underline{Z}\}$	0	$X_L = \omega L$	$X_C = -\frac{1}{\omega C}$

Wiederholung

Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Definition Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang

Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters

Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters

Vergleich passive Filter 1. Ordnung mit L und R

Beispiel Filterschaltung: Aufgabe

Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

Ortskurven

Gliederung - Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang II

Resonanzkreise

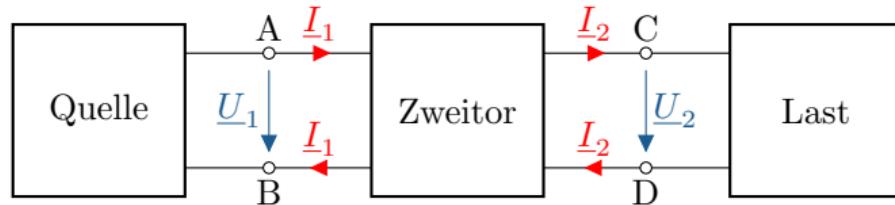


Lernziele: Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

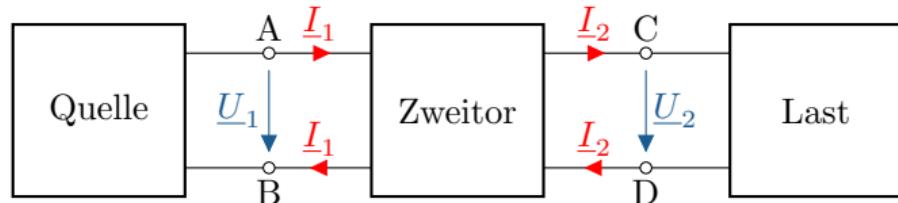
Studierende lernen:

- ▶ Frequenzgänge anhand der Schaltungstopologie algebraisch zu bestimmen
- ▶ die Funktionsweise einfacher Hoch- und Tiefpassfiltern zu verstehen
- ▶ das Grenzverhalten von Vierpolen anhand ihrer Frequenzgänge zu analysieren

Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze

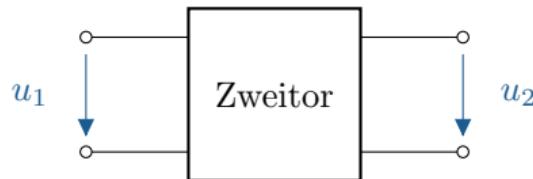


Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze



Wie sieht das Übertragungsverhalten aus?

Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitor)



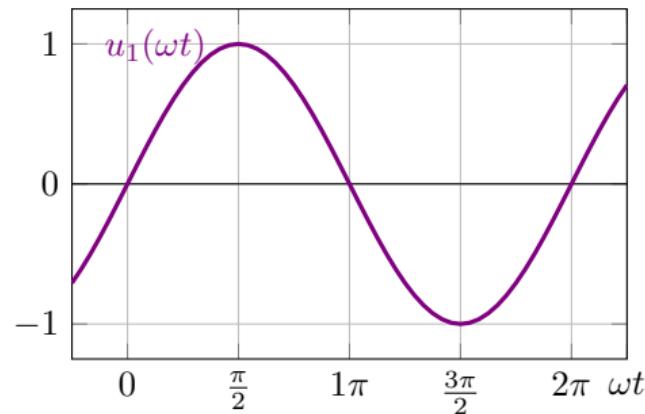
Linear und zeitinvariant (LZI):

Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)

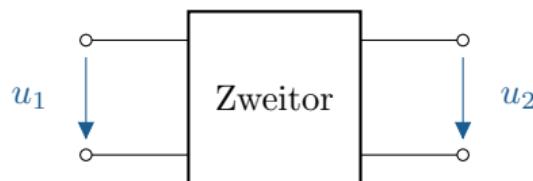


Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$

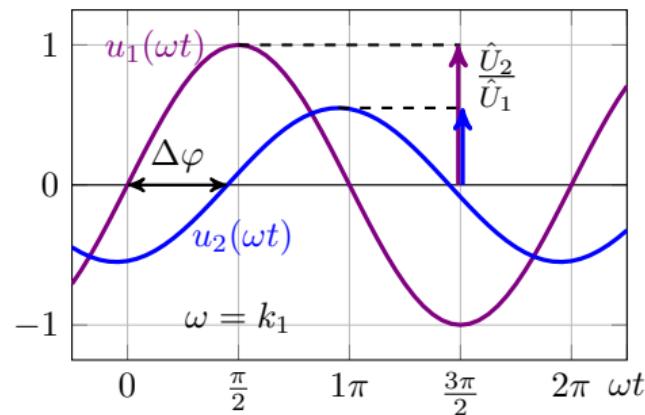


Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)

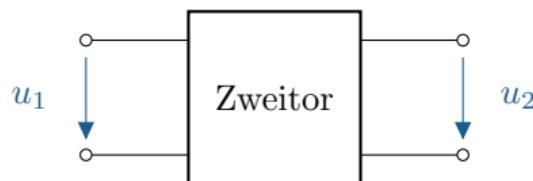


Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$

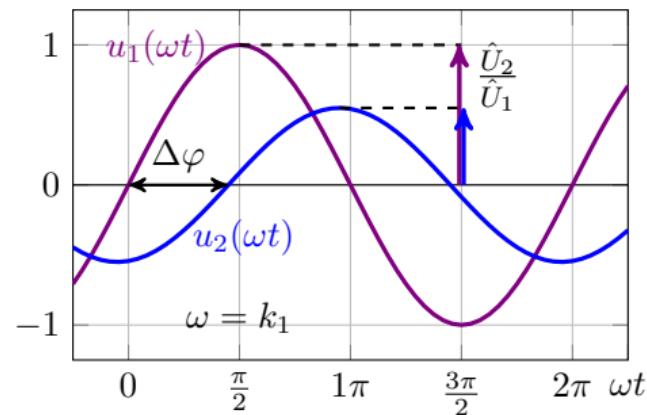


Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitor)

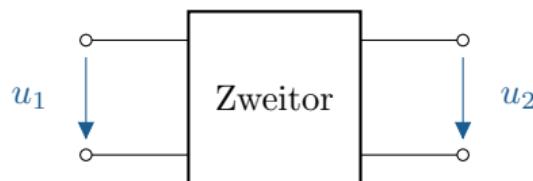


Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

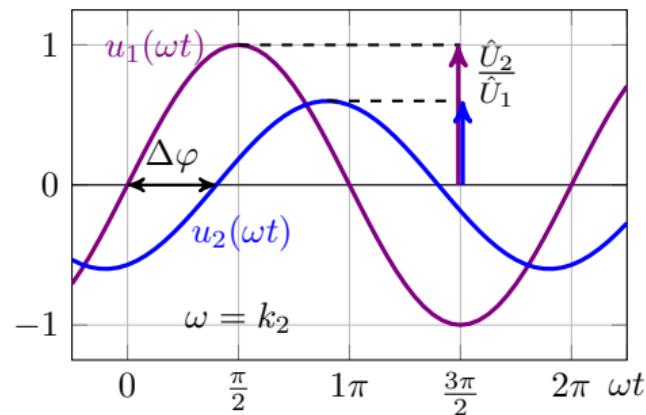


Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)

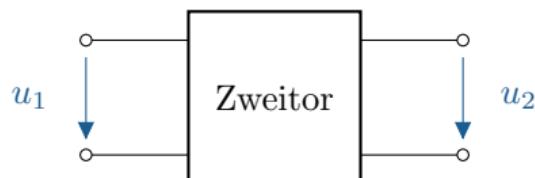


Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

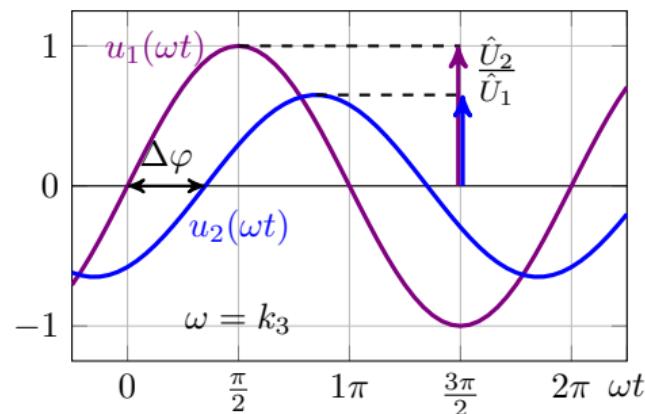


Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)

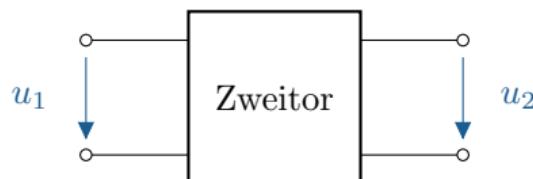


Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

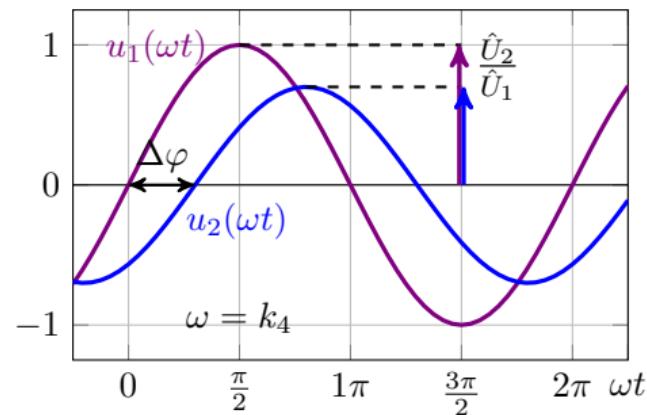


Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)



Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

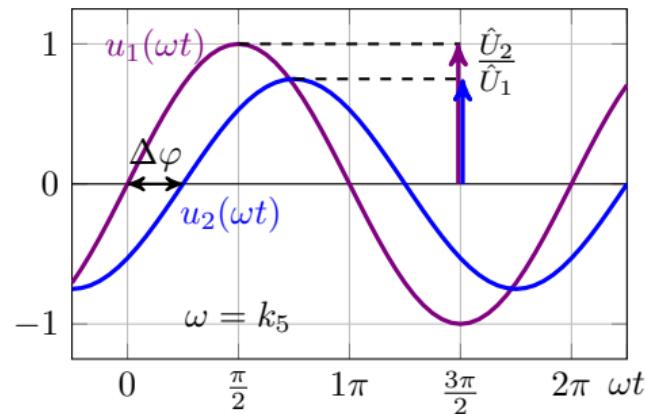


Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)

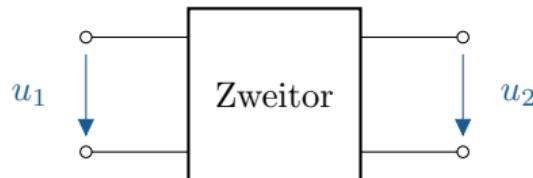


Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

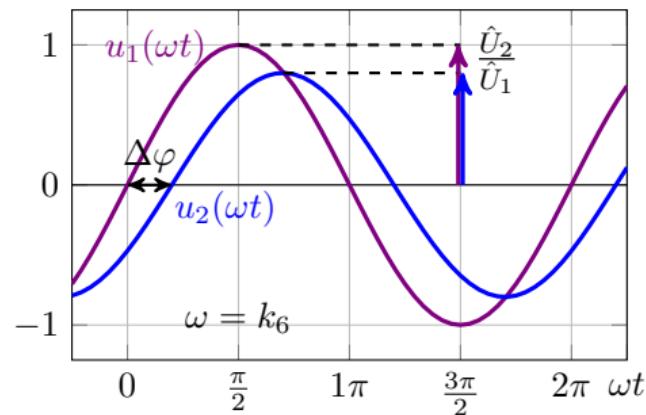


Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitore)

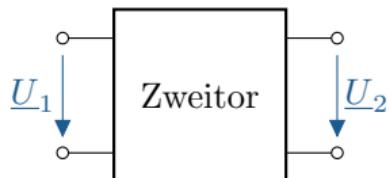


Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$

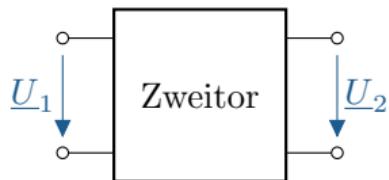


Zweitor (Vierpol):



Definition Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang

Zweitor (Vierpol):



Linear, zeitinvariant (LZI):

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

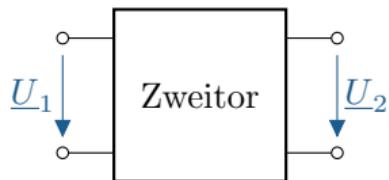
$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$

Definition Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang

Zweitor (Vierpol):



Frequenzgang:

$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = A(\omega) \cdot e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

Linear, zeitinvariant (LZI):

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

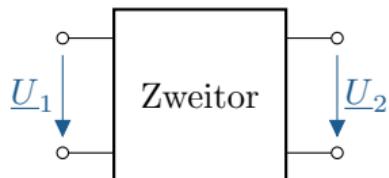
$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$

Definition Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang

Zweitor (Vierpol):



Frequenzgang:

$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = A(\omega) \cdot e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

Amplitudengang:

$$A(\omega) = |\underline{F}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|}$$
$$= \sqrt{(\mathrm{Re}\{\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\})^2 + (\mathrm{Im}\{\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\})^2}$$

Linear, zeitinvariant (LZI):

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

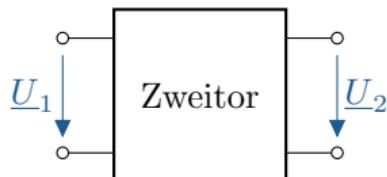
$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$

Definition Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang

Zweitor (Vierpol):



Frequenzgang:

$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = A(\omega) \cdot e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

Amplitudengang:

$$A(\omega) = |\underline{F}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|}$$
$$= \sqrt{(\mathrm{Re}\{\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\})^2 + (\mathrm{Im}\{\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\})^2}$$

Linear, zeitinvariant (LZI):

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

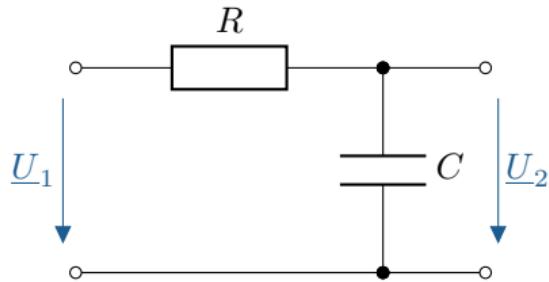
Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$

Phasengang:

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \angle \underline{U}_2 - \angle \underline{U}_1$$
$$= \arctan \left(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\}}{\mathrm{Re}\{\underline{F}(\mathrm{j}\omega)\}} \right)$$

Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters

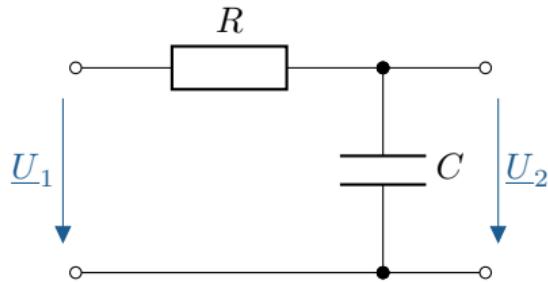


RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



Frequenzgang:

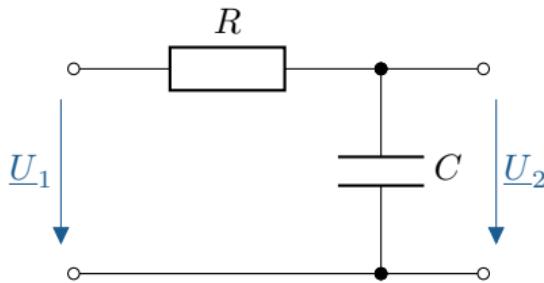
$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned}$$

RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



Frequenzgang:

$$\underline{F}(\text{j}\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{\text{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\text{j}\omega C}} = \frac{1}{\text{j}\omega CR + 1}$$
$$= \frac{1}{1 + \text{j}\omega CR} = \frac{1 - \text{j}\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}$$

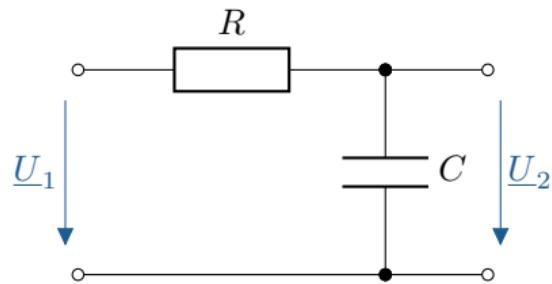
RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$
$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Amplituden- und Phasengang:

$$A(\omega) = |\underline{F}(\text{j}\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$
$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}} \right) = \arctan(-\omega CR)$$

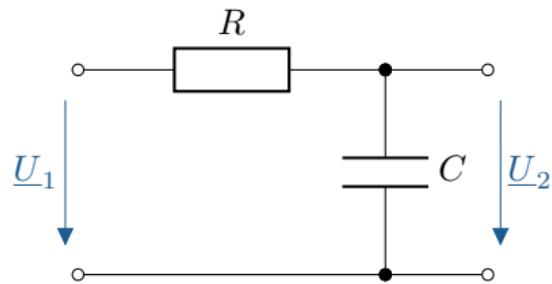
Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



Grenzverhalten: für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$

$$F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



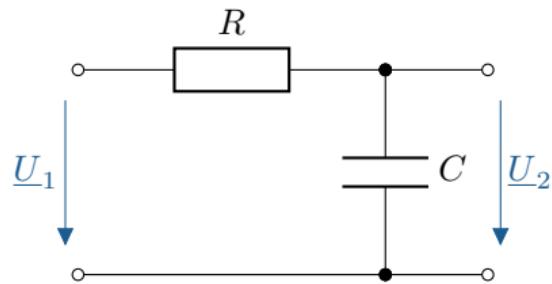
Grenzverhalten: für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$

$$F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



Grenzverhalten: für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$

$$F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

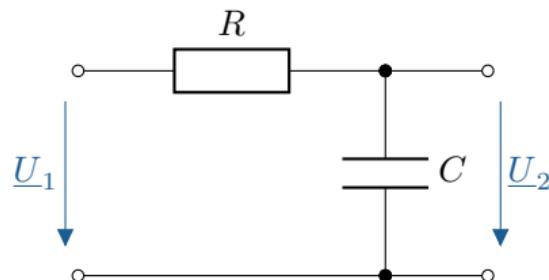
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



Grenzverhalten: für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$

$$F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

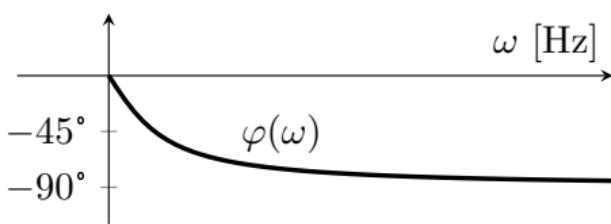
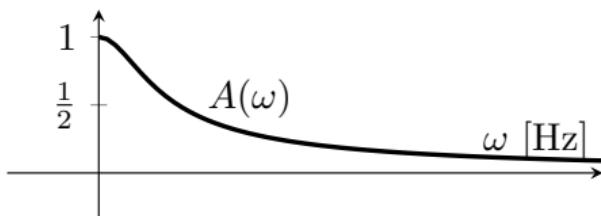
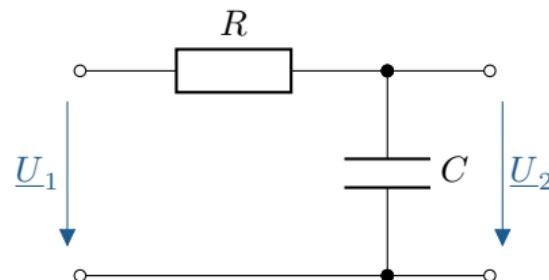
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



Grenzverhalten: für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$

$$F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

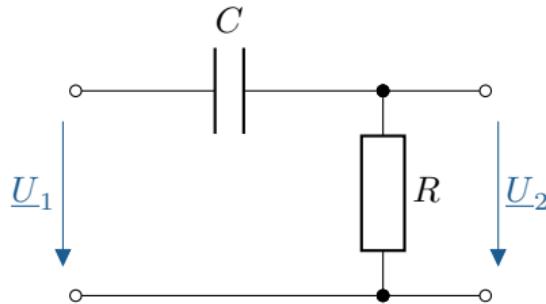
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters



RC-Hochpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$
$$\xrightarrow{LZI} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

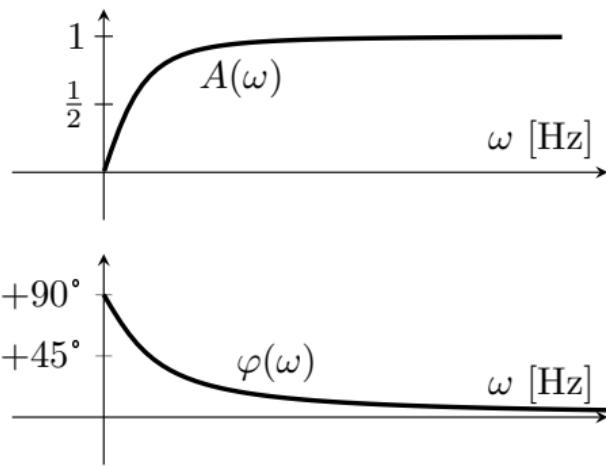
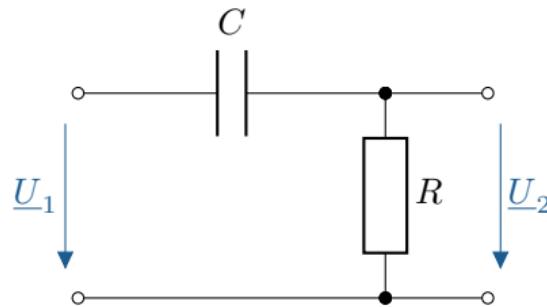
Frequenzgang:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} \\ &= \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega CR}} = \frac{1 + j \frac{1}{\omega CR}}{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}} \end{aligned}$$

Amplituden- und Phasengang:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |F(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}}} \\ \varphi(\omega) &= \arctan \left(\frac{\text{Im}\{F\}}{\text{Re}\{F\}} \right) = \arctan \left(\frac{1}{\omega CR} \right) \end{aligned}$$

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters



Grenzverhalten: für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$

$$F(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega CR}}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{\infty} = 0$$

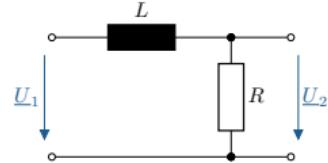
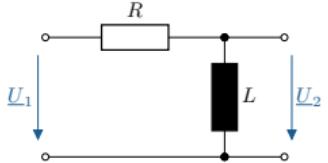
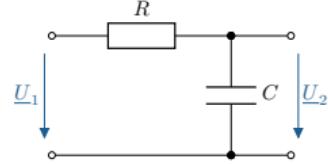
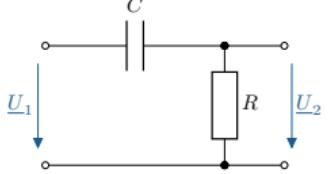
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

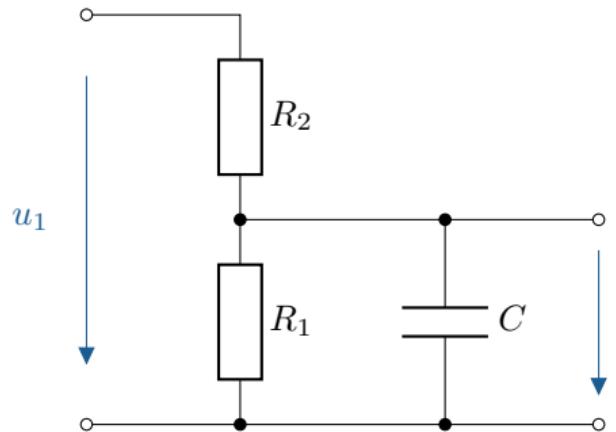
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(+\infty) = +90^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

Vergleich passive Filter 1. Ordnung mit L und R

	Tiefpass	$\underline{F}(\text{j}\omega)$	Hochpass	$\underline{F}(\text{j}\omega)$	ω_g
RL		$\frac{1}{1 + \text{j}\omega \frac{L}{R}}$		$\frac{1}{1 - \text{j}\frac{R}{\omega L}}$	$\frac{R}{L}$
RC		$\frac{1}{1 + \text{j}\omega RC}$		$\frac{1}{1 - \text{j}\frac{1}{\omega RC}}$	$\frac{1}{RC}$

Beispiel Filterschaltung: Aufgabe



Aufgabe:

a) Leiten Sie $\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ allgemein her.

b) Zeichnen Sie Betrag und Phase von $\underline{F}(j\omega)$ für:

$$R_1 = 900 \Omega$$

$$R_2 = 100 \Omega$$

$$C = 1,25 \mu\text{F}$$

c) Bei welcher Frequenz f ist $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$? Welche Phasenverschiebung besitzt u_2 nun gegenüber u_1 ?

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\underline{U}_1 = \hat{U}_1$$

$$u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\underline{U}_2 = \hat{U}_2 \cdot e^{j\varphi}$$

Lösung a) Frequenzgang allgemein

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{R_1 || Z_C}{R_2 + (R_1 || Z_C)} = \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}} \quad \left| \cdot \frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} \right. \\ &= \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 \cdot R_2 + \frac{R_2}{j\omega C} + \frac{R_1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} \stackrel{\hat{=}}{=} \frac{a + jb}{c + jd} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ &= \frac{R_1(R_1 + R_2) - j\omega C R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} \quad (\text{kartesisch}) \quad \stackrel{\hat{=}}{=} \frac{a' + jb'}{c'} \quad a', b', c' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beispiel Filterschaltung: Aufgabe- Lösung II

$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{R_1}{\underbrace{R_1 + R_2 + \mathrm{j}\omega CR_1 R_2}_{\hat{=} \frac{a+jb}{c+jd}}} = \frac{R_1(R_1 + R_2) - \mathrm{j}\omega CR_1^2 R_2}{\underbrace{(R_1 + R_2)^2 + (\omega CR_1 R_2)^2}_{\hat{=} \frac{a'+jb'}{c'}}}$$

Betrag: $|A(\omega)| = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega CR_1 R_2)^2}}$ mit $|\underline{F}(\mathrm{j}\omega)| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

Phase: $\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{-\omega CR_1^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} \right)$ mit $\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{b'}{a'} \right)$
 $= \arctan \left(\frac{-\omega CR_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$

Altern.: $\varphi(\omega) = \arctan(0) - \arctan \left(\frac{\omega CR_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$ mit $\varphi(\omega) = \overbrace{\varphi_Z}^{\arctan(\frac{b}{a})} - \overbrace{\varphi_N}^{\arctan(\frac{d}{c})}$

Beispiel Filterschaltung: Aufgabe- Lösung III

Lösung b) Grenzverhalten und Skizze

$$A(\omega) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$$

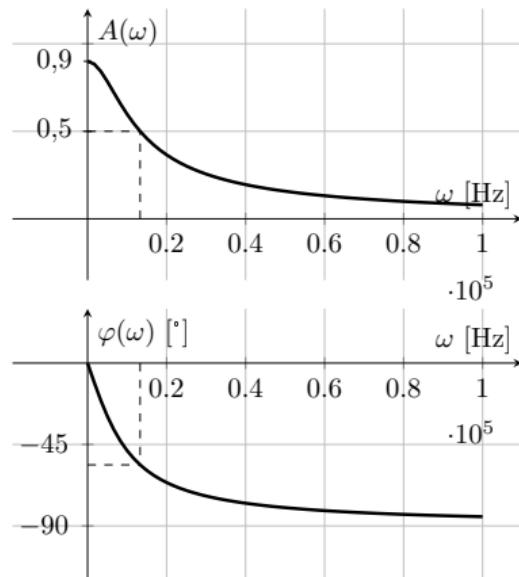
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{R_1}{R_1+R_2} = 0,9$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{R_1}{\infty} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega C R_1 R_2}{R_1+R_2}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$



Beispiel Filterschaltung: Aufgabe- Lösung IV

Lösung c) Bestimmten Arbeitspunkt ermitteln

Ges.: Frequenz f_1 bei der $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$ und Phasenverschiebung u_2 zu u_1 bei f_1 :

$$A(\omega_1) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \text{mit}$$

$$\Rightarrow \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}{R_1^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2$$

$$\Rightarrow (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2 - (R_1 + R_2)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \pm \frac{\sqrt{4R_1^2 - (R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2)}}{C R_1 R_2}$$

$$\omega_1 = 1,3304 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}}, f_1 = 2,117 \text{ kHz} \quad \text{mit}$$

$$\omega_1 < 0 \text{ unphysikalisch}, f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\varphi(\omega_1) = \arctan(-1,4967) = -56,25^\circ \quad \text{mit}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}} \right)$$

Wiederholung

Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

Logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen

Definition Dezibel

Grenzfrequenz einfacher Filterschaltungen

Tiefpass 1. Ordnung

Bandpass 2. Ordnung

Ordnung von Filtern, Beispielfilter höherer Ordnung

Ortskurven

Resonanzkreise



Lernziele: Logarithmische Darstellung, Frequenzgang

Studierende lernen:

- ▶ Unterschiede zwischen linearer und logarithmischer Darstellung kennen.
- ▶ Dezibel als Einheit kennen und zu verwenden.
- ▶ Grenzfrequenzen von Filterschaltungen kennen und zu bestimmen.
- ▶ Bodediagramme zu konstruieren und zu interpretieren.
- ▶ Funktionsweise von Bandpass- und Bandsperrfilter kennen und verstehen.
- ▶ Aufbau und Verhalten von Filtern höherer Ordnung kennen und verstehen.

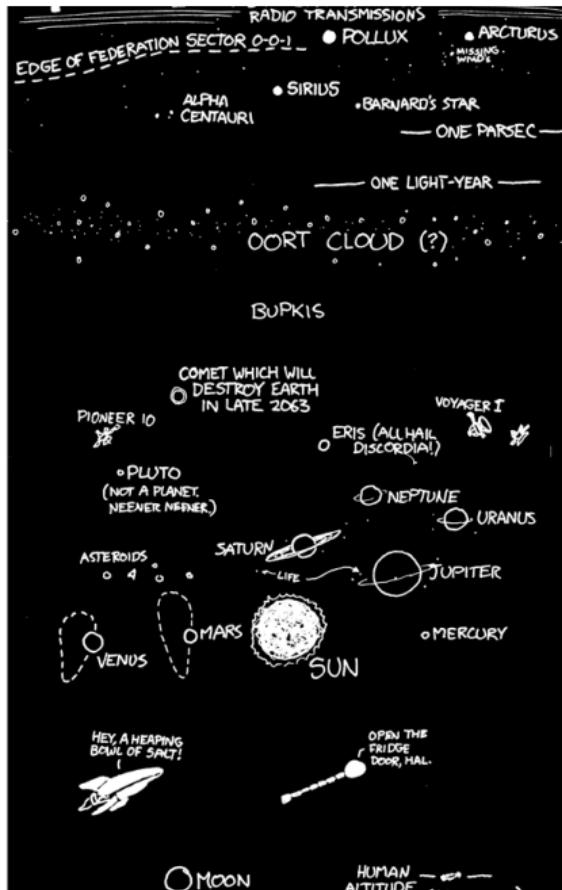
Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



Multipage Comic Strip (vertikal Scrollen)

Quelle: xkcd #482, Depth, <https://xkcd.com/485/> (Abruf: 04.04.2024)

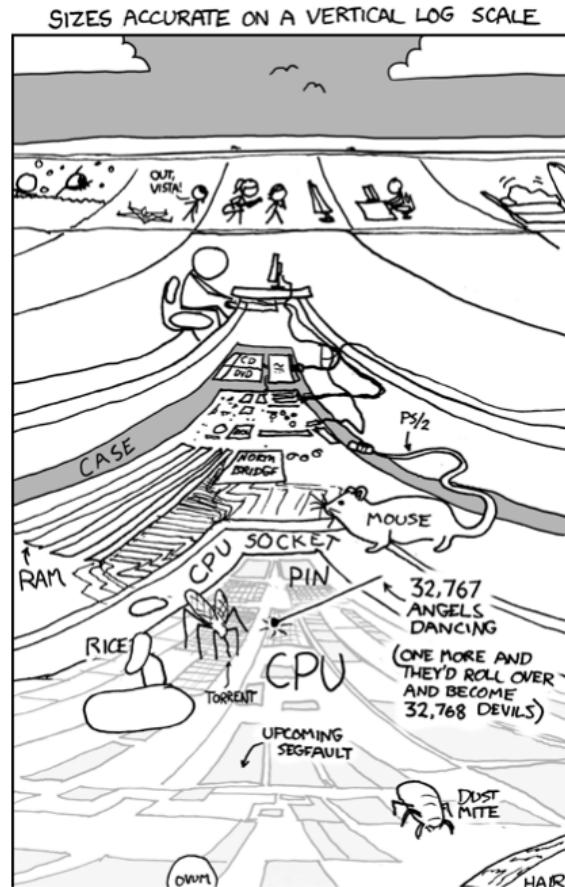
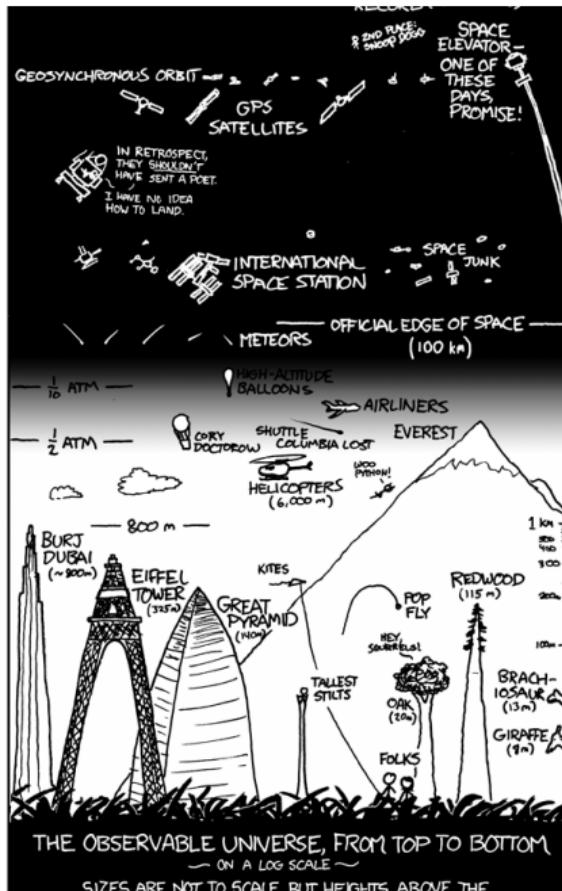
Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



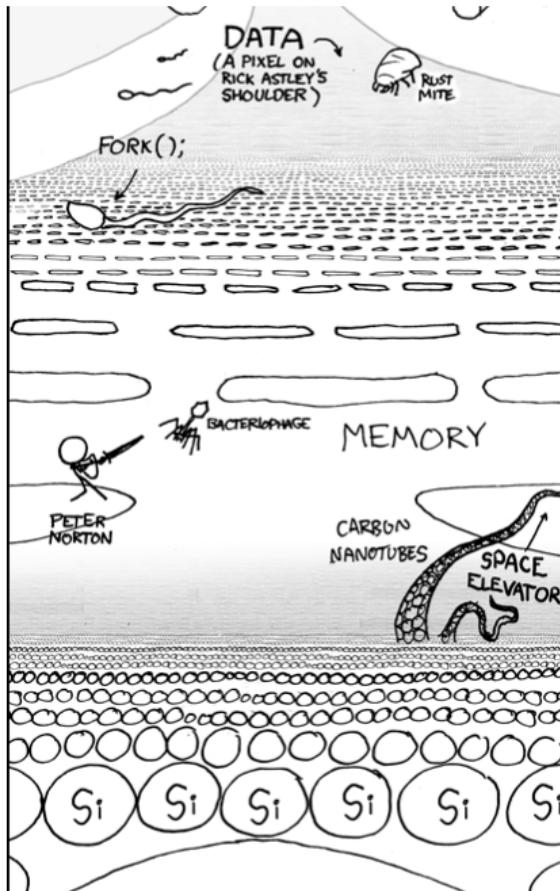
Multipage Comic Strip (vertikal Scrollen)

Quelle: xkcd #482, Depth, <https://xkcd.com/482/> (Abruf: 04.04.2024)

Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

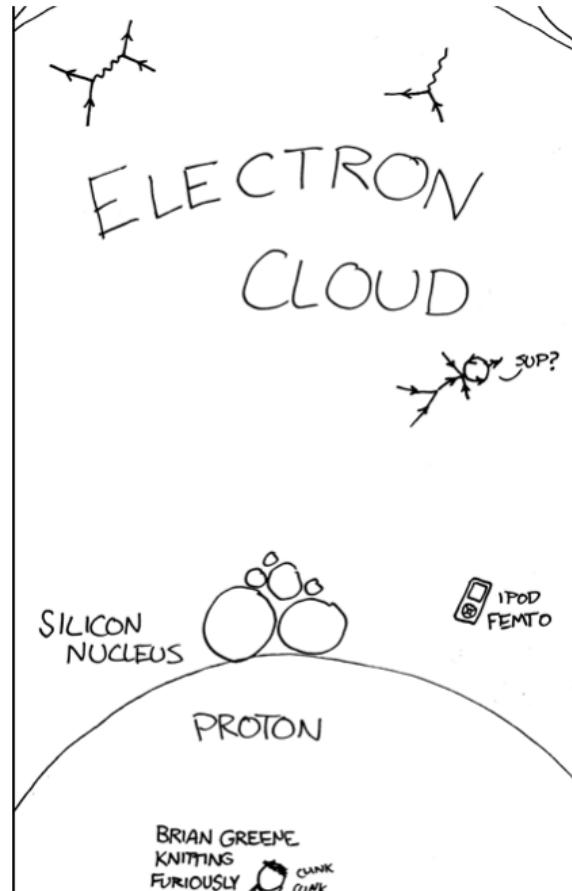


Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



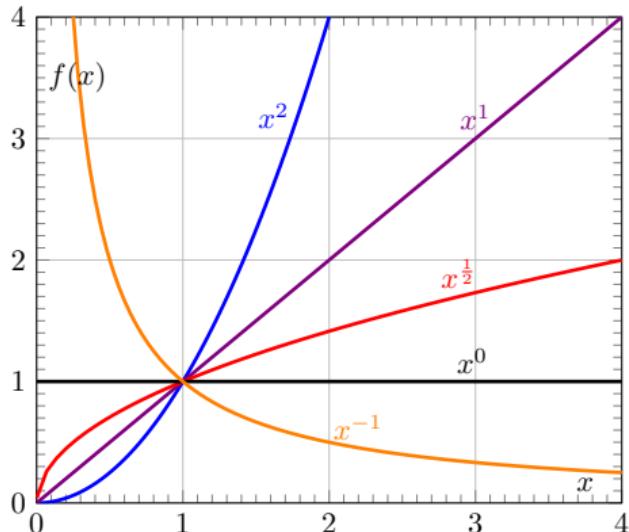
Quelle: xkcd #482, Height, <https://xkcd.com/482/> (Abruf: 04.04.2024)

Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



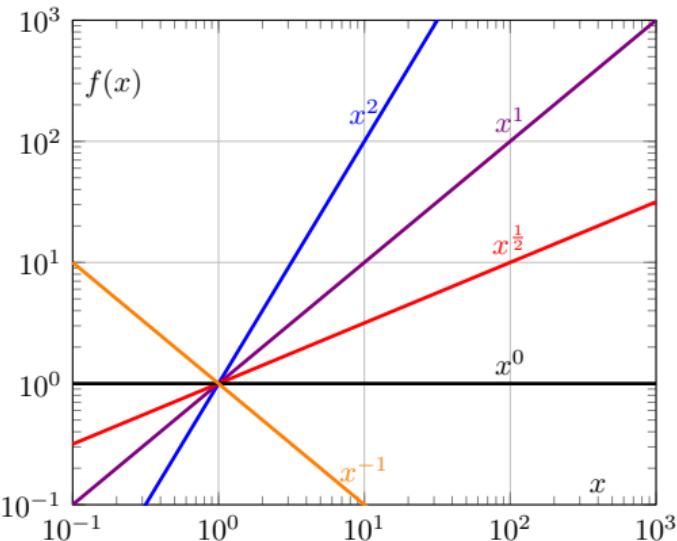
Quelle: xkcd #482, Height, <https://xkcd.com/482/> (Abruf: 04.04.2024)

Logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen



Lineare Darstellung

- Gerade: $f(x) = a(x - x_0) + y_0$
- Add./Subtr. → Verschiebung
- Mult./Div. → Streckung



(Doppelt-)Logarithmische Darstellung

- Gerade: $f(x) = (x/x_0)^a \cdot y_0$
- Mult./Div. → Verschiebung
- Exponent → Streckung

Definition Dezibel

Dezibel Hilfsmaßeinheit zur Kennzeichnung logarithmischer Verhältnisse zweier Größen.

Leistungsgrößen (z.B. P, W) $Q_{(P)} = \log \frac{P_2}{P_1} \quad B = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2} \text{ dB}$

Leistungswurzelgr.(z.B. U, I) $Q_{(F)} = \log \frac{U_2}{U_1} \quad B = 20 \cdot \log \frac{U_1}{U_2} \text{ dB}$

Typische Dezibelwerte (Verstärkung in dB) bei Spannungsverhältnissen

$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{10}$	10	20	100
Q_{dB}	-3 dB	0 dB	+3 dB	+6 dB	10 dB	20 dB	26 dB	40 dB

Grenzfrequenz einfacher Filterschaltungen

Grenzfrequenz: f_g (, ω_g)

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Grenzfrequenz einfacher Filterschaltungen

Grenzfrequenz: f_g (, ω_g)

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bereiche:

Durchlassbereich: $A(\omega) > 1/\sqrt{2}$

Grenzfrequenz: $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$

Sperrbereich: $A(\omega) < 1/\sqrt{2}$

Grenzfrequenz: f_g (, ω_g)

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bereiche:

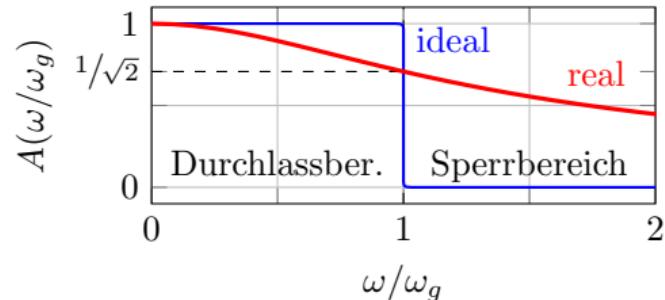
Durchlassbereich: $A(\omega) > 1/\sqrt{2}$

Grenzfrequenz: $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$

Sperrbereich: $A(\omega) < 1/\sqrt{2}$

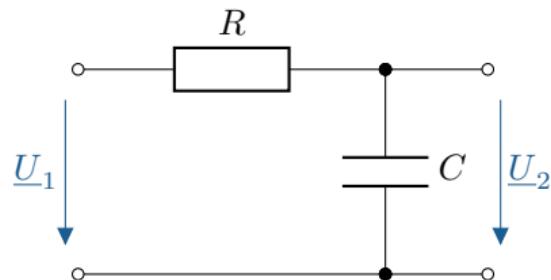
Beispiel: Tiefpass erster Ordnung

$$A(\omega/\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad \text{mit } \omega_g = \frac{1}{CR}$$



Tiefpass 1. Ordnung

Logarithmische Darstellung



RC-Tiefpass 1. Ordnung

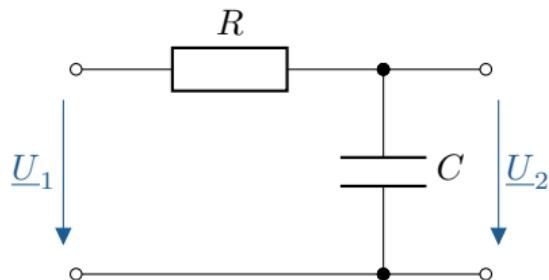
$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

Tiefpass 1. Ordnung

Logarithmische Darstellung



RC-Tiefpass 1. Ordnung

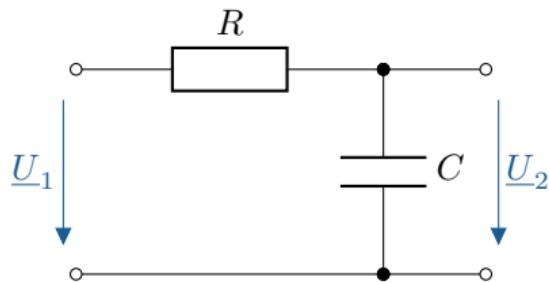
$$\underline{F}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

Tiefpass 1. Ordnung

Logarithmische Darstellung



RC-Tiefpass 1. Ordnung

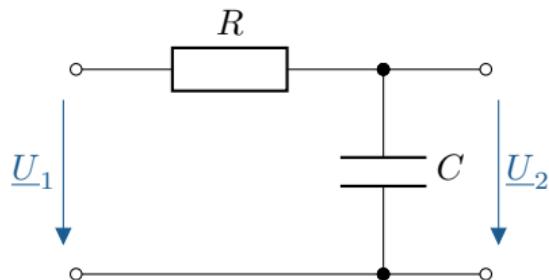
$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

Tiefpass 1. Ordnung

Logarithmische Darstellung



RC-Tiefpass 1. Ordnung

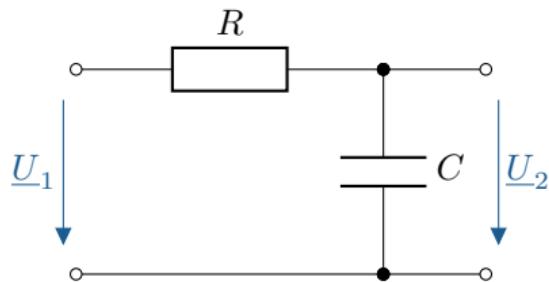
$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

Tiefpass 1. Ordnung

Logarithmische Darstellung



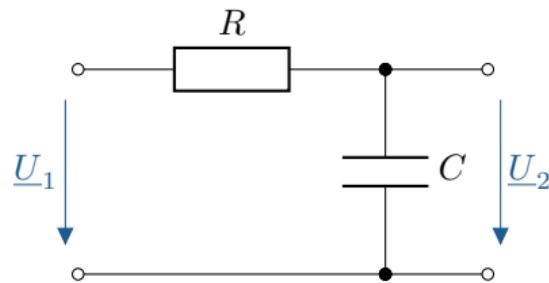
RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

Tiefpass 1. Ordnung



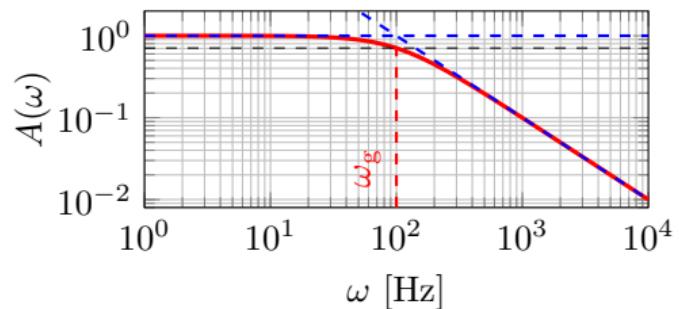
RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

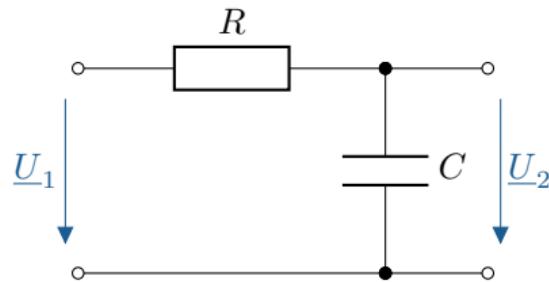
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

Logarithmische Darstellung



Tiefpass 1. Ordnung



RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g}$$

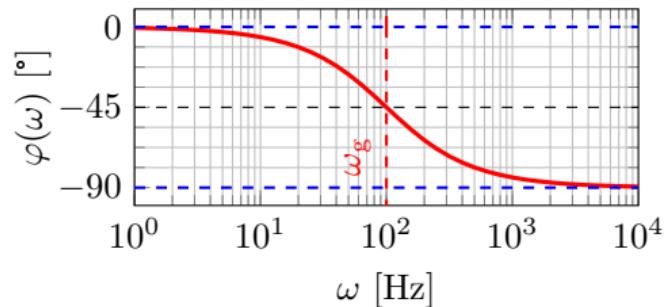
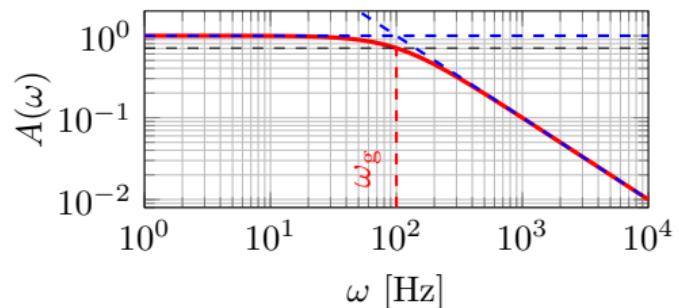
$$\omega_g = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}}$$

$$A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

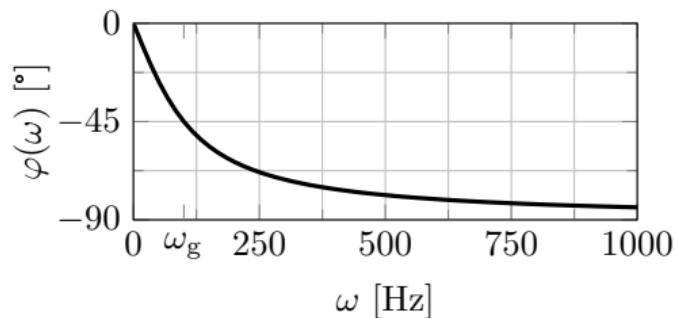
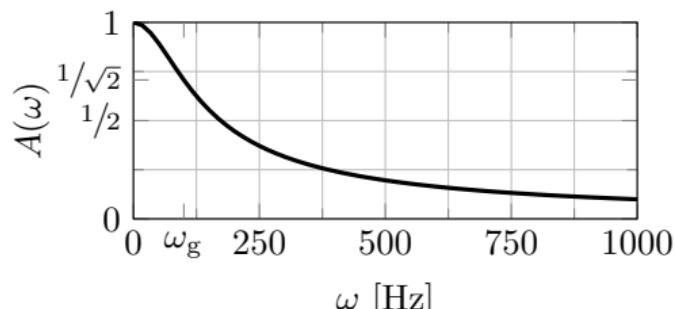
$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

Logarithmische Darstellung

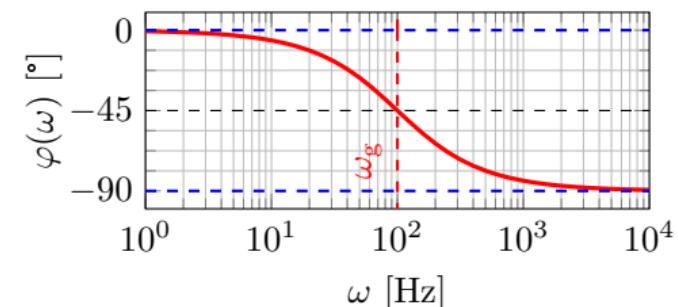
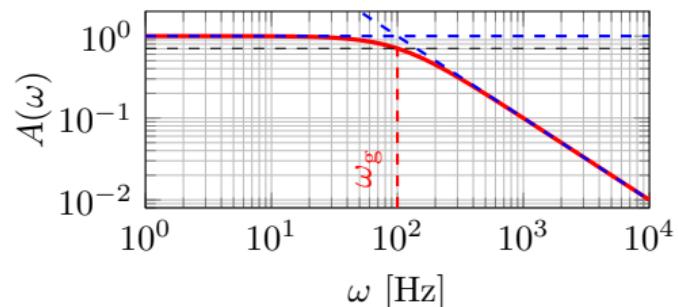


Vergleich lineare und logarithmische Darstellung

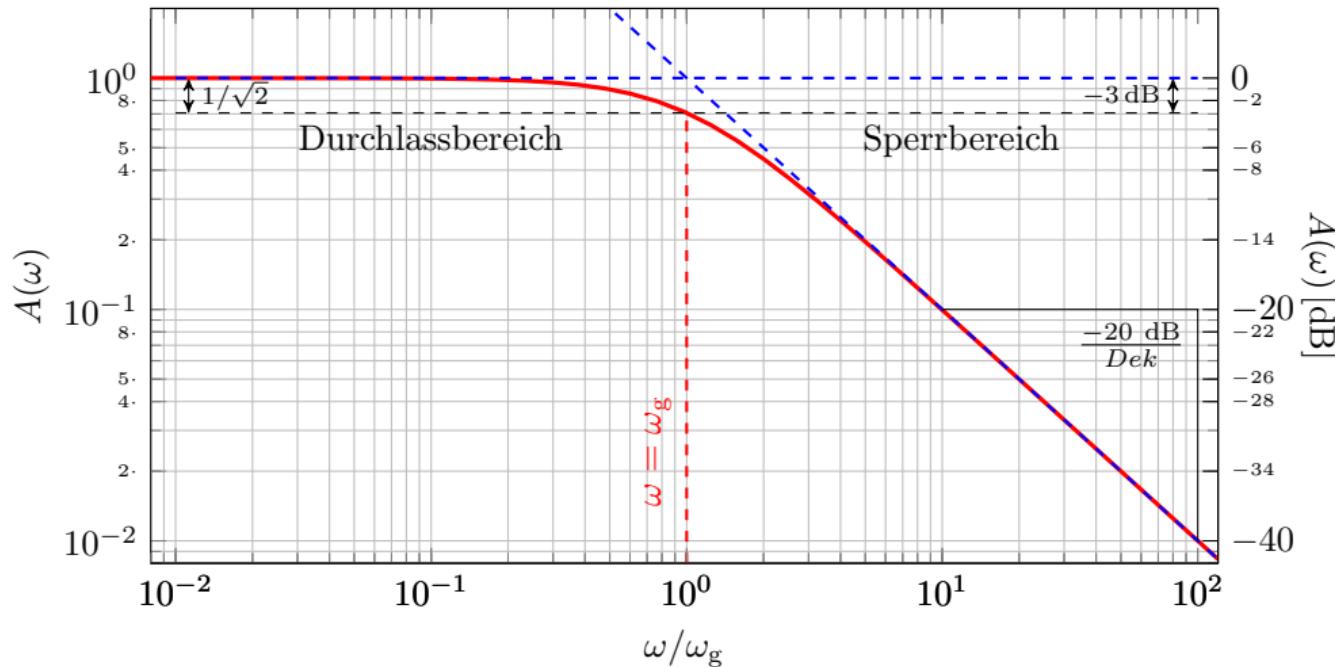
Lineare Darstellung



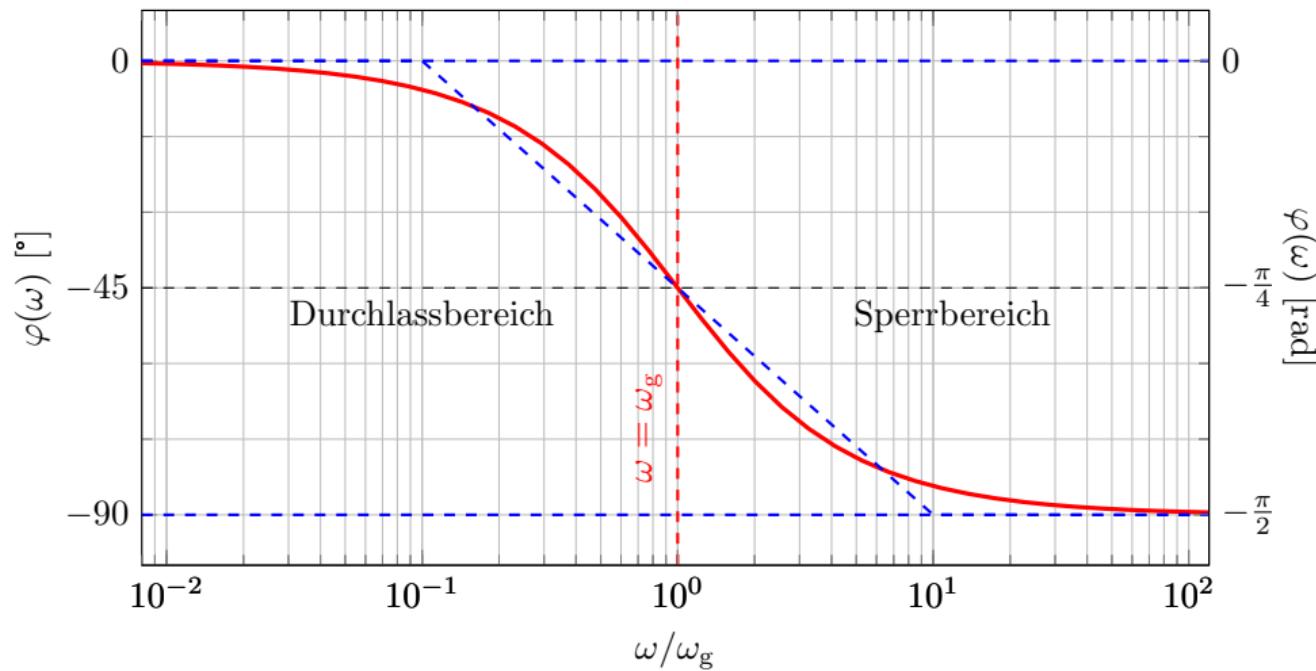
Logarithmische Darstellung



Tiefpass 1. Ordnung, Amplitudengang

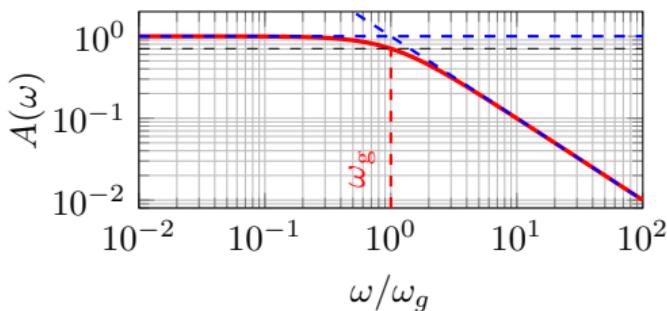


Tiefpass 1. Ordnung, Phasengang

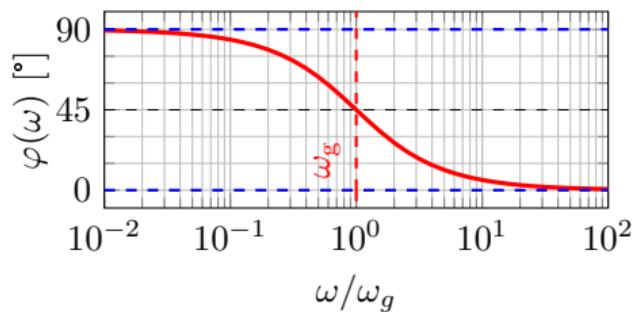
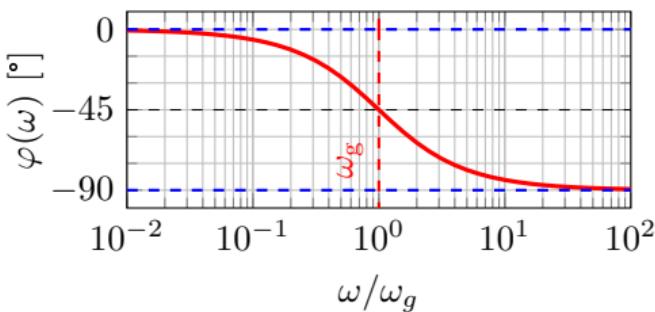
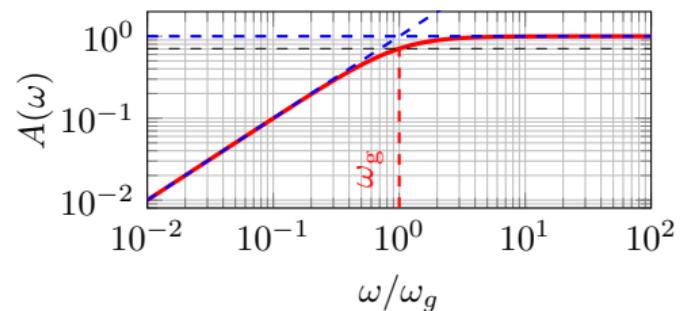


Vergleich Tief- und Hochpass 1. Ordnung

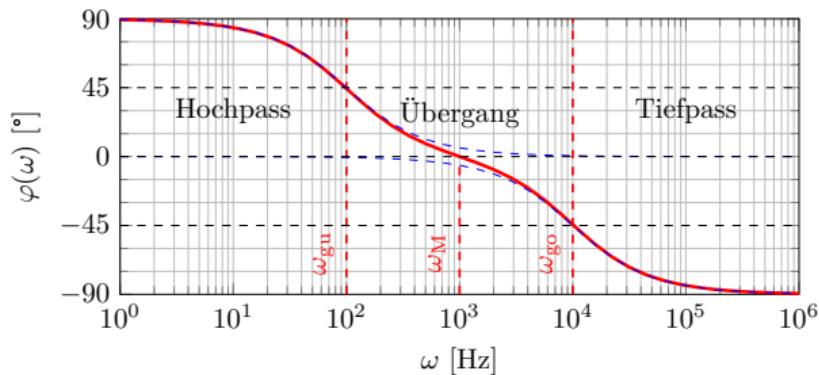
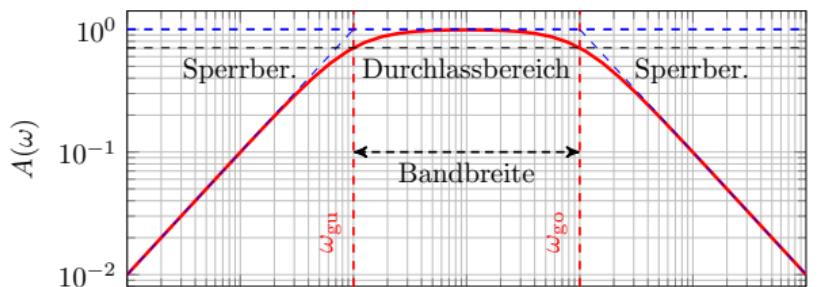
Tiefpass



Hochpass

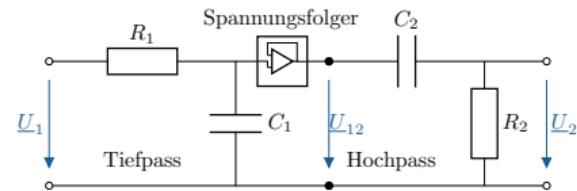


Bandpass 2. Ordnung



$$\text{Frequenzgang}^1: \underline{F}_{BP}(j\omega) = \underline{F}_{TP}(j\omega) \cdot \underline{F}_{TP}(j\omega)$$

¹Bei rückwirkungsfreier Serienschaltung aus Multiplikation der Einzelfrequenzgänge



Grenzfrequenz: (obere, untere)

$$f_{go}, f_{gu}$$

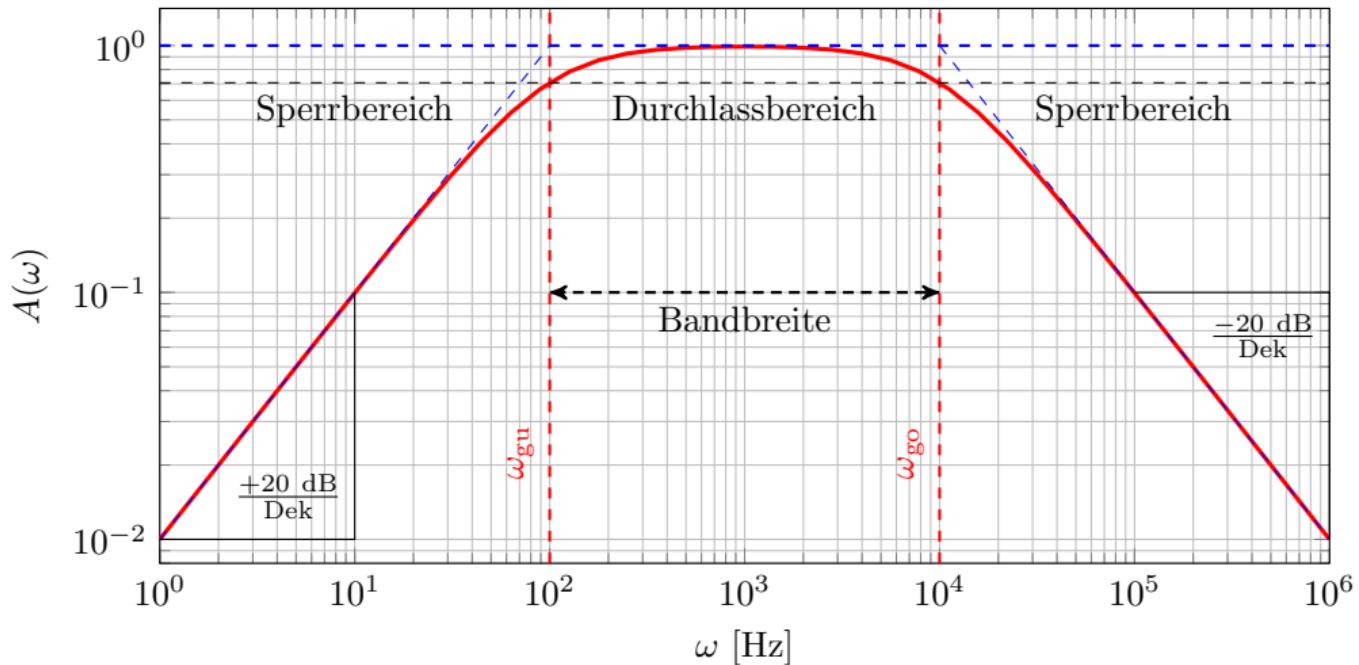
Bandbreite:

$$B = \Delta f = f_{go} - f_{gu}$$

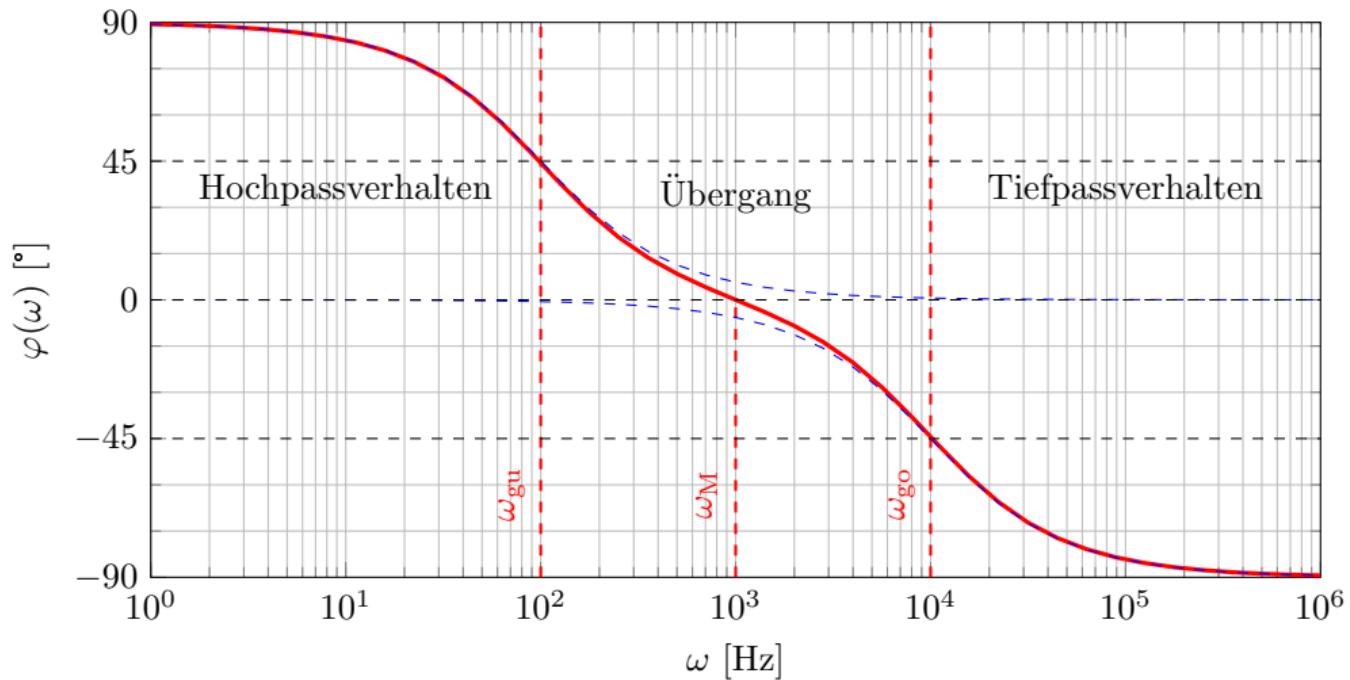
Mittenfrequenz:

$$f_m = \sqrt{f_{go} \cdot f_{gu}}$$

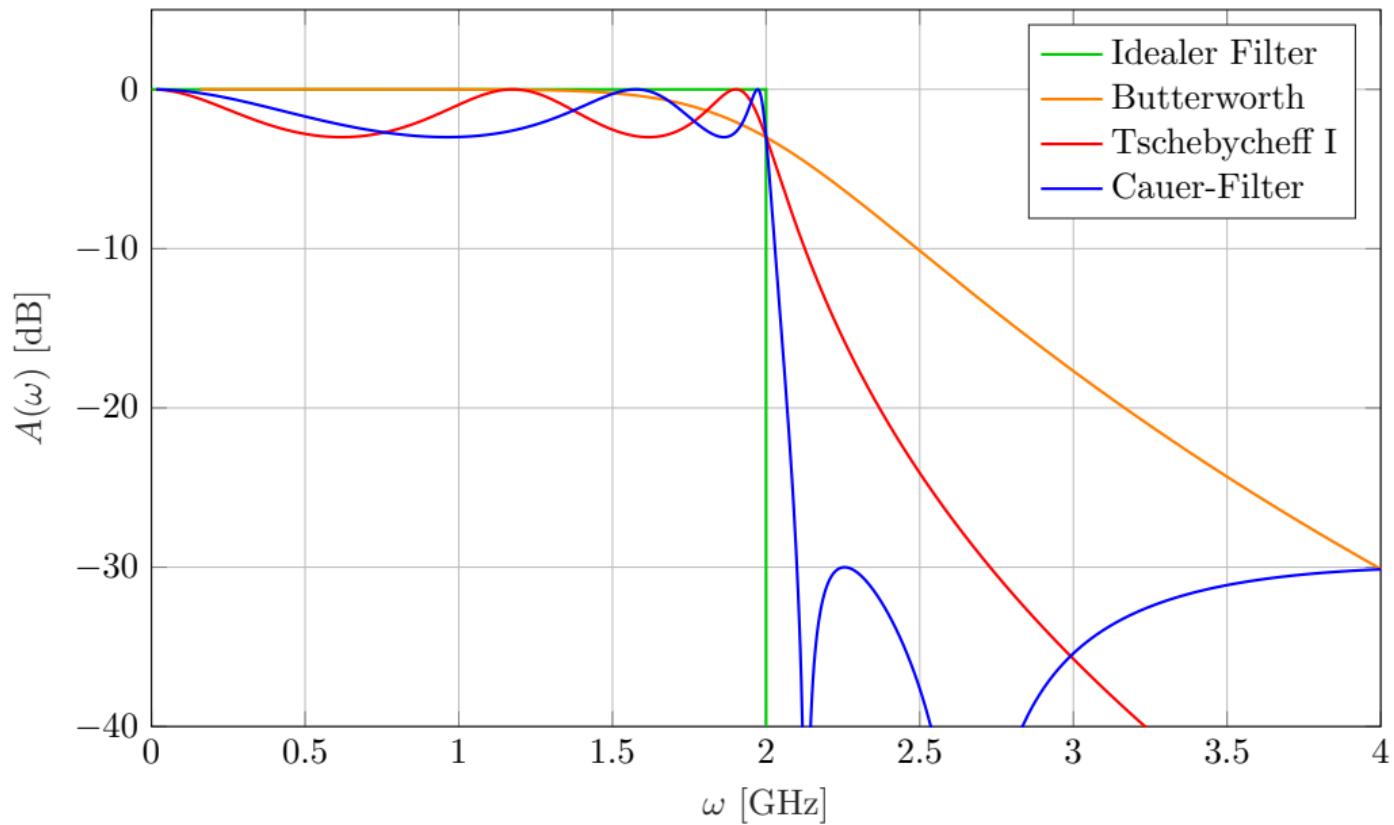
Bandpass 2. Ordnung - Amplitudengang, Detail



Bandpass 2. Ordnung - Phasengang, Detail



Ordnung von Filtern, Beispielfilter höherer Ordnung



Gliederung - Ortskurven I

Wiederholung

Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

Ortskurven

Definition Ortskurve

Zusammenhang Zeigerdiagramm und Ortskurve

Impedanzortskurve - RL-Glied , R variabel

Impedanzortskurve - RLs-Glied, ω variabel

Admittanzortskurve - Inversion von Ortskurven

Ortskurven von Grundschaltungen

Resonanzkreise



Lernziele: Ortskurven

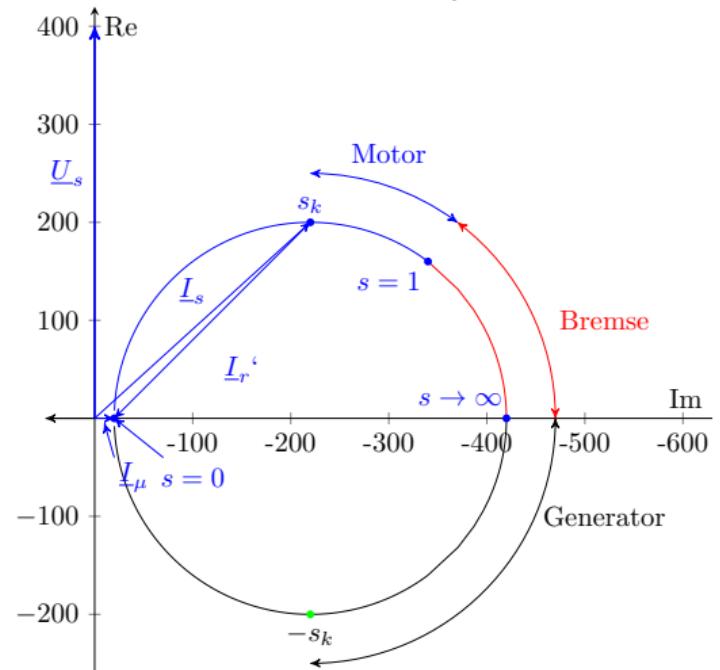
Studierende lernen:

- ▶ Ortskurven kennen und mögliche Anwendungsbereiche kennen.
- ▶ Ortskurven prinzipiell zu konstruieren und zu interpretieren.
- ▶ Impedanz- und Admittanzortskurven von Grundschaltungen kennen.

Def. Ortskurve: Darstellung eines komplexen Zeigers $\underline{z}(p) = \operatorname{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{z}(p)\}$ in komplexer Ebene in Abhangigkeit eines realen Parameter p .

Definition Ortskurve

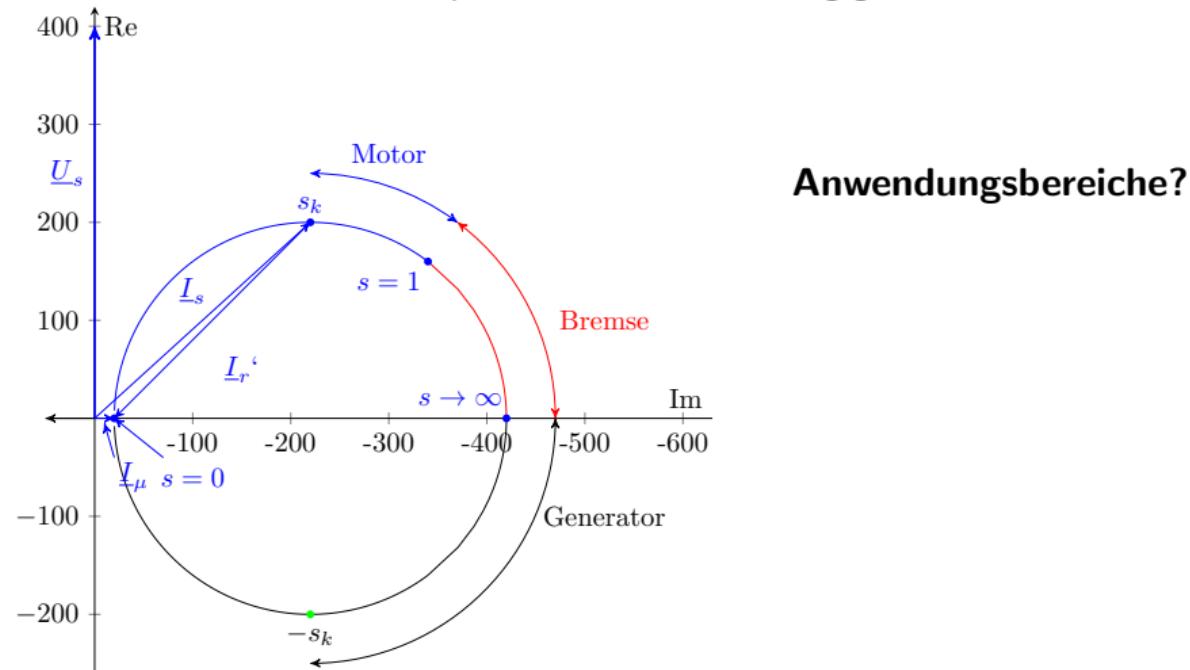
Def. Ortskurve: Darstellung eines komplexen Zeigers $\underline{z}(p) = \operatorname{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{z}(p)\}$ in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter p .



Beispiel: Stromortskurve einer Asynchronmaschine für $\underline{I}_s(s)$

Definition Ortskurve

Def. Ortskurve: Darstellung eines komplexen Zeigers $\underline{z}(p) = \operatorname{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{z}(p)\}$ in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter p .

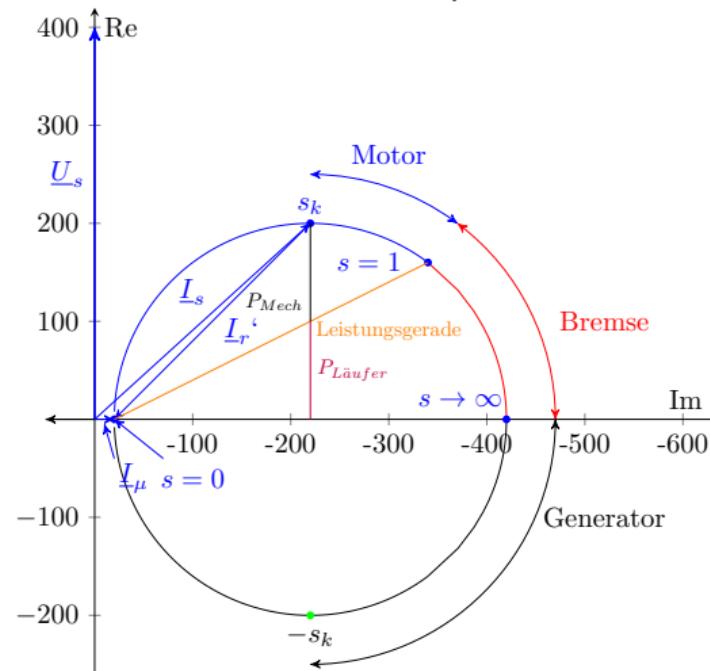


Anwendungsbereiche?

Beispiel: Stromortskurve einer Asynchronmaschine für $\underline{I}_s(s)$

Definition Ortskurve

Def. Ortskurve: Darstellung eines komplexen Zeigers $\underline{z}(p) = \operatorname{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{z}(p)\}$ in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter p .



Anwendungsbereiche?

Visualisierung von:

- Systemzuständen
- Systemgrößen
- Einfluss von Systemgrößen

Beispiel: Stromortskurve einer Asynchronmaschine für $I_s(s)$

Zusammenhang Zeigerdiagramm und Ortskurve

Zeigerdiagramm:

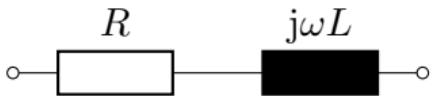
Zeigt Größe in komplexer Ebene als Zeiger (eines Punktes).



Merke: Ortskurve

Zeigt Größe in komplexer Ebene parameterabhängig als Kurve (Punkteschar).

Impedanzortskurve - RL-Glied , R variabel

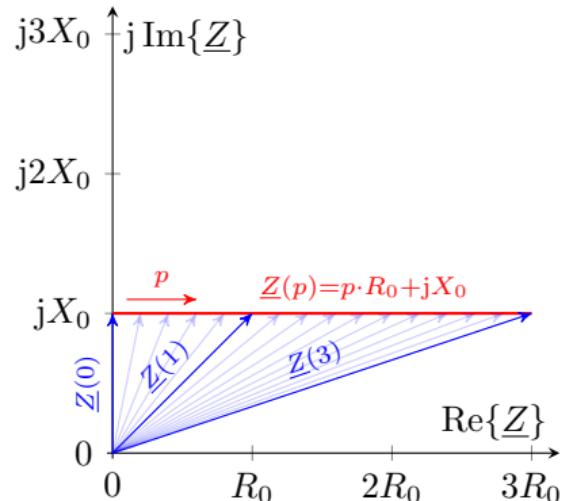


$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

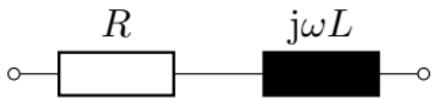
$$\underline{Z} = p \cdot R_0 + jX_0$$

mit $p \in [0,3]$

$R_0, X_0 = \text{konst.}$



Impedanzortskurve - RLs-Glied, ω variabel

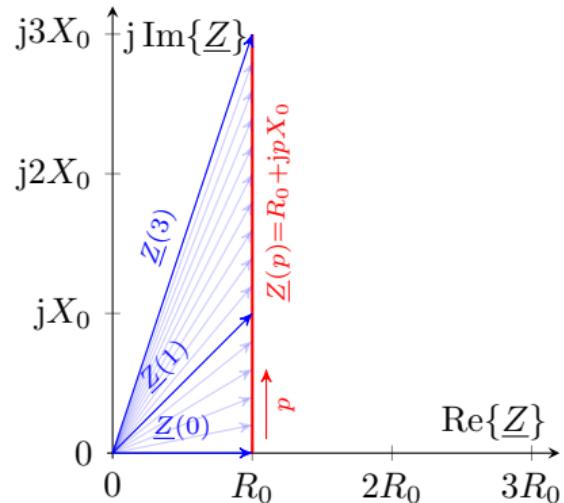


$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

$$\underline{Z} = R_0 + jp\omega_0 L_0$$

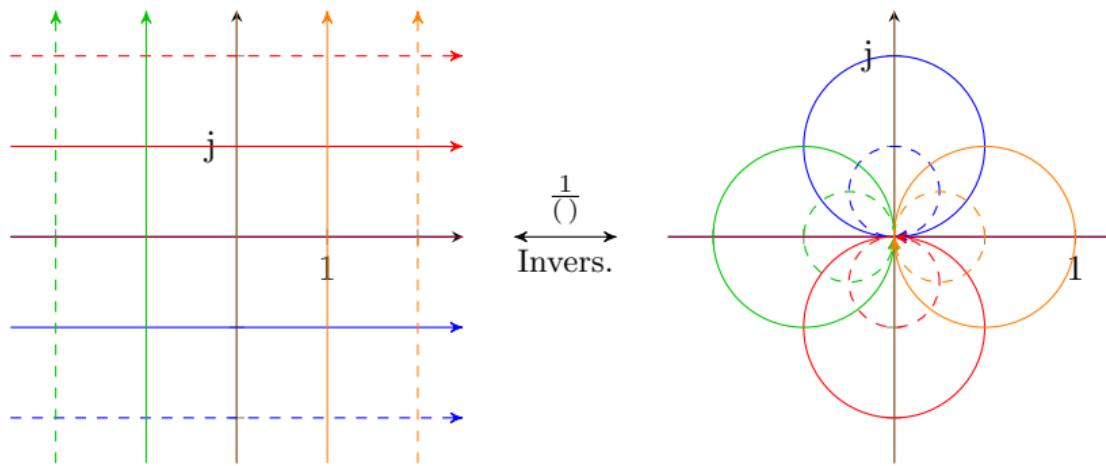
mit $p \in [0,3]$

$R_0, X_0 = \text{konst.}$



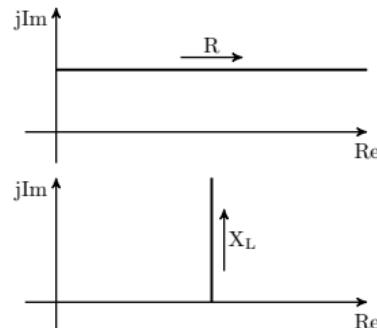
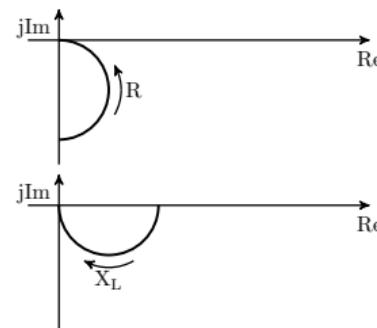
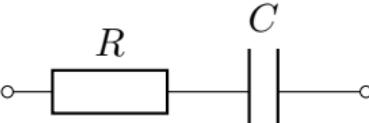
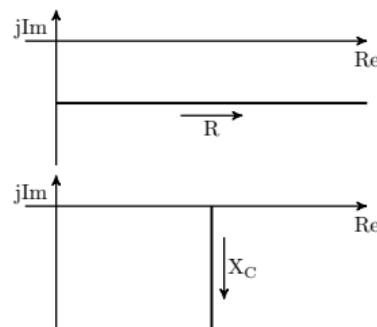
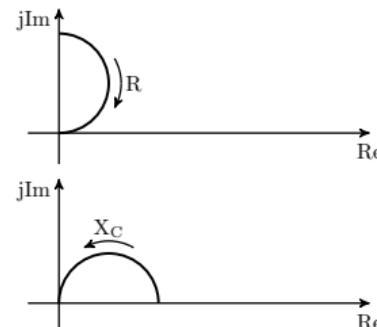
Admittanzortskurve - Inversion von Ortskurven

ursprüngliche Ortskurve	invertierte Ortskurve
Gerade durch den Ursprung	Gerade durch den Ursprung
Gerade nicht durch den Ursprung	Kreis durch den Ursprung
Kreis durch den Ursprung	Gerade nicht durch den Ursprung
Kreis nicht durch den Ursprung	Kreis nicht durch den Ursprung

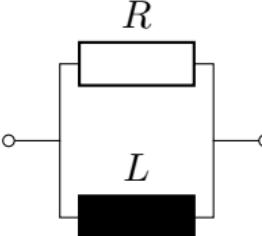
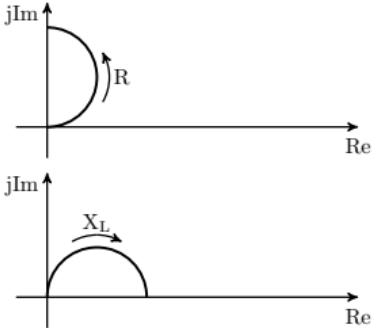
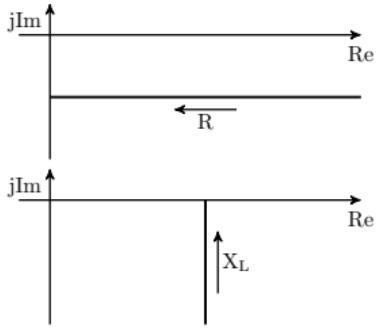
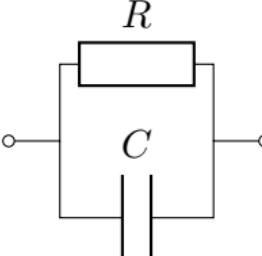
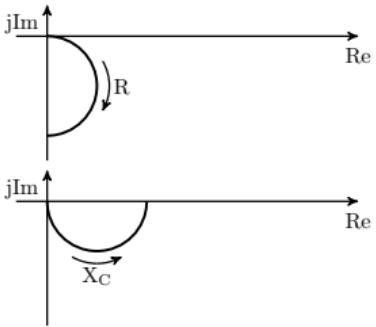
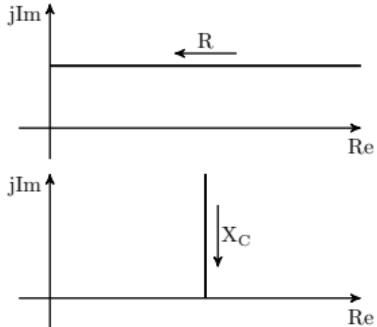


¹Angelehnt an MoebiusInversion.svg von Chrislb, CC-BY-SA-2.0-DE, 2005,
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MoebiusInversion.svg>

Ortskurven von Grundschatungen - in Reihe

Grundschaltung	<u>Z</u> -Ortskurve	<u>Y</u> -Ortskurve
	 <p><u>Z</u>-Ortskurve: The horizontal axis is labeled Re and the vertical axis is labeled $j\text{Im}$. A horizontal line segment is shown on the Re-axis with an arrow pointing to the right, labeled R. A vertical line segment is shown on the $j\text{Im}$-axis with an arrow pointing upwards, labeled X_L.</p>	 <p><u>Y</u>-Ortskurve: The horizontal axis is labeled Re and the vertical axis is labeled $j\text{Im}$. A semicircular arc is drawn in the upper half-plane, centered at the origin, with an arrow indicating a clockwise direction. The radius is labeled R. The vertical axis is labeled X_L.</p>
	 <p><u>Z</u>-Ortskurve: The horizontal axis is labeled Re and the vertical axis is labeled $j\text{Im}$. A horizontal line segment is shown on the Re-axis with an arrow pointing to the right, labeled R. A vertical line segment is shown on the $j\text{Im}$-axis with an arrow pointing downwards, labeled X_C.</p>	 <p><u>Y</u>-Ortskurve: The horizontal axis is labeled Re and the vertical axis is labeled $j\text{Im}$. A semicircular arc is drawn in the lower half-plane, centered at the origin, with an arrow indicating a clockwise direction. The radius is labeled R. The vertical axis is labeled X_C.</p>

Ortskurven von Grundschatungen - in Parallel

Grundschaltung	Z-Ortskurve	Y-Ortskurve
 A parallel circuit consisting of a resistor R and an inductor L connected in parallel between two terminals.	 Two plots of the Z-plane. The top plot shows a right-half plane semi-circle arc starting from the origin and going clockwise, labeled R . The bottom plot shows a left-half plane semi-circle arc ending at the origin, labeled X_L .	 Two plots of the Y-plane. The top plot shows a horizontal line segment in the right-half plane, labeled R . The bottom plot shows a vertical line segment in the left-half plane, labeled X_L .
 A parallel circuit consisting of a resistor R and a capacitor C connected in parallel between two terminals.	 Two plots of the Z-plane. The top plot shows a right-half plane semi-circle arc starting from the origin and going clockwise, labeled R . The bottom plot shows a left-half plane semi-circle arc ending at the origin, labeled X_C .	 Two plots of the Y-plane. The top plot shows a horizontal line segment in the right-half plane, labeled R . The bottom plot shows a vertical line segment in the left-half plane, labeled X_C .

Gliederung - Resonanzkreise I

Wiederholung

Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

Ortskurven

Resonanzkreise

Resonanzerscheinung

Definition Resonanzbedingung, -frequenz, Güte, Kennwiderstand

Resonanzfrequenz am Beispiel idealer LC-Schwingkreise

RLC-Reihenschwingkreis - Resonanzverhalten

RLC-Parallelschwingkreis - Resonanzverhalten

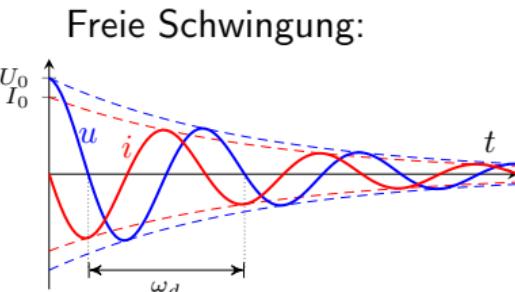
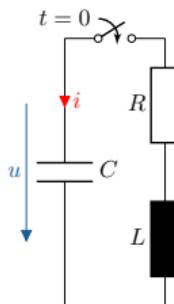


Lernziele: Resonanzkreise

Studierende lernen:

- ▶ Resonanzkreise zu erkennen und zu berechnen
- ▶ Resonanzfrequenz, Kennwiderstand und Güte zu bestimmen
- ▶ Resonanzkurven zu berechnen, zu beschreiben und zu zeichnen

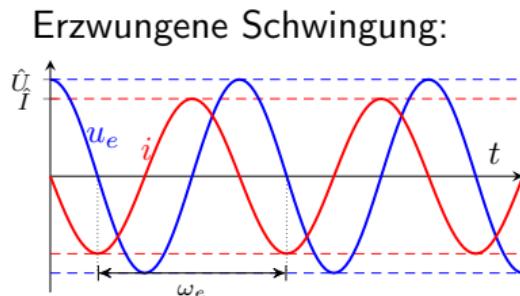
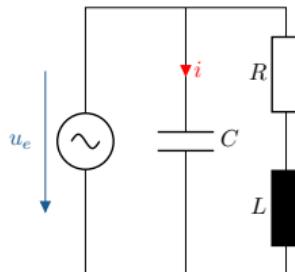
Resonanzerscheinung



Randbedingung:

$$u(t = 0) = U_0$$
$$i(t = 0) = 0$$

mit Eigenkreisfrequenz ω_d ,
abklingend (gedämpft)



Erregerspannung:

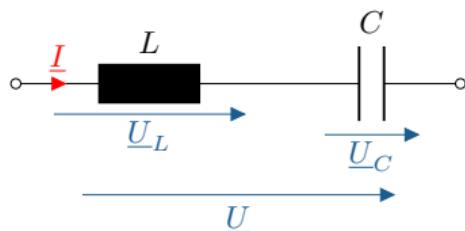
$$u_e(t) = \hat{U} \sin(\omega_e t)$$

mit Erregerkreisfrequenz ω_e

Definition Resonanzbedingung, -frequenz, Güte, Kennwiderstand

Grundtypen

Reihen-Resonanzkreis



Resonanzbedingung $\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0$

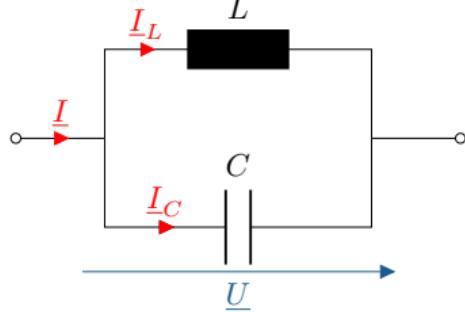
Resonanzfrequenz f_0

Kennwiderstand $X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}|$

$$B_k = \frac{1}{X_k}$$

$$Q = \frac{|Q_{L,0}|}{P_0} = \frac{|Q_{C,0}|}{P_0}$$

Parallel-Resonanzkreis



Kennleitwert

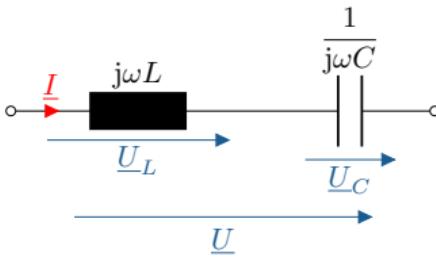
Güte

Eigenfrequenz f_d (gedämpft)

Eigenfrequenz f_0 (ungedämpft)

Resonanzfrequenz am Beispiel idealer LC-Schwingkreise

spannungsbezogen
in Reihe



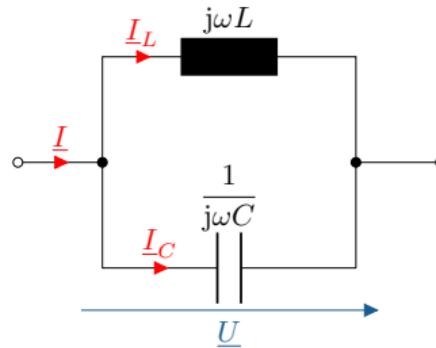
$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{I} \cdot \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \\ &= \underline{I} \cdot j \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}_{=0 \text{ Resonanz}} \end{aligned}$$

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{I} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \underline{U} = \text{konst.}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

strombezogen
parallel

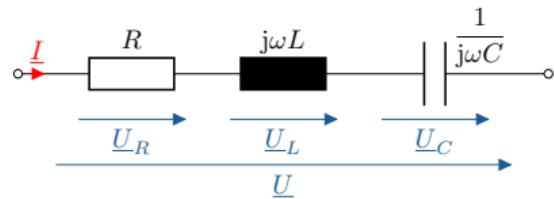


$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{U} \cdot \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \\ &= \underline{U} \cdot j \underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}_{=0 \text{ Resonanz}} \end{aligned}$$

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{U} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \underline{I} = \text{konst.}$$

RLC-Reihenschwingkreis - Resonanzverhalten



$$\underline{Z} = R + j \left(\underbrace{\omega L - \frac{1}{\omega C}}_{= 0 \text{ f\"ur } \omega = \omega_0} \right)$$

Resonanzbedingung (allg.)

Phasenverschiebung zwischen U und I entspricht $\varphi = 0$.

Oder:

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{U}{I} \right\} = \operatorname{Im} \{ \underline{Z} \} \stackrel{!}{=} 0$$

Fall 1: $\omega < \omega_0$

$$\rightarrow (\omega L - \frac{1}{\omega C}) < 0$$

ohmsch-kapazitiv

Fall 2: $\omega = \omega_0$

(Resonanzfall)

$$\rightarrow (\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 0$$

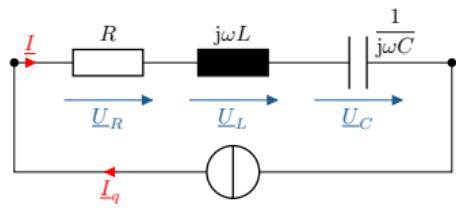
rein ohmsch

Fall 3: $\omega > \omega_0$

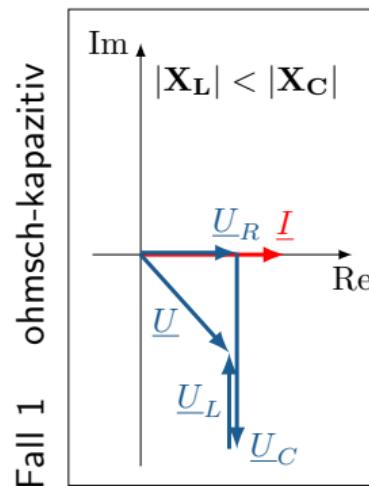
$$\rightarrow (\omega L - \frac{1}{\omega C}) > 0$$

ohmsch-induktiv

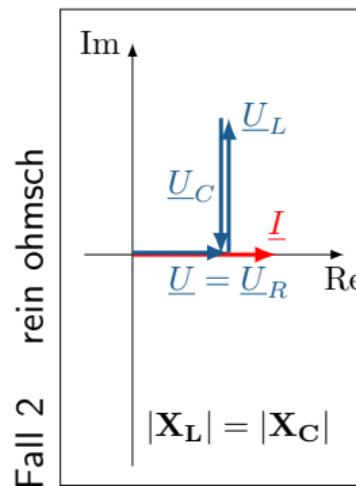
Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm



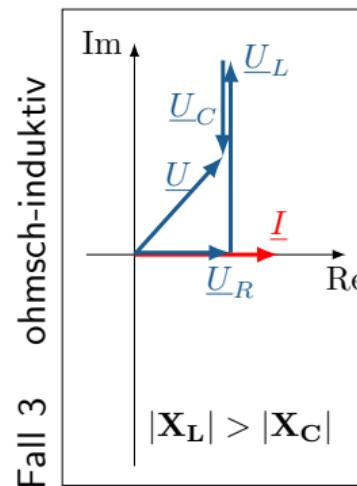
$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \\ &= \underline{I} \cdot \underbrace{\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}_{= \text{Im}\{\underline{Z}\}} \quad \underline{I} = \text{konst.} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$



$$\omega < \omega_0$$

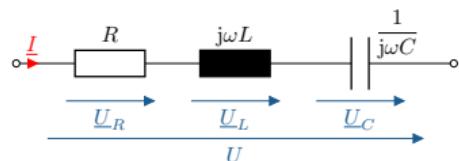


$$\omega = \omega_0$$



$$\omega > \omega_0$$

Fallunterscheidung in Impedanzkurve



$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Resonanzbedingung

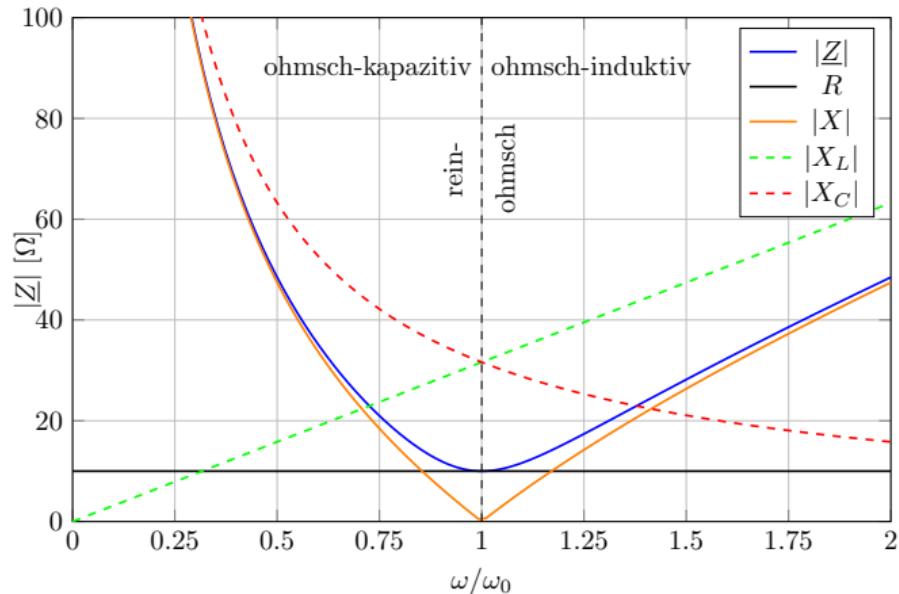
$$\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0$$

Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

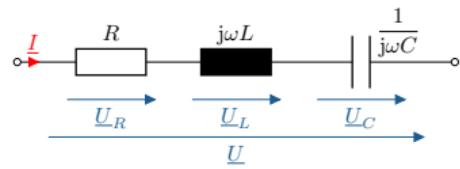
Resonanzimpedanz

$$\underline{Z}_0 = R$$



$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Reihenschwingkreises



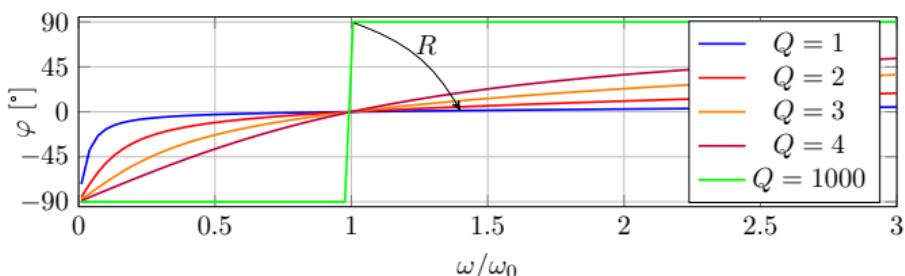
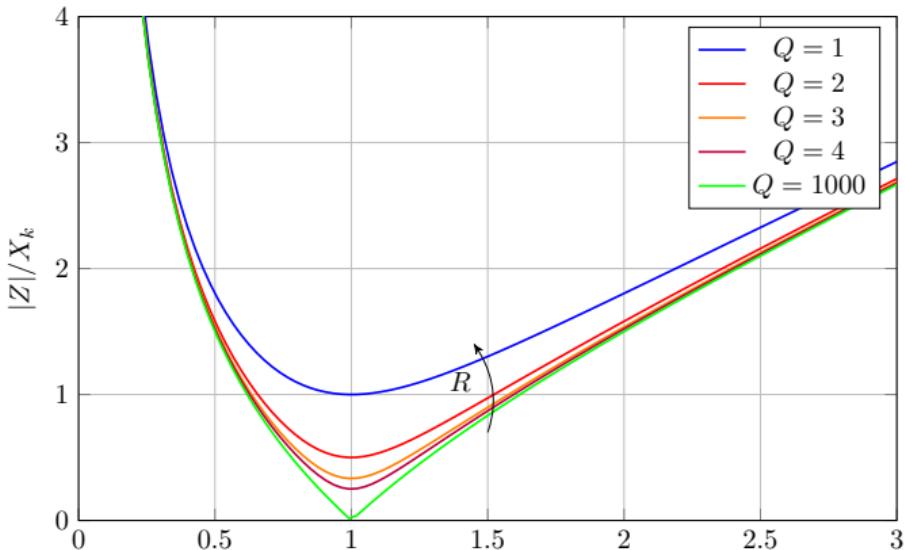
$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

normiert

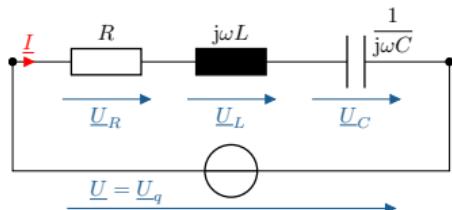
$$\frac{\underline{Z}}{X_k} = \frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Güte und Kennwiderstand

$$Q = \frac{X_k}{R} \quad X_k = \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Spannungsresonanz am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises I

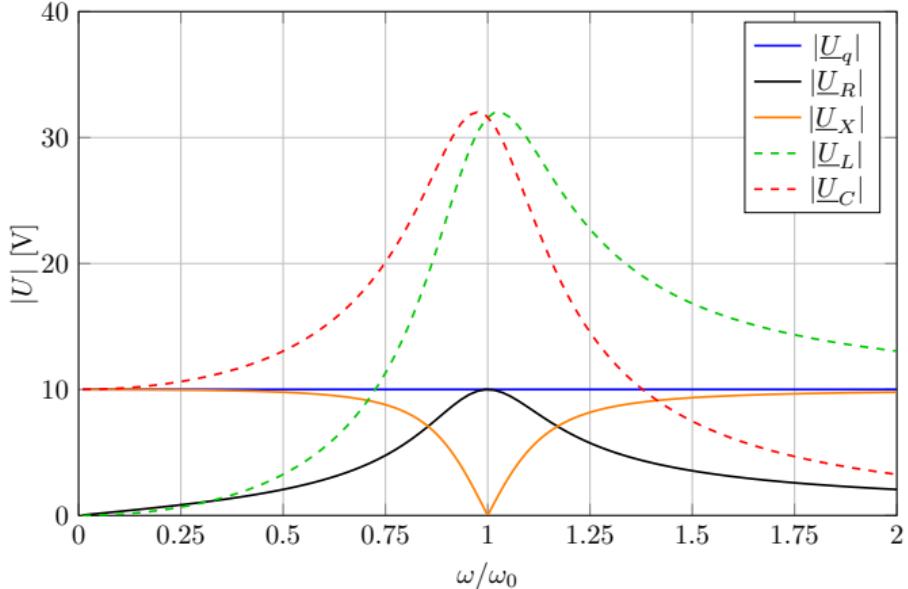


Spannungsteiler (Bsp.)

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

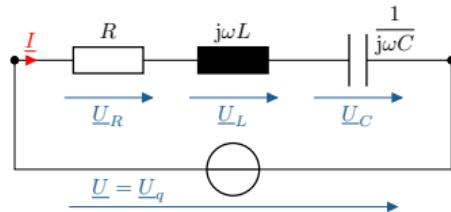
Güte und Überspannung

$$Q = \frac{X_k}{R} = \frac{U_{L,0}}{U} = \frac{U_{C,0}}{U}$$



$U_q(\omega_0) \Rightarrow \text{Überspannung!}$

Nebenrechnung



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}_q$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R = \underline{I}_L = \underline{I}_C$$

$$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{U_{L,0}I}{U_{R,0}I} = \frac{U_{L,0}}{U_q} = \frac{X_k}{R}$$

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

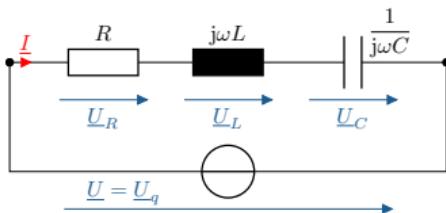
normiert

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{1/Q}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{+j\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{-j\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Stromkurve des RLC-Reihenschwingkreises II

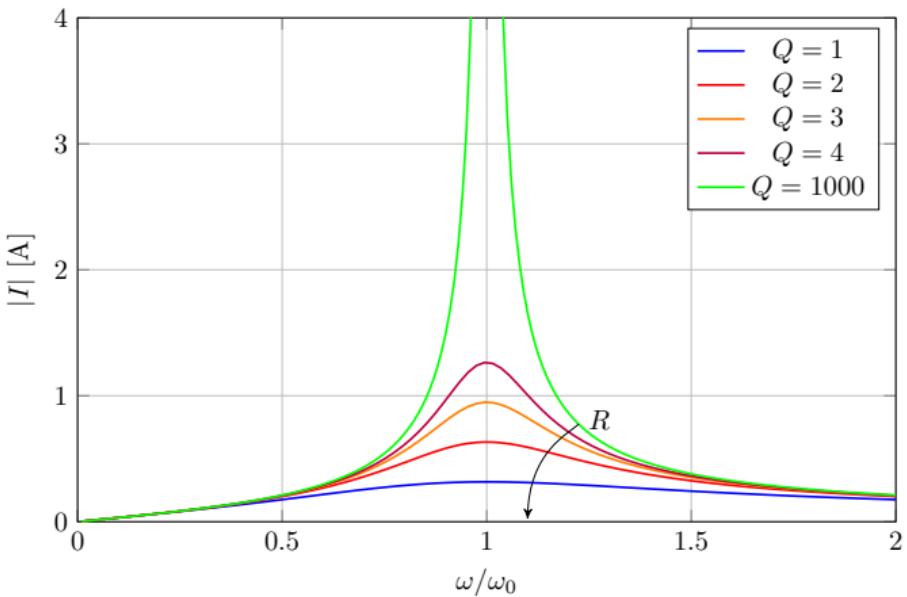


Strom

$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) Q}$$

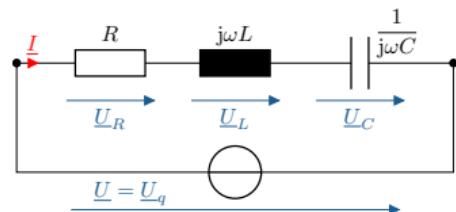
Maximalstrom, Güte

$$I_0 = \frac{U_q}{R} \quad Q = \frac{X_k}{R}$$



Strom maximal bei ω_0
Begrenzung durch R

Nebenrechnung



$$\underline{Z} = R + j(X_L + X_C)$$

$$X_L = +X_k \frac{\omega}{\omega_0} = \omega L$$

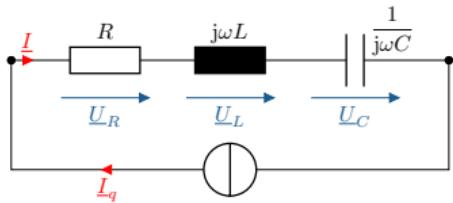
$$X_C = -X_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{X_k}{R} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}} \\ &= \frac{\underline{U}_q}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \\ &= \frac{\underline{U}_q}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)X_k} \\ &= \frac{\underline{U}_q}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{X_k}{R}} \\ &= \underline{I}_0 \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)Q}\end{aligned}$$

Spannungskurve des RLC-Reihenschwingkreis



Stromquelle

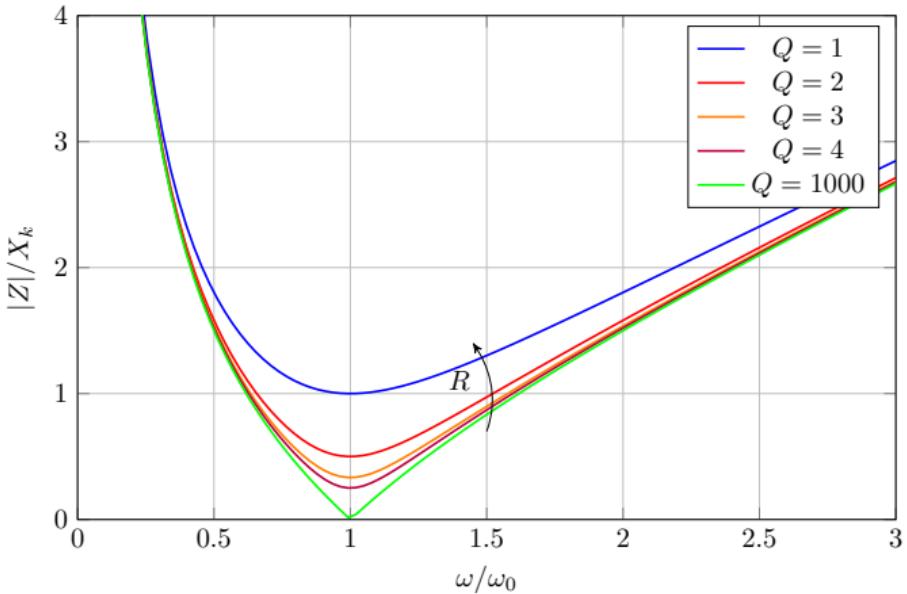
$$\underline{I} = I_q$$

Spannung

$$\underline{U} = I_q \cdot \underline{Z}$$

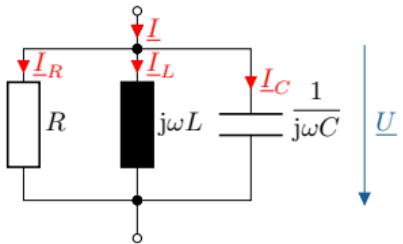
Impedanz

$$\underline{Z} = R + jX$$



Spannungskurve \sim Impedanzkurve

RLC-Parallelschwingkreis - Resonanzverhalten



$$\underline{Y} = G + j \left(\underbrace{\omega C - \frac{1}{\omega L}}_{= 0 \text{ f\"ur } \omega = \omega_0} \right)$$

Resonanzbedingung (allg.)

Phasenverschiebung zwischen \underline{U} und \underline{I} entspricht $\varphi = 0$.

Oder:

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \right\} = \operatorname{Im} \{ \underline{Y} \} \stackrel{!}{=} 0$$

Fall 1: $\omega < \omega_0$

$$\rightarrow \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) < 0 \quad \text{ohmsch-induktiv}$$

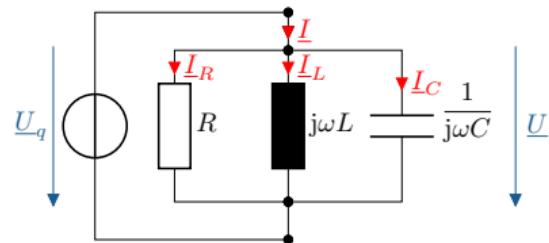
Fall 2: $\omega = \omega_0$ (Resonanzfall)

$$\rightarrow \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = 0 \quad \text{rein ohmsch}$$

Fall 3: $\omega > \omega_0$

$$\rightarrow \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) > 0 \quad \text{ohmsch-kapazitiv}$$

Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm

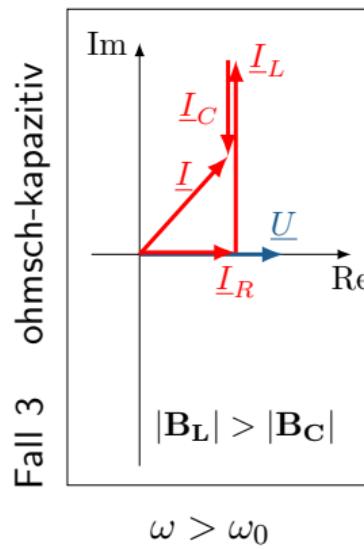
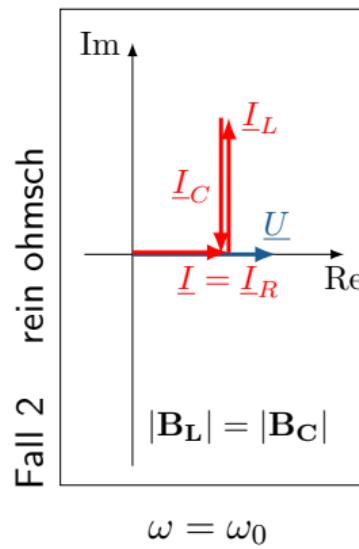
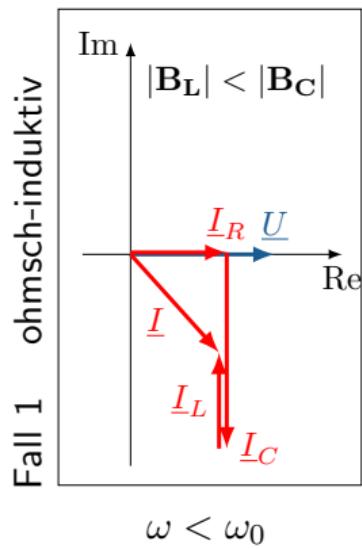


$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

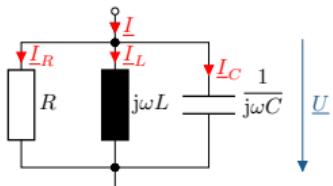
$$= \underline{U} \cdot \underbrace{\left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]}_{= \text{Im}\{\underline{Y}\}}$$

$$\underline{U} = \text{konst.}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Fallunterscheidung in Admittanzkurve



$$\underline{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

Resonanzbedingung

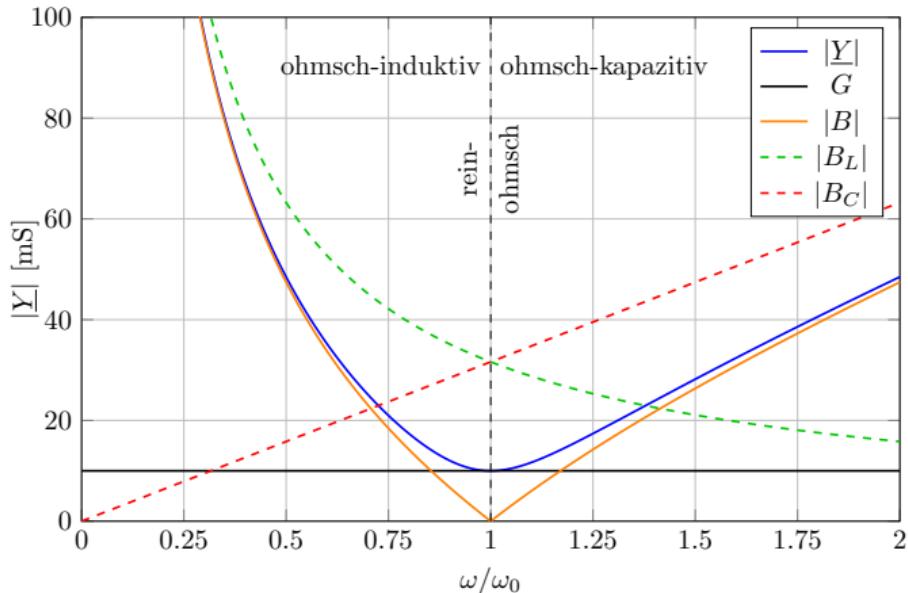
$$\text{Im}\{\underline{Y}\} \stackrel{!}{=} 0$$

Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

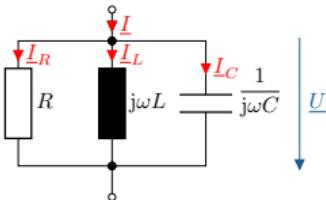
Resonanzadmittanz

$$\underline{Y}_0 = G$$



$$B_k = |B_{C,0}| = |B_{L,0}| = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Parallelschwingkreis



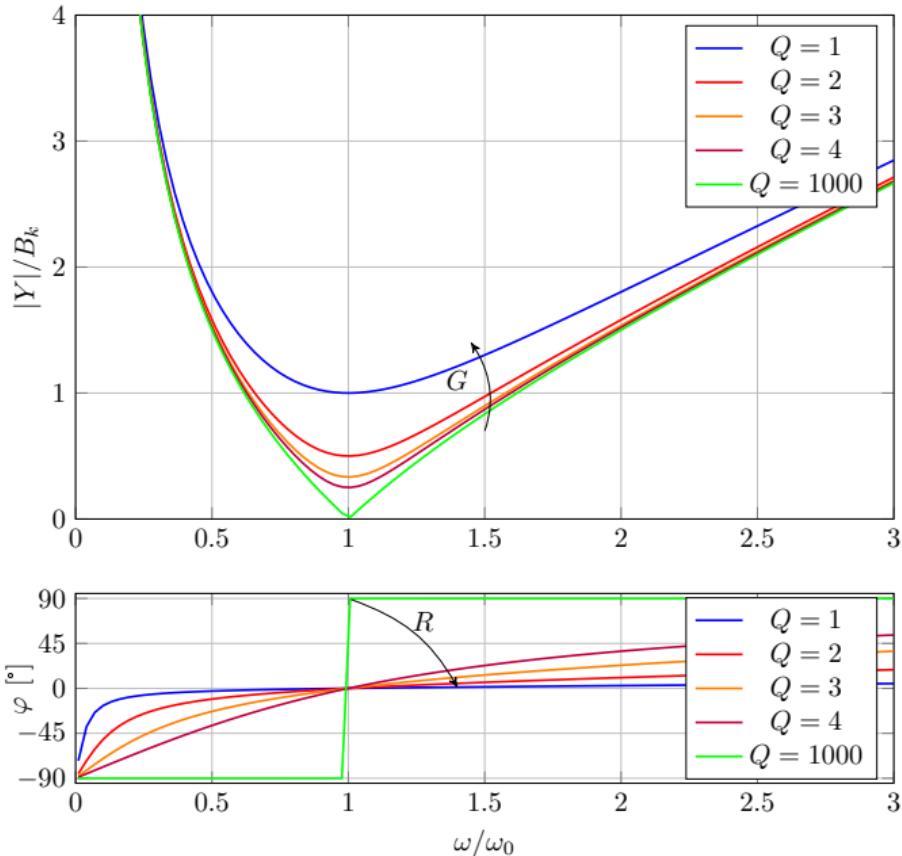
$$\underline{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

normiert

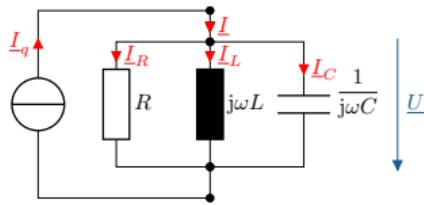
$$\frac{\underline{Y}}{B_k} = \frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Güte und Kennleitwert

$$Q = \frac{B_k}{G} \quad B_k = \sqrt{\frac{C}{L}}$$



Stromresonanz am Beispiel eines RLC-Parallelschwingkreises



$$\underline{U} = \underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C$$

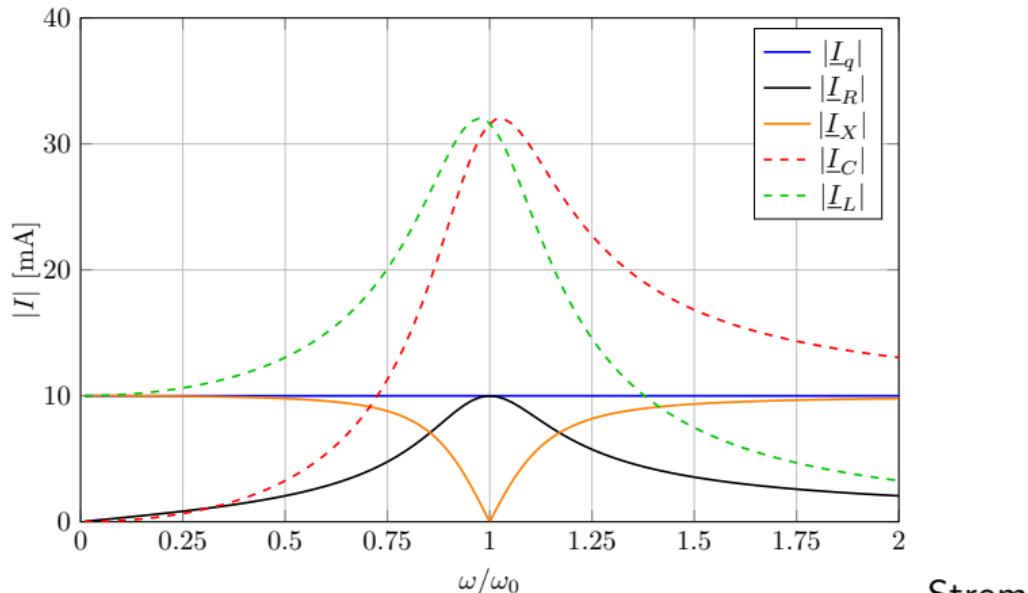
$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I}_q$$

Stromteiler (Bsp.)

$$\frac{I_C}{I} = \frac{j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

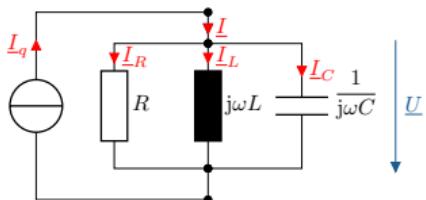
Güte und Überstrom

$$Q = \frac{B_k}{G} = \frac{I_{C,0}}{I} = \frac{I_{L,0}}{I}$$



$I_q(\omega_0) \Rightarrow \text{Überstrom!}$

Spannungskurve des RLC-Parallelschwingkreis II

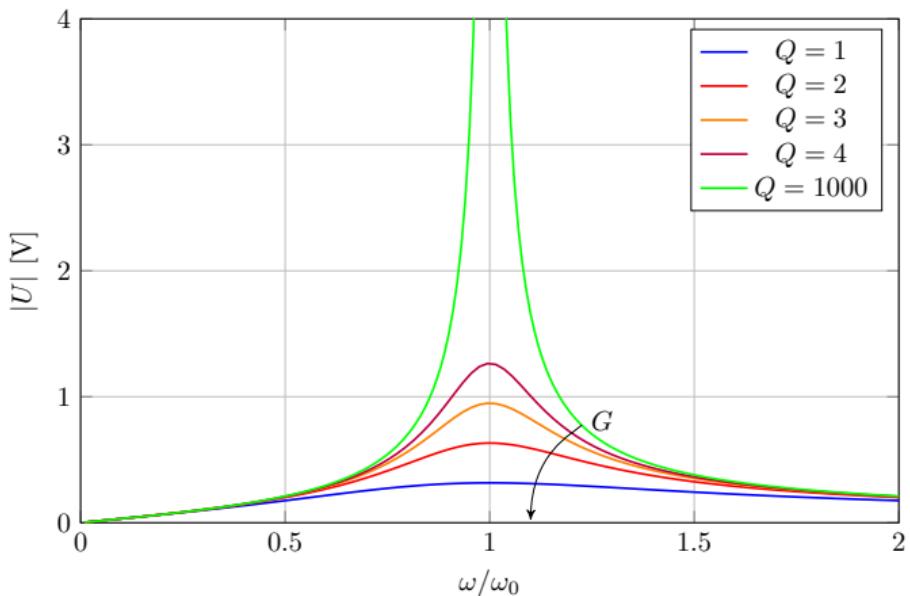


Spannung

$$U = \frac{U_0}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) Q}$$

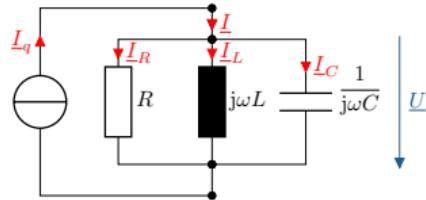
Maximalspannung, Güte

$$U_0 = \frac{I_q}{G} \quad Q = \frac{B_k}{G}$$



Spannung maximal bei ω_0
Begrenzung durch G

Nebenrechnung



$$\underline{Y} = G + j(B_L + B_C)$$

$$B_L = -B_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{\omega L}$$

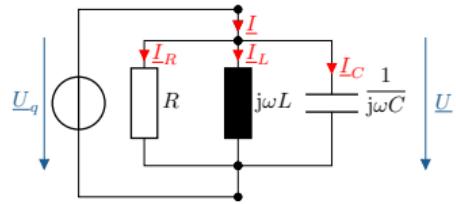
$$B_C = +B_k \frac{\omega}{\omega_0} = \omega C$$

$$B_k = |B_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$Q = \frac{B_k}{G} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \frac{\underline{I}_q}{\underline{Y}} \\ &= \frac{\underline{I}_q}{G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)} \\ &= \frac{\underline{I}_q}{G + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) B_k} \\ &= \frac{\underline{I}_q}{G} \cdot \frac{1}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{B_k}{G}} \\ &= \underline{U}_0 \cdot \frac{1}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) Q}\end{aligned}$$

Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises



Spannungsquelle

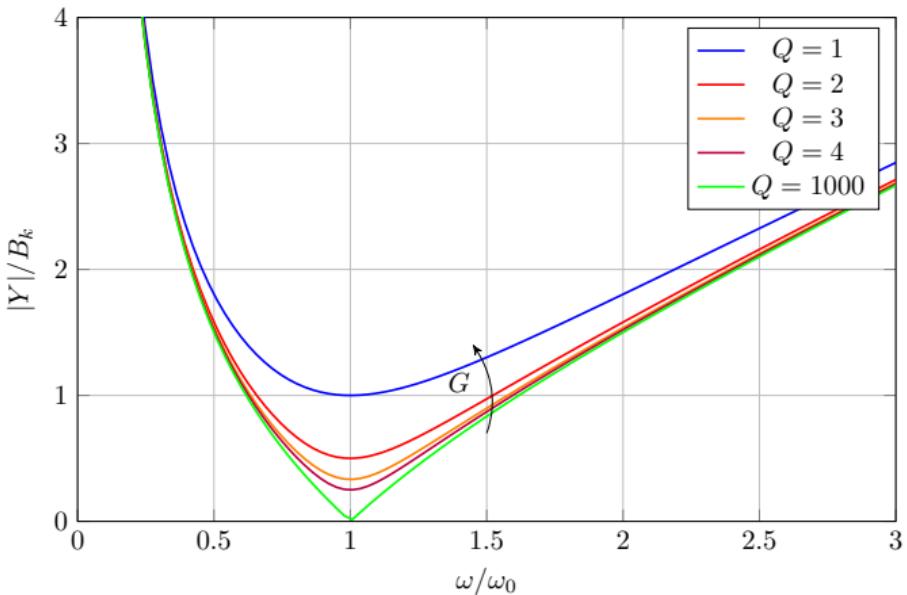
$$\underline{U} = U_q$$

Strom

$$\underline{I} = U_q \cdot \underline{Y}$$

Admittanz

$$\underline{Y} = G + jB$$



Stromkurve \sim Admittanzkurve

