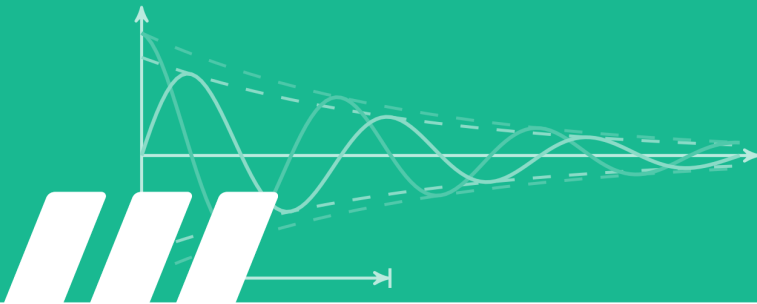


GET it digital

Modul 8: Schaltungen variabler Frequenz



Stand: 10. März 2026



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß TULLU-Regel bitte wie folgt: „GET it digital Modul 8: Schaltungen variabler Frequenz“ von M. Werle, T. Bache, R. Bechler, T. Wever Lizenz: CC BY 4.0.

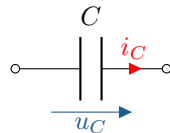
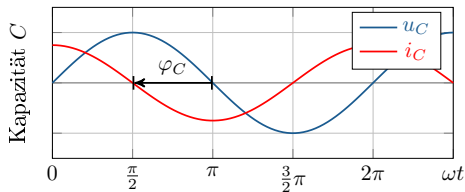
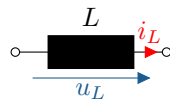
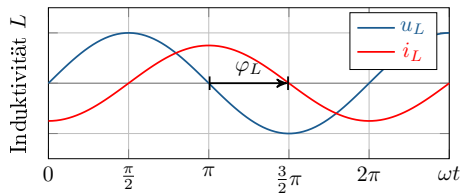
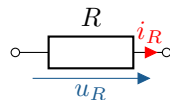
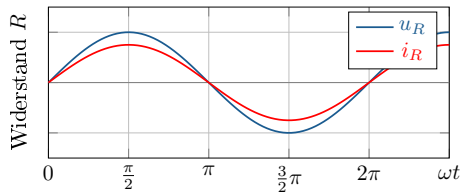
Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Das Werk ist online verfügbar unter:

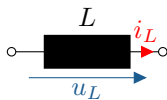
<https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-8-schaltungen-variabler-frequenz>

Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente



Induktivität

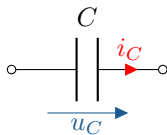
- ▶ Impedanz: $\underline{Z}_L = j\omega L$
- ▶ Zeitb.: $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$
- ▶ Energie im Magnetfeld
- ▶ Ströme stetig (keine Sprünge)



Spule


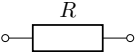
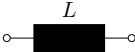
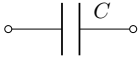
Kapazität

- ▶ Impedanz: $\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$
- ▶ Zeitb.: $i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$
- ▶ Energie im elektrischen Feld
- ▶ Spannungen stetig (keine Sprünge)



Kondensator

Vergleich der linearen Zweipole R , L und C

| Größe | Allgemein | El. Widerstand | Induktivität | Kapazität |
|-------------|---|---|---|---|
| Symbol |  |  |  |  |
| Einheit | [Form.z.] = Einheit | $[R] = \Omega$ (Ohm) | $[L] = \text{H}$ (Henry) | $[C] = \text{F}$ (Farad) |
| Zeitbereich | $\frac{d}{dt}$ bzw. $\int dt$ | $u_R = R \cdot i_R$ | $u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$ | $i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$ |
| Frequenzb. | $j\omega$ bzw. $\frac{1}{j\omega}$ | $\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$ | $\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L$ | $\underline{I}_C = j\omega C \cdot \underline{U}_C$ |
| Impedanz | $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ | $\underline{Z}_R = R$ | $\underline{Z}_L = j\omega L$ | $\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$ |
| Wirkanteil | $R = \text{Re}\{\underline{Z}\}$ | $R = \frac{U}{I}$ | 0 | 0 |
| Blindanteil | $X = \text{Im}\{\underline{Z}\}$ | 0 | $X_L = \omega L$ | $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ |

Lernziele: Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Studierende lernen:

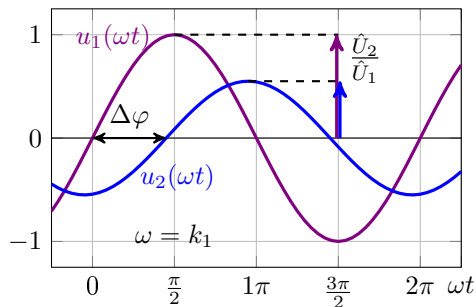
- ▶ Frequenzgänge anhand der Schaltungstopologie algebraisch zu bestimmen
- ▶ die Funktionsweise einfacher Hoch- und Tiefpassfiltern zu verstehen
- ▶ das Grenzverhalten von Vierpolen anhand ihrer Frequenzgänge zu analysieren

Analyse frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze (Zweitor)

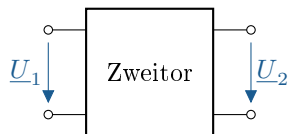


Linear und zeitinvariant (LZI):

- ▶ Sinusform am Eingang $u_1(\omega t)$
- ▶ → Sinusform am Ausgang $u_2(\omega t)$
- ▶ → Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$
- ▶ → Phasenverschiebung $\Delta\varphi = ?$
- ▶ → Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = ?$



Zweitor (Vierpol):



Linear, zeitinvariant (LZI):

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Sinusform bleibt erhalten

Frequenz gleich $\omega_2 = \omega_1$

Frequenzgang:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

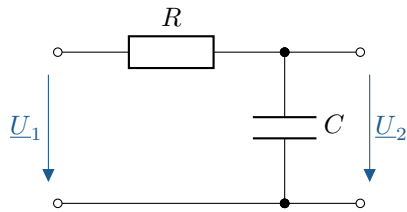
Amplitudengang:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\})^2} \end{aligned}$$

Phasengang:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \angle \underline{F}(j\omega) = \angle \underline{U}_2 - \angle \underline{U}_1 \\ &= \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\}} \right) \end{aligned}$$

Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Frequenzgang:

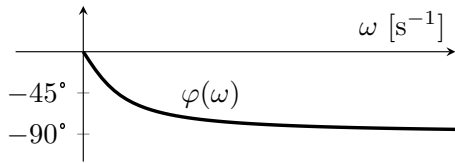
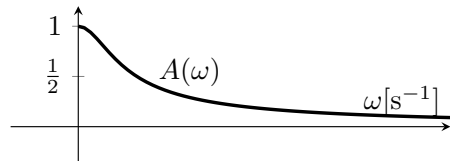
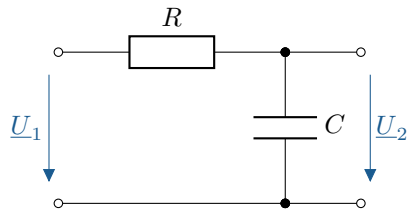
$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned}$$

Amplituden- und Phasengang:

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}}\right) = \arctan(-\omega CR)$$

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters



Grenzverhalten: für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

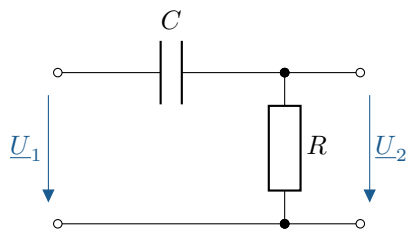
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$



RC-Hochpass 1. Ordnung

$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t)$$

$$\xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Frequenzgang:

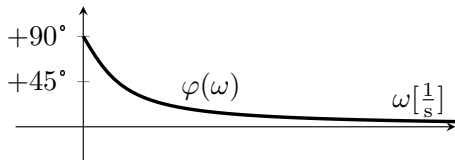
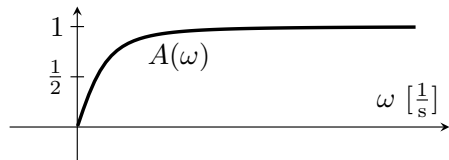
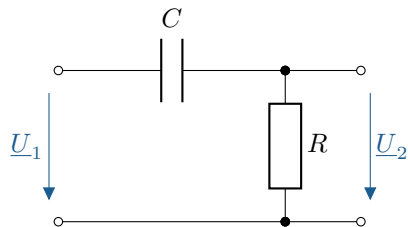
$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} \\ &= \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega CR}} = \frac{1 + j \frac{1}{\omega CR}}{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2} \end{aligned}$$

Amplituden- und Phasengang:

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters



Grenzverhalten: für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega CR}}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{\infty} = 0$$

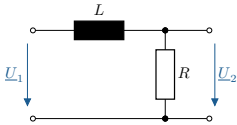
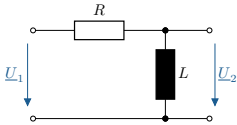
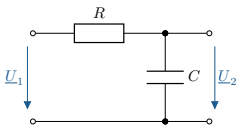
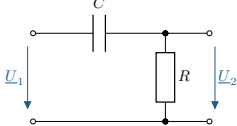
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

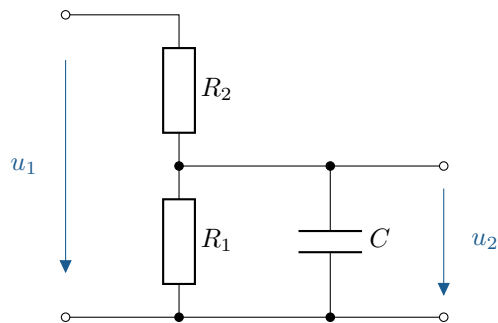
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(+\infty) = +90^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

Vergleich passive Filter 1. Ordnung mit L und R

| | Tiefpass | $\underline{F}(j\omega)$ | Hochpass | $\underline{F}(j\omega)$ | ω_g |
|----|---|-------------------------------------|--|--------------------------------------|----------------|
| RL |  | $\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$ |  | $\frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}}$ | $\frac{R}{L}$ |
| RC |  | $\frac{1}{1 + j\omega CR}$ |  | $\frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega CR}}$ | $\frac{1}{CR}$ |

Beispiel Filterschaltung: Aufgabe



$$u_1(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) \quad \underline{U}_1 = \hat{U}_1$$
$$u_2(t) = \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \underline{U}_2 = \hat{U}_2 \cdot e^{j\varphi}$$

Aufgabe:

- a) Leiten Sie $\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ allgemein her.
- b) Zeichnen Sie Betrag und Phase von $\underline{F}(j\omega)$ für:

$$R_1 = 900 \, \Omega$$

$$R_2 = 100 \, \Omega$$

$$C = 1,25 \, \mu\text{F}$$

- c) Bei welcher Frequenz f ist $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$? Welche Phasenverschiebung besitzt u_2 nun gegenüber u_1 ?

Lösung a) Frequenzgang allgemein

$$\begin{aligned}
 \underline{F}(j\omega) &= \frac{R_1 \parallel \underline{Z}_C}{R_2 + (R_1 \parallel \underline{Z}_C)} = \frac{\frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}}{R_2 + \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}} \quad \Bigg| \cdot \frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} \\
 &= \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 \cdot R_2 + \frac{R_2}{j\omega C} + \frac{R_1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} \stackrel{\hat{=}}{=} \frac{a + jb}{c + jd} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{R_1(R_1 + R_2) - j\omega C R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} \quad (\text{kartesisch}) \quad \stackrel{\hat{=}}{=} \frac{a' + jb'}{c'} \quad a', b', c' \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{R_1}{\underbrace{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}_{\hat{=} \frac{a+jb}{c+jd}}} = \frac{R_1(R_1 + R_2) - j\omega C R_1^2 R_2}{\underbrace{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}_{\hat{=} \frac{a'+jb'}}{c'}}$$

Betrag: $A(\omega) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$ mit $|\underline{F}(j\omega)| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

Phase: $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega C R_1^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)}\right)$ mit $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{b'}{a'}\right)$
 $= \arctan\left(\frac{-\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$

Altern.: $\varphi(\omega) = \arctan(0) - \arctan\left(\frac{\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$ mit $\varphi(\omega) = \underbrace{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}_{\varphi_Z} - \underbrace{\arctan\left(\frac{d}{c}\right)}_{\varphi_N}$

Lösung b) Grenzverhalten und Skizze

$$A(\omega) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega CR_1R_2)^2}}$$

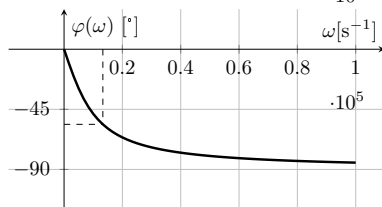
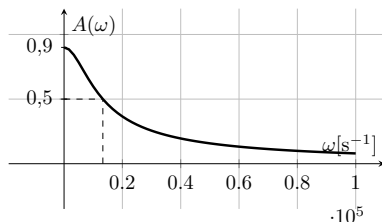
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{R_1}{R_1+R_2} = 0,9$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{R_1}{\infty} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega CR_1R_2}{R_1+R_2}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$



Lösung c) Bestimmten Arbeitspunkt ermitteln

Ges.: Frequenz f_1 bei der $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$ und Phasenverschiebung u_2 zu u_1 bei f_1 :

$$A(\omega_1) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad A(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Big|_{f=f_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}{R_1^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2$$

$$\Rightarrow (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2 - (R_1 + R_2)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \pm \frac{\sqrt{4R_1^2 - (R_1^2 + 2R_1R_2 + R_2^2)}}{C R_1 R_2}$$

$$\omega_1 = 1,3304 \cdot 10^4 \frac{1}{s}, f_1 = 2,117 \text{ kHz} \quad \text{mit} \quad \omega_1 < 0 \text{ unphysikalisch, } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\varphi(\omega_1) = \arctan(-1,4967) = -56,25^\circ \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{\underline{F}\}}{\text{Re}\{\underline{F}\}}\right)$$



Lernziele: Logarithmische Darstellung, Frequenzgang

Studierende lernen:

- ▶ Unterschiede zwischen linearer und logarithmischer Darstellung kennen.
- ▶ Dezibel als Einheit kennen und zu verwenden.
- ▶ Grenzfrequenzen von Filterschaltungen kennen und zu bestimmen.
- ▶ Bodediagramme zu konstruieren und zu interpretieren.
- ▶ Funktionsweise von Bandpass- und Bandsperrfilter kennen und verstehen.
- ▶ Aufbau und Verhalten von Filtern höherer Ordnung kennen und verstehen.

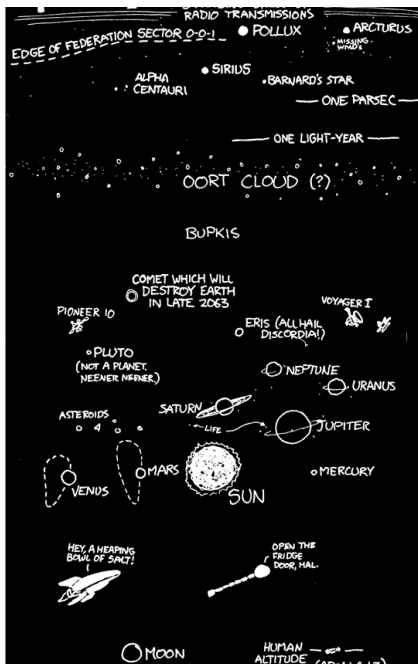
Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



Multipage Comic Strip (vertikal Scrollen)

Quelle: xkcd #482, *Depth*, <https://xkcd.com/485/> (Abruf: 04.04.2024)

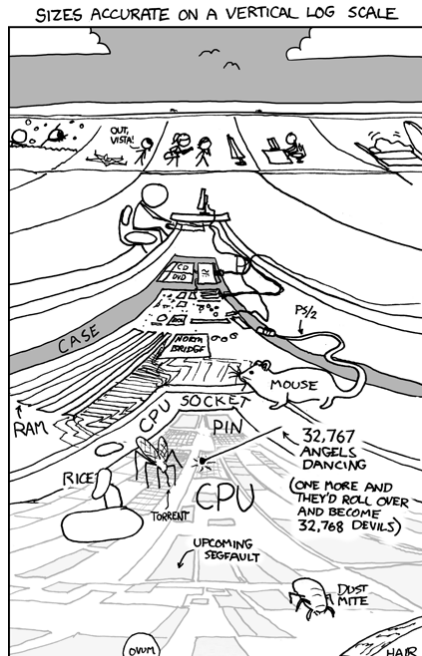
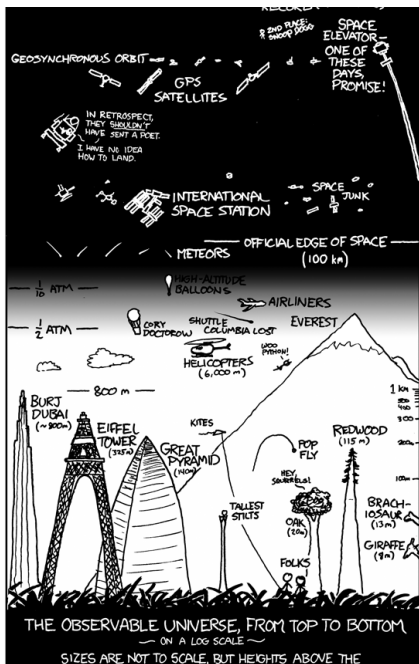
Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



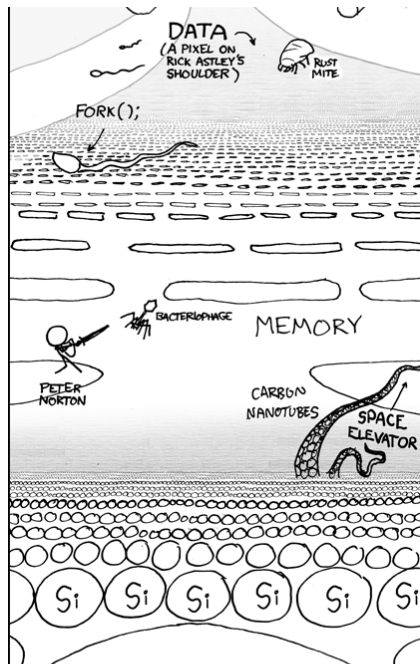
Multipage Comic Strip (vertikal Scrollen)

Quelle: xkcd #482, *Depth*, <https://xkcd.com/485/> (Abruf: 04.04.2024)

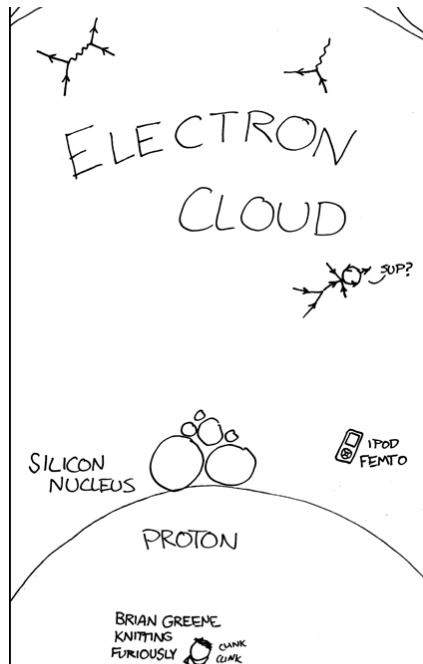
Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz



Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

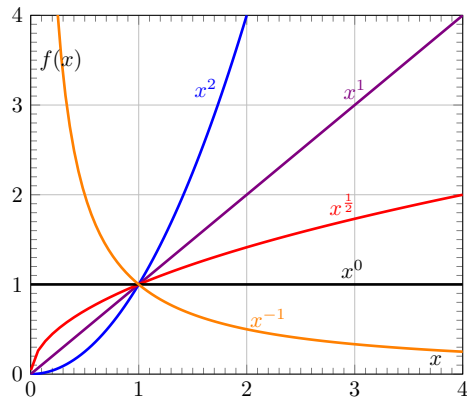


Quelle: xkcd #482, *Height*, <https://xkcd.com/482/> (Abruf: 04.04.2024)



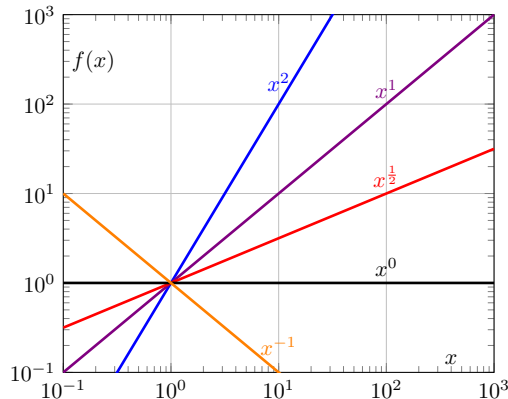
Quelle: xkcd #482, Height, <https://xkcd.com/482/> (Abruf: 04.04.2024)

Logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen



Lineare Darstellung

- ▶ Gerade: $f(x) = a(x - x_0) + y_0$
- ▶ Add./Subtr. → Verschiebung
- ▶ Mult./Div. → Streckung



(Doppelt-)Logarithmische Darstellung

- ▶ Gerade: $f(x) = (x/x_0)^a \cdot y_0$
- ▶ Mult./Div. → Verschiebung
- ▶ Exponent → Streckung

Dezibel Hilfsmaßeinheit zur Kennzeichnung logarithmischer Verhältnisse zweier Größen.

Leistungsgrößen (z.B. P , W) $Q_{(P)} = \log \frac{P_2}{P_1}$ B = $10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$ dB

Leistungswurzelgr. (z.B. U , I) $Q_{(R)} = \log \frac{U_2^2}{U_1^2}$ B = $20 \cdot \log \frac{U_1}{U_2}$ dB

Typische Dezibelwerte (Verstärkung in dB) bei Spannungsverhältnissen

| | | | | | | | | |
|-------------------|----------------------|------|------------|-------|-------------|-------|-------|-------|
| $\frac{U_2}{U_1}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | 2 | $\sqrt{10}$ | 10 | 20 | 100 |
| Q_{dB} | -3 dB | 0 dB | +3 dB | +6 dB | 10 dB | 20 dB | 26 dB | 40 dB |

Grenzfrequenz: f_g (ω_g)

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bereiche:

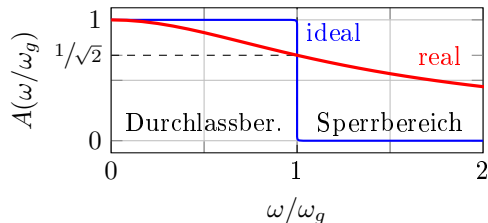
Durchlassbereich: $A(\omega) > 1/\sqrt{2}$

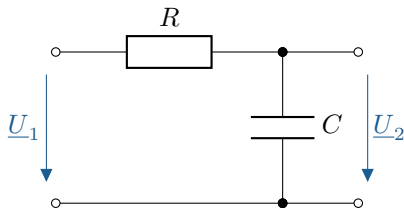
Grenzfrequenz: $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$

Sperrbereich: $A(\omega) < 1/\sqrt{2}$

Beispiel: Tiefpass erster Ordnung

$$A(\omega/\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad \text{mit } \omega_g = \frac{1}{CR}$$





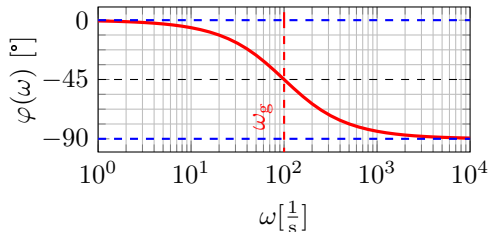
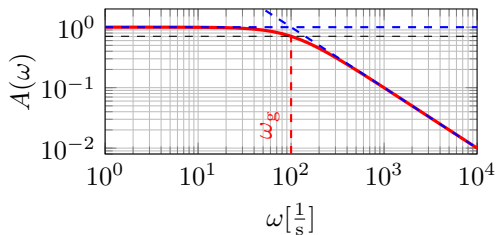
RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_g} \quad \omega_g = \frac{1}{RC}$$

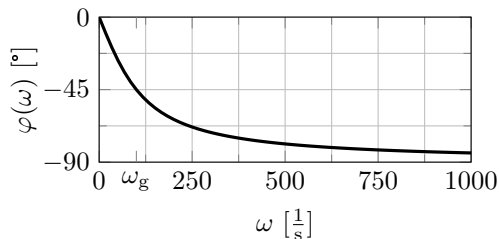
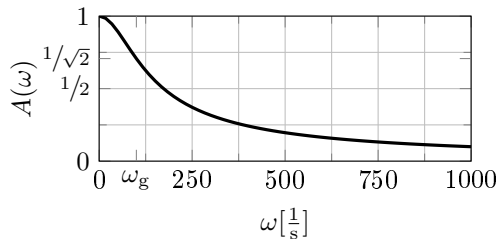
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad \varphi(\omega_g) = -45^\circ$$

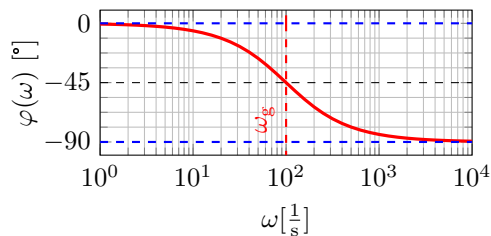
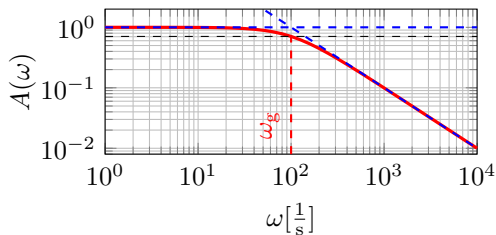
Logarithmische Darstellung



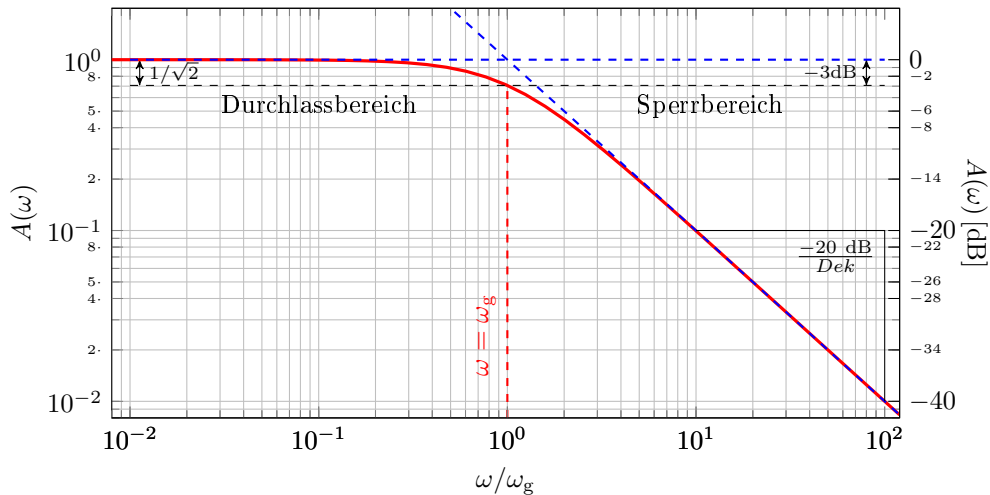
Lineare Darstellung



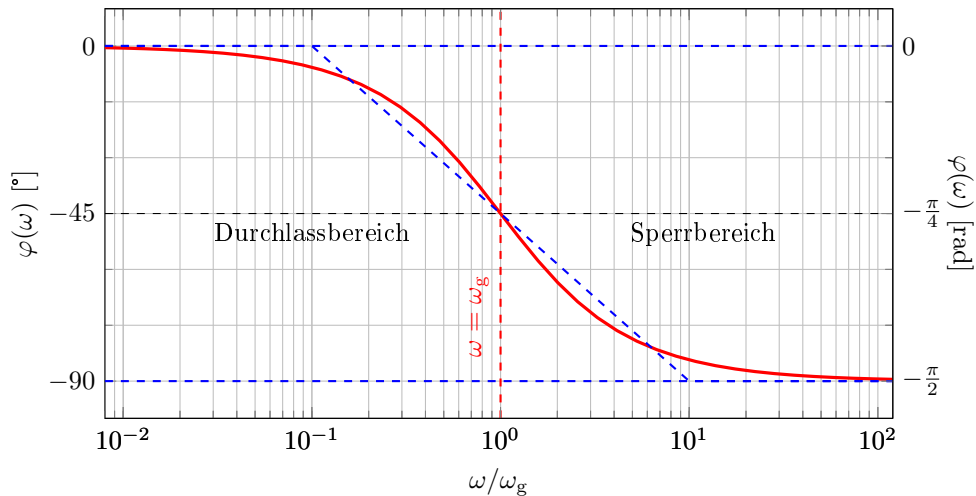
Logarithmische Darstellung



Tiefpass 1. Ordnung, Amplitudengang

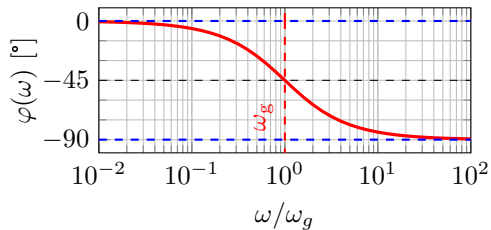
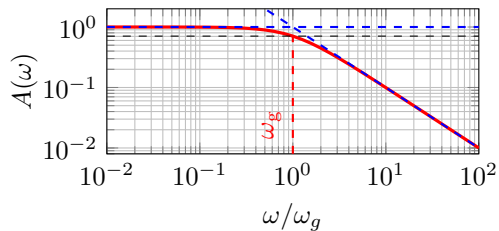


Tiefpass 1. Ordnung, Phasengang

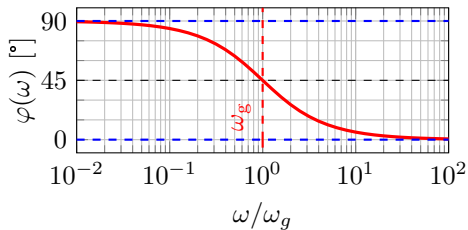
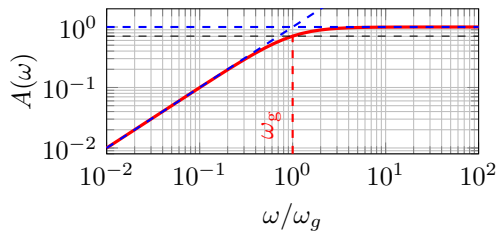


Vergleich Tief- und Hochpass 1. Ordnung

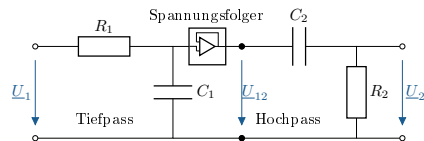
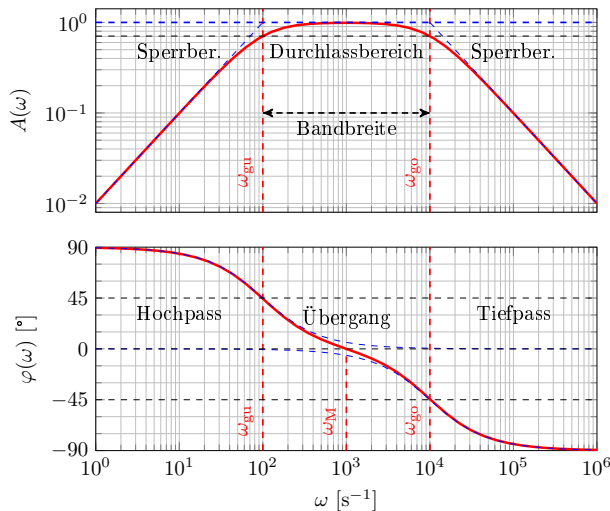
Tiefpass



Hochpass



Bandpass 2. Ordnung



Grenzfrequenz: (obere, untere)

$$f_{go}, f_{gu}$$

Bandbreite:

$$B = \Delta f = f_{go} - f_{gu}$$

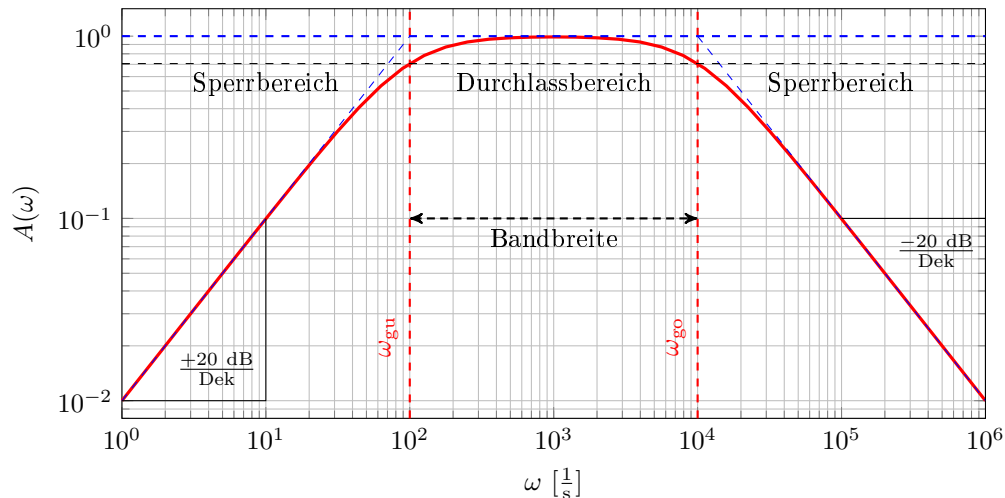
Mittenfrequenz:

$$f_m = \sqrt{f_{go} \cdot f_{gu}}$$

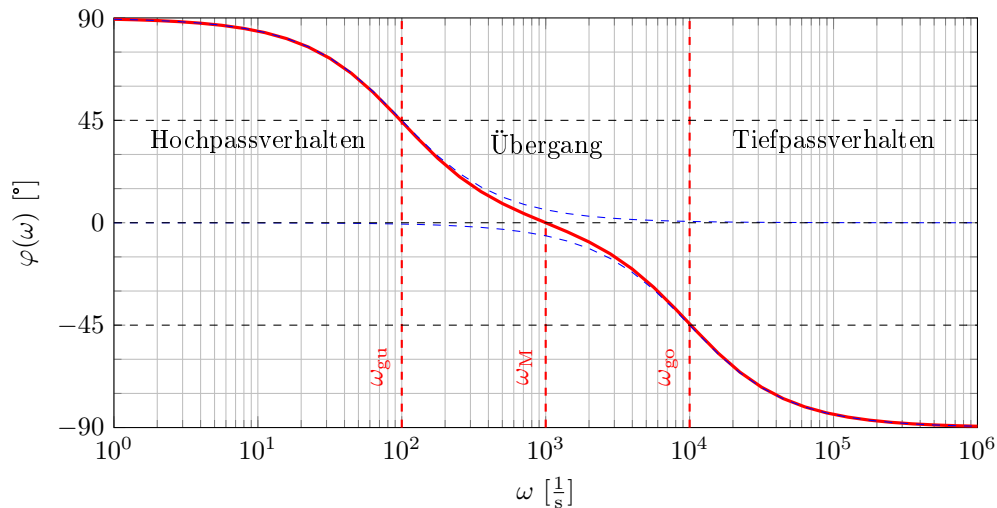
Frequenzgang¹: $\underline{F}_{BP}(j\omega) = \underline{F}_{TP}(j\omega) \cdot \underline{F}_{TP}(j\omega)$

¹Bei rückwirkungsfreier Serienschaltung aus Multiplikation der Einzelfrequenzgänge

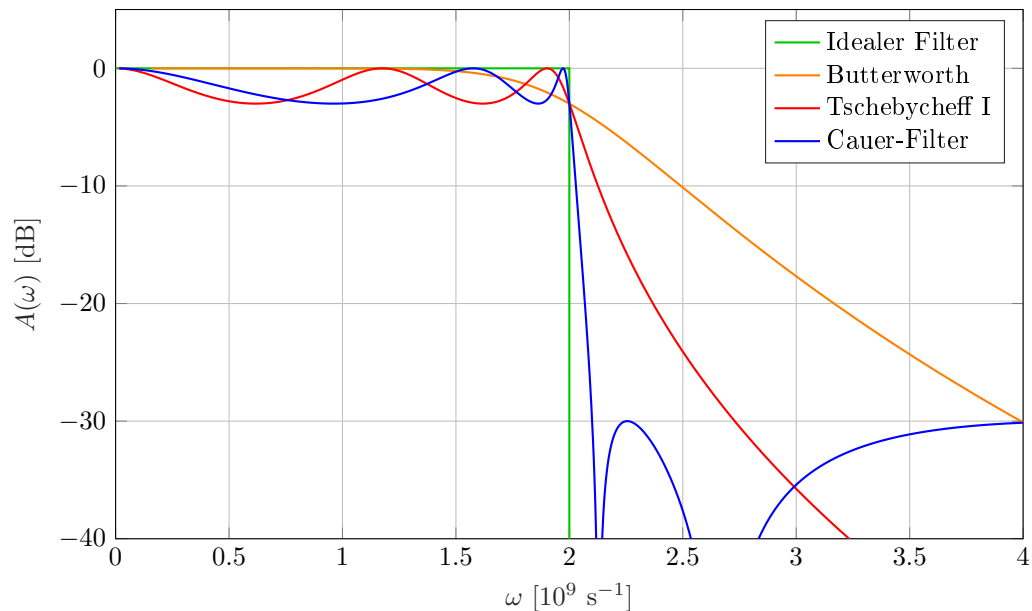
Bandpass 2. Ordnung - Amplitudengang, Detail



Bandpass 2. Ordnung - Phasengang, Detail



Ordnung von Filtern, Beispielfilter höherer Ordnung



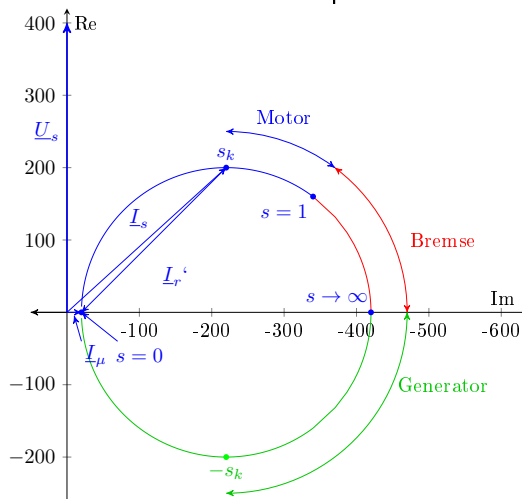
Lernziele: Ortskurven

Studierende lernen:

- ▶ Ortskurven kennen und mögliche Anwendungsbereiche kennen.
- ▶ Ortskurven prinzipiell zu konstruieren und zu interpretieren.
- ▶ Impedanz- und Admittanzortskurven von Grundsaltungen kennen.

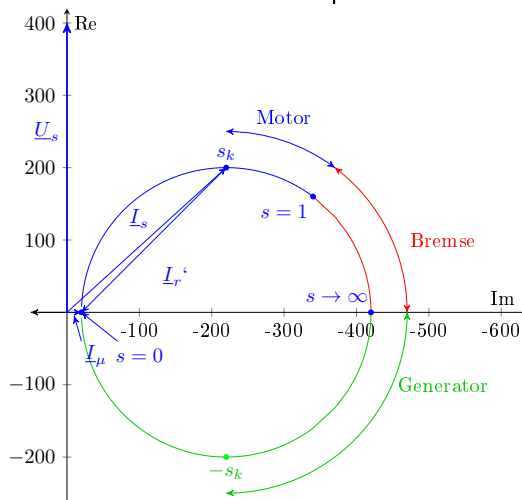
Def. Ortskurve: Darstellung eines komplexen Zeigers $\underline{z}(p) = \operatorname{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{z}(p)\}$ in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter p .

Def. Ortskurve: Darstellung eines komplexen Zeigers $\underline{z}(p) = \text{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \text{Im}\{\underline{z}(p)\}$ in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter p .



Beispiel: Stromortskurve einer Asynchronmaschine für $\underline{I}_s(s)$

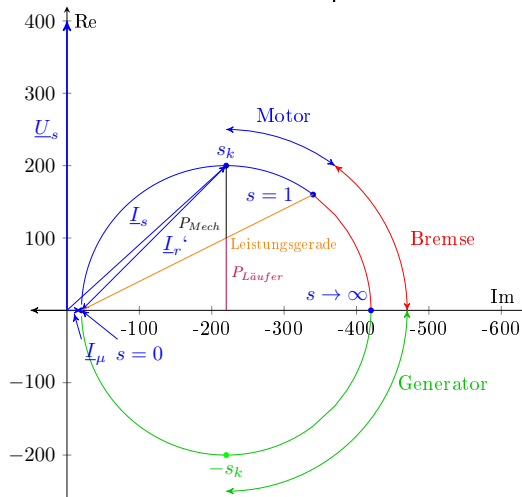
Def. Ortskurve: Darstellung eines komplexen Zeigers $\underline{z}(p) = \text{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \text{Im}\{\underline{z}(p)\}$ in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter p .



Anwendungsbereiche?

Beispiel: Stromortskurve einer Asynchronmaschine für $\underline{I}_s(s)$

Def. Ortskurve: Darstellung eines komplexen Zeigers $\underline{z}(p) = \text{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \text{Im}\{\underline{z}(p)\}$ in komplexer Ebene in Abhängigkeit eines realen Parameter p .



Beispiel: Stromortskurve einer Asynchronmaschine für $\underline{I}_s(s)$

Anwendungsbereiche?

Visualisierung von:

- Systemzuständen
- Systemgrößen
- Einfluss von Systemgrößen

Zeigerdiagramm:

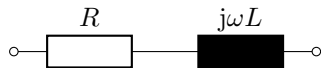
Zeigt Größe in komplexer Ebene als Zeiger (eines Punktes).



Merke: Ortskurve

Zeigt Größe in komplexer Ebene parameterabhängig als Kurve (Punkteschar).

Impedanzortskurve - RL-Glied , R variabel

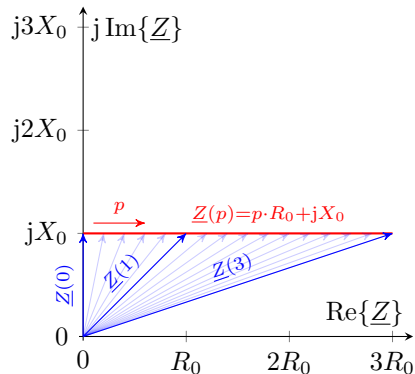


$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

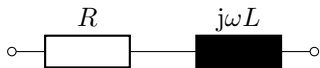
$$\underline{Z} = p \cdot R_0 + jX_0$$

mit $p \in [0,3]$

$R_0, X_0 = konst.$



Impedanzortskurve - RLs-Glied, ω variabel

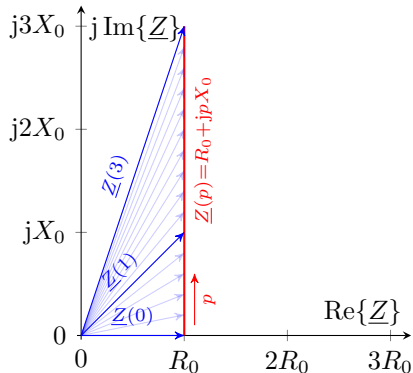


$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

$$\underline{Z} = R_0 + jp \cdot \omega_0 L_0$$

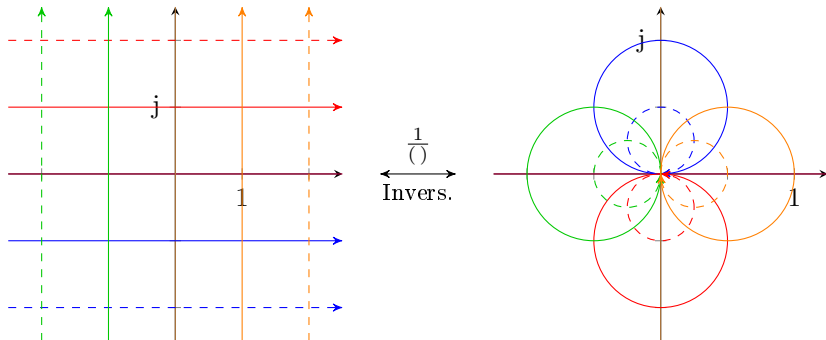
mit $p \in [0,3]$

$R_0, L_0, \omega_0 = \text{konst.}$




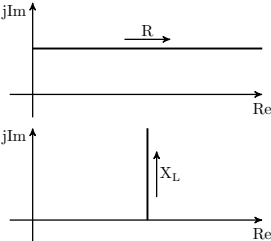
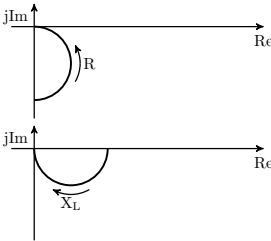
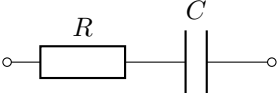
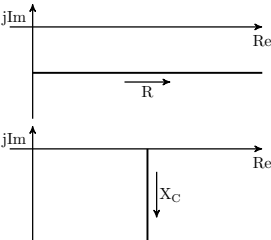
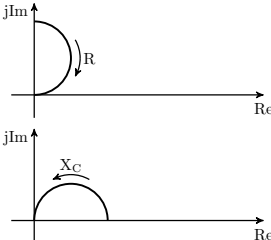
Admittanzortskurve - Inversion von Ortskurven

| ursprüngliche Ortskurve | | invertierte Ortskurve | |
|-------------------------|--------------------------|-----------------------|--------------------------|
| Gerade | durch den Ursprung | Gerade | durch den Ursprung |
| Gerade | nicht durch den Ursprung | Kreis | durch den Ursprung |
| Kreis | durch den Ursprung | Gerade | nicht durch den Ursprung |
| Kreis | nicht durch den Ursprung | Kreis | nicht durch den Ursprung |

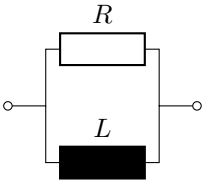
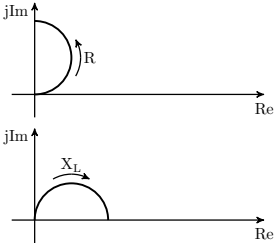
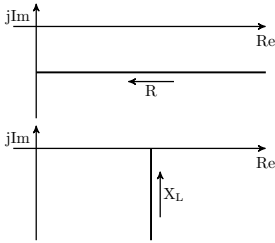
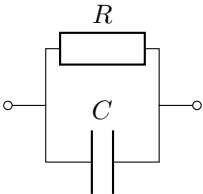
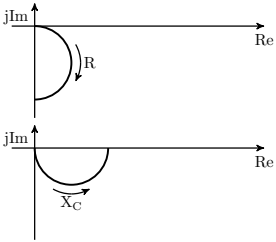
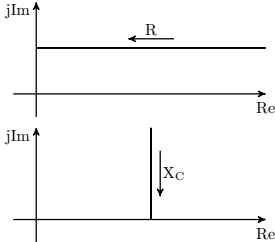


¹Angelehnt an MoebiusInversion.svg von Chrislb, CC-BY-SA-2.0-DE, 2005,
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MoebiusInversion.svg>

Ortskurven von Grundschaltungen - in Reihe

| Grundschaltung | <u>Z</u> -Ortskurve | <u>Y</u> -Ortskurve |
|---|--|---|
|  |  |  |
|  |  |  |

Ortskurven von Grundschaltungen - in Parallel

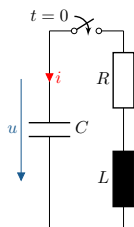
| Grundschialtung | <u>Z</u> -Ortskurve | <u>Y</u> -Ortskurve |
|---|--|---|
|  |  |  |
|  |  |  |

Lernziele: Resonanzkreise

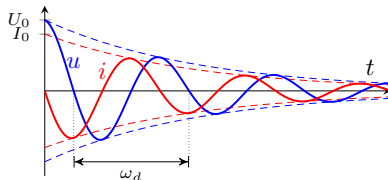
Studierende lernen:

- ▶ Resonanzkreise zu erkennen und zu berechnen
- ▶ Resonanzfrequenz, Kennwiderstand und Güte zu bestimmen
- ▶ Resonanzkurven zu berechnen, zu beschreiben und zu zeichnen

Resonanzerscheinung



Freie Schwingung:

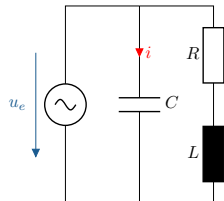


Randbedingung:

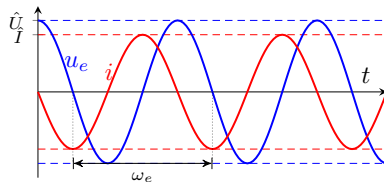
$$u(t=0) = U_0$$

$$i(t=0) = 0$$

mit Eigenkreisfrequenz ω_d ,
abklingend (gedämpft)



Erzwungene Schwingung:



Erregerspannung:

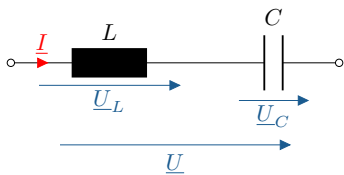
$$u_e(t) = \hat{U} \sin(\omega_e t)$$

mit Erregerkreisfrequenz ω_e

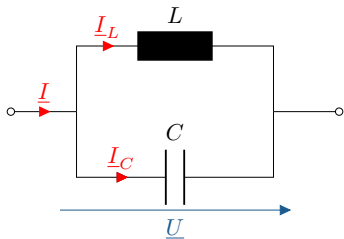
Definition Resonanzbedingung, -frequenz, Güte, Kennwiderstand

Grundtypen

Reihen-Resonanzkreis



Parallel-Resonanzkreis



Resonanzbedingung $\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0$

Resonanzfrequenz f_0

Kennwiderstand $X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}|$

Kennleitwert $B_k = \frac{1}{X_k}$

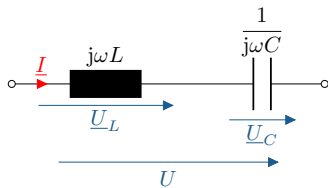
Güte $Q = \frac{|Q_{L,0}|}{P_0} = \frac{|Q_{C,0}|}{P_0}$

Eigenfrequenz f_d (gedämpft)

Eigenfrequenz f_0 (ungedämpft)

Resonanzfrequenz am Beispiel idealer LC-Schwingkreise

in Reihe



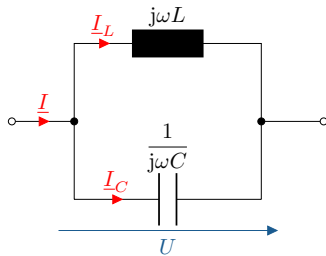
spannungsbezogen

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{I} \cdot \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \\ &= \underline{I} \cdot j \left(\underbrace{\omega L - \frac{1}{\omega C}}_{=0 \text{ Resonanz}} \right)\end{aligned}$$

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{I} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \underline{U} = \text{konst.}$$

parallel



strombezogen

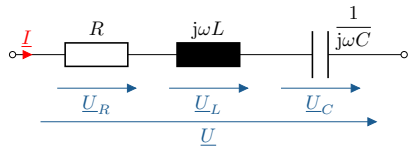
$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{U} \cdot \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \\ &= \underline{U} \cdot j \left(\underbrace{\omega C - \frac{1}{\omega L}}_{=0 \text{ Resonanz}} \right)\end{aligned}$$

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{U} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \underline{I} = \text{konst.}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

RLC-Reihenschwingkreis - Resonanzverhalten



$$\underline{Z} = R + j \underbrace{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}_{= 0 \text{ für } \omega = \omega_0}$$

Resonanzbedingung (allg.)

Phasenverschiebung zwischen \underline{U} und \underline{I} entspricht $\varphi = 0$.

Oder:

$$\operatorname{Im} \left\{ \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right\} = \operatorname{Im} \{ \underline{Z} \} \stackrel{!}{=} 0$$

Fall 1: $\omega < \omega_0$

→ $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) < 0$ ohmsch-kapazitiv

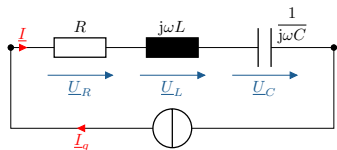
Fall 2: $\omega = \omega_0$ (Resonanzfall)

→ $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 0$ rein ohmsch

Fall 3: $\omega > \omega_0$

→ $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) > 0$ ohmsch-induktiv

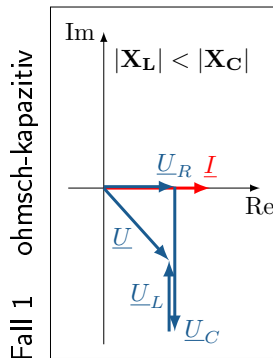
Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm



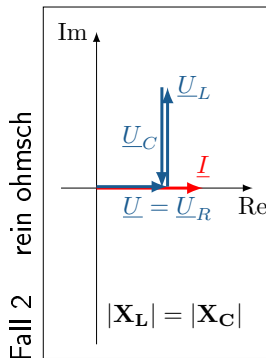
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \quad \underline{I} = \text{konst.}$$

$$= \underline{I} \cdot \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

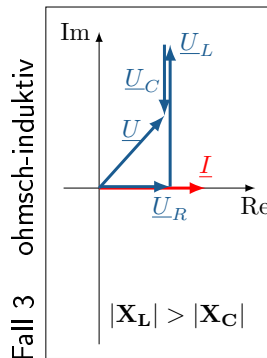
$$\hspace{15em} = \text{Im}\{Z\}$$



$$\omega < \omega_0$$

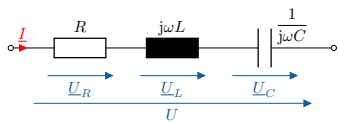


$$\omega = \omega_0$$



$$\omega > \omega_0$$

Fallunterscheidung in Impedanzkurve



$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Resonanzbedingung

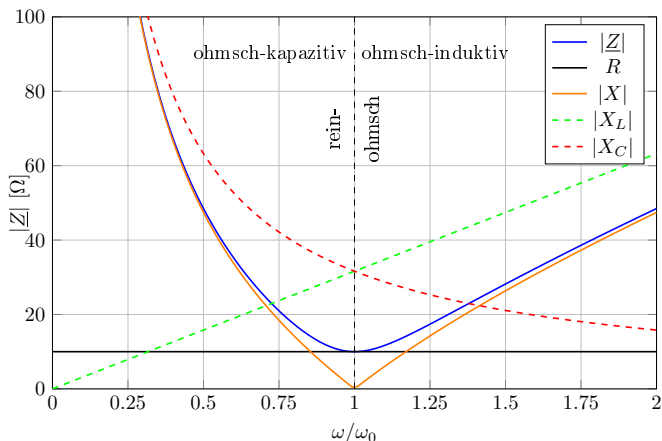
$$\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0$$

Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

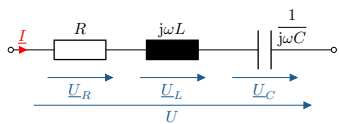
Resonanzimpedanz

$$\underline{Z}_0 = R$$



$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Reihenschwingkreises



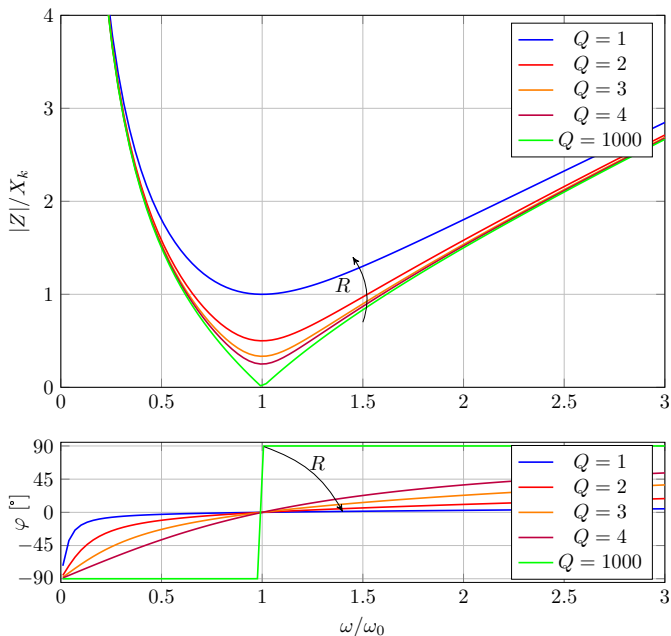
$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

normiert

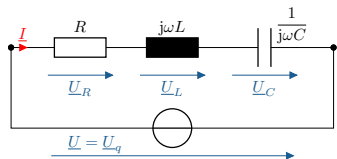
$$\frac{\underline{Z}}{X_k} = \frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Güte und Kennwiderstand

$$Q = \frac{X_k}{R} \quad X_k = \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Spannungsresonanz am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises I

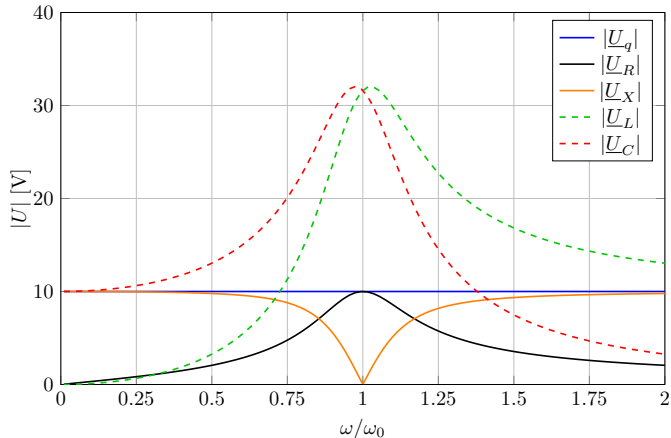


Spannungsteiler (Bsp.)

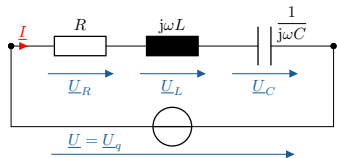
$$\frac{U_L}{U} = \frac{j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Güte und Überspannung

$$Q = \frac{X_k}{R} = \frac{U_{L,0}}{U} = \frac{U_{C,0}}{U}$$



$U_q(\omega_0) \Rightarrow$ Überspannung!



$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}_q$$

$$\underline{I} = \underline{I}_R = \underline{I}_L = \underline{I}_C$$

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{U_{L,0}I}{U_{R,0}I} = \frac{U_{L,0}}{U_q} = \frac{X_k}{R}$$

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

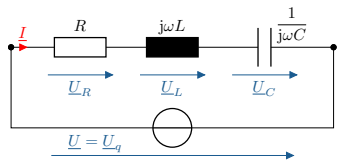
normiert

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{1/Q}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{+j\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} = \frac{-j\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Stromkurve des RLC-Reihenschwingkreises II

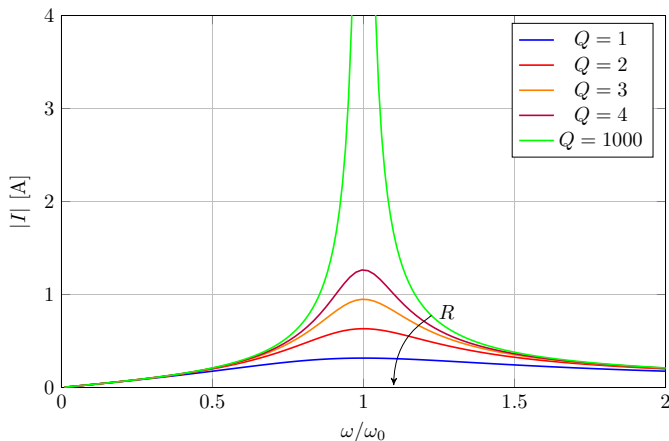


Strom

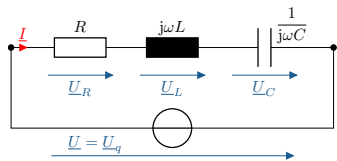
$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) Q}$$

Maximalstrom, Güte

$$I_0 = \frac{U_q}{R} \quad Q = \frac{X_k}{R}$$



Strom maximal bei ω_0
Begrenzung durch R



$$\underline{Z} = R + j(X_L + X_C)$$

$$X_L = +X_k \frac{\omega}{\omega_0} = \omega L$$

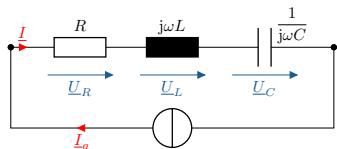
$$X_C = -X_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{\omega C}$$

$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q = \frac{X_k}{R} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{U_q}{\underline{Z}} \\ &= \frac{U_q}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{U_q}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k} \\ &= \frac{U_q}{R} \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \frac{X_k}{R}} \\ &= I_0 \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) Q} \end{aligned}$$

Spannungskurve des RLC-Reihenschwingkreis



Stromquelle

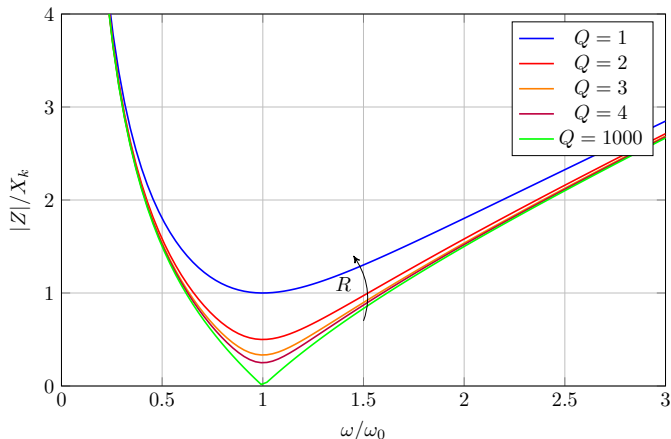
$$\underline{I} = I_q$$

Spannung

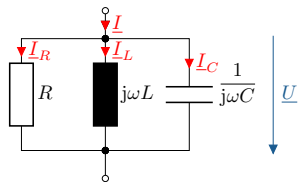
$$\underline{U} = I_q \cdot \underline{Z}$$

Impedanz

$$\underline{Z} = R + jX$$



Spannungskurve \sim Impedanzkurve



$$\underline{Y} = G + j \underbrace{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}_{= 0 \text{ für } \omega = \omega_0}$$

Resonanzbedingung (allg.)

Phasenverschiebung zwischen \underline{U} und \underline{I} entspricht $\varphi = 0$.

Oder:

$$\text{Im} \left\{ \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \right\} = \text{Im} \{ \underline{Y} \} \stackrel{!}{=} 0$$

Fall 1: $\omega < \omega_0$

→ $\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) < 0$ ohmsch-induktiv

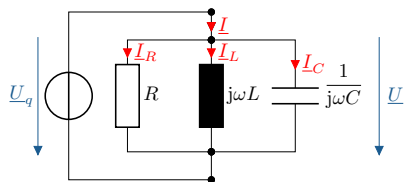
Fall 2: $\omega = \omega_0$ (Resonanzfall)

→ $\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = 0$ rein ohmsch

Fall 3: $\omega > \omega_0$

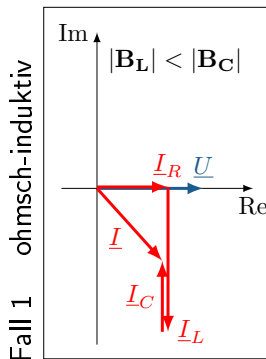
→ $\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) > 0$ ohmsch-kapazitiv

Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm

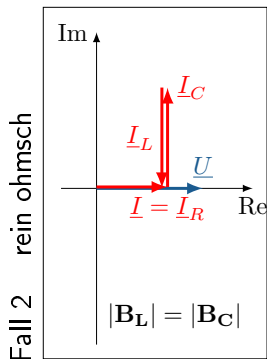


$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C \\ &= \underline{U} \cdot \left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right] \\ &= \underline{U} \cdot \underbrace{\left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]}_{= \text{Im}\{Y\}} \end{aligned}$$

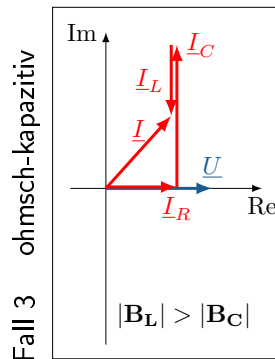
$$\begin{aligned} \underline{U} &= \text{konst.} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned}$$



$$\omega < \omega_0$$

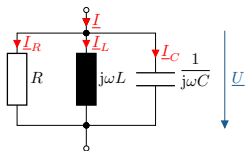


$$\omega = \omega_0$$



$$\omega > \omega_0$$

Fallunterscheidung in Admittanzkurve



$$\underline{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

Resonanzbedingung

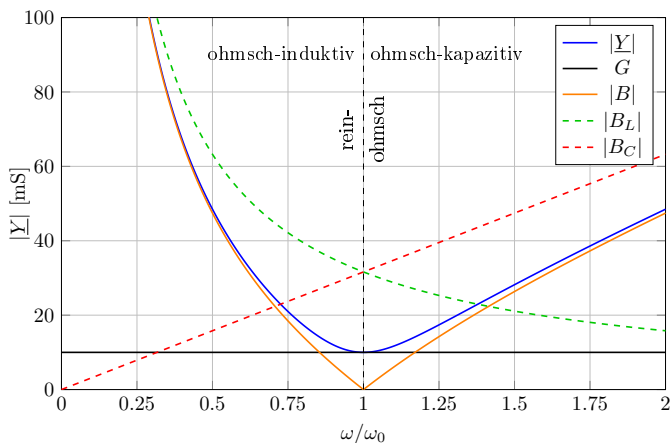
$$\text{Im}\{\underline{Y}\} \stackrel{!}{=} 0$$

Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

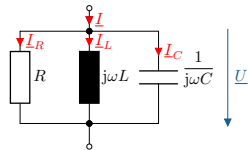
Resonanzadmittanz

$$\underline{Y}_0 = G$$



$$B_k = |B_{C,0}| = |B_{L,0}| = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Parallelschwingkreis



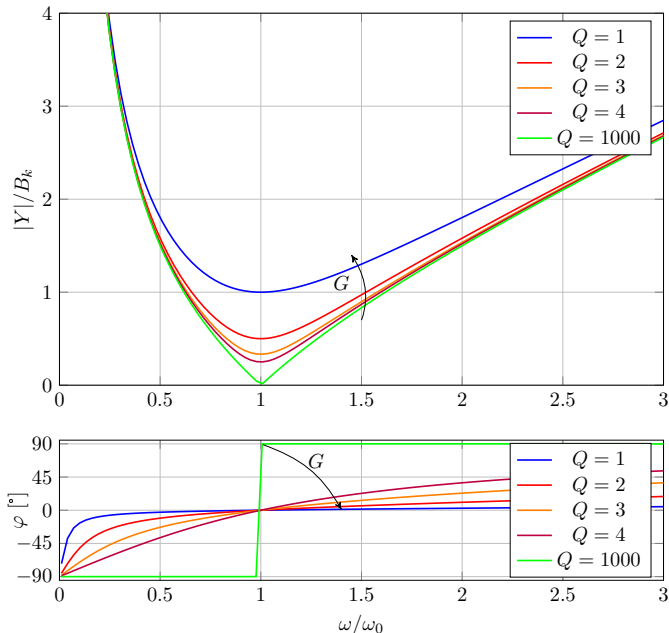
$$\underline{Y} = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

normiert

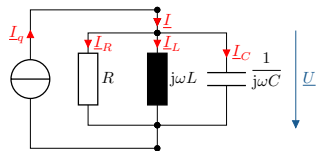
$$\frac{\underline{Y}}{B_k} = \frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Güte und Kennleitwert

$$Q = \frac{B_k}{G} \quad B_k = \sqrt{\frac{C}{L}}$$



Stromresonanz am Beispiel eines RLC-Parallelschwingkreises



$$\underline{U} = \underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C$$

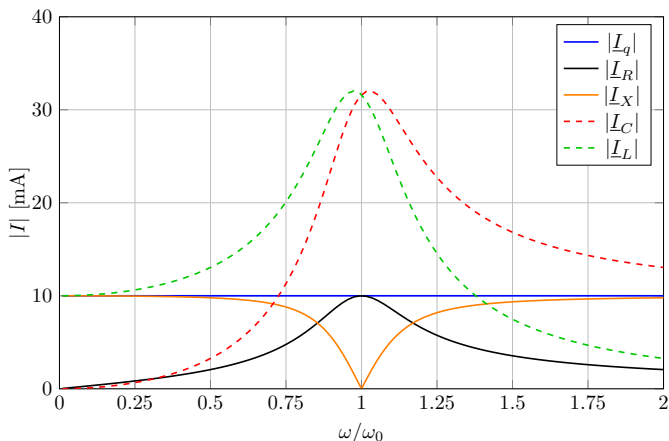
$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I}_q$$

Stromteiler (Bsp.)

$$\frac{\underline{I}_C}{\underline{I}} = \frac{j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

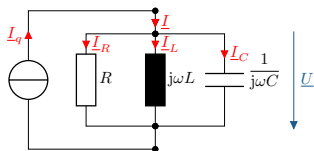
Güte und Überstrom

$$Q = \frac{B_k}{G} = \frac{I_{C,0}}{I} = \frac{I_{L,0}}{I}$$



Stromquelle $I_q(\omega_0) \Rightarrow$ Überstrom!

Spannungskurve des RLC-Parallelschwingkreis II

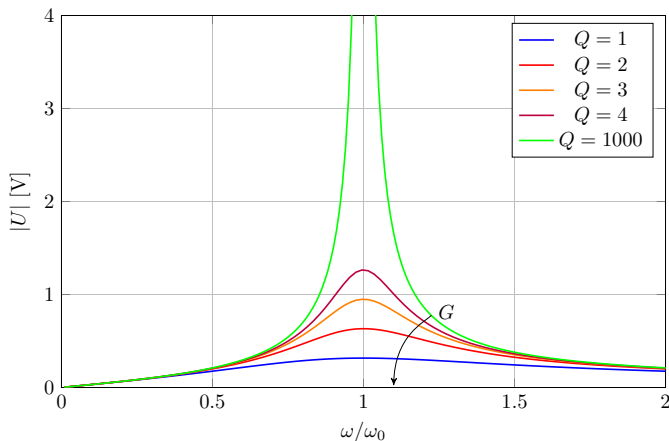


Spannung

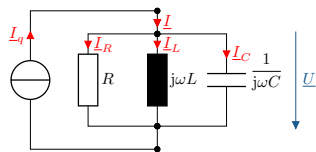
$$\underline{U} = \frac{U_0}{1 + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) Q}$$

Maximalspannung, Güte

$$U_0 = \frac{I_q}{G} \quad Q = \frac{B_k}{G}$$



Spannung maximal bei ω_0
Begrenzung durch G



$$\underline{Y} = G + j(B_L + B_C)$$

$$B_L = -B_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{\omega L}$$

$$B_C = +B_k \frac{\omega}{\omega_0} = \omega C$$

$$B_k = |B_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$Q = \frac{B_k}{G} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_q}{\underline{Y}}$$

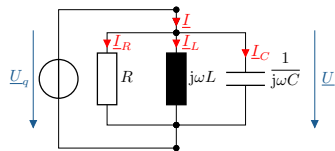
$$= \frac{I_q}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$= \frac{I_q}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k}$$

$$= \frac{I_q}{G} \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \frac{B_k}{G}}$$

$$= U_0 \cdot \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) Q}$$

Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises



Spannungsquelle

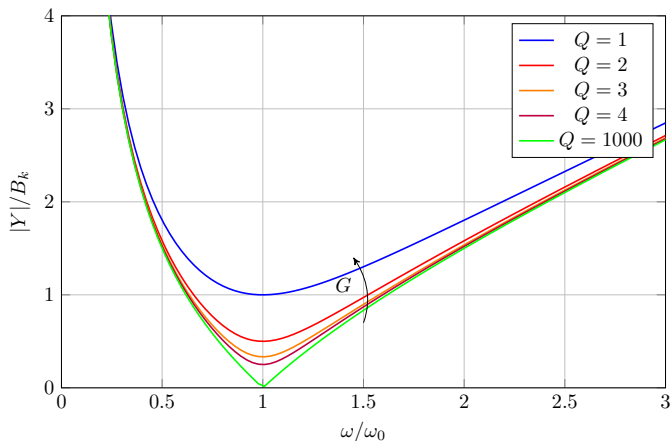
$$\underline{U} = U_q$$

Strom

$$\underline{I} = U_q \cdot \underline{Y}$$

Admittanz

$$\underline{Y} = G + jB$$



Stromkurve \sim Admittanzkurve

