



GET it digital

Modul 8:

Schaltungen variabler Frequenz

Matthias Werle
Tom Bache
Raphael Bechler
Timon Wever

Ein Kooperationsvorhaben
empfohlen durch die

gefördert durch



Ministerium für
Kultur und Wissenschaft
des Landes Nordrhein-Westfalen



Stand: 11. September 2025



Weiternutzung als OER ausdrücklich erlaubt: Dieses Werk und dessen Inhalte sind lizenziert unter CC BY 4.0. Ausgenommen von der Lizenz sind die verwendeten Logos sowie alle anders gekennzeichneten Elemente. Nennung gemäß [TULLU-Regel](#) bitte wie folgt: „GET it digital Modul 8: Schaltungen variabler Frequenz“ von M. Werle, T. Bache, R. Bechler, T. Wever Lizenz: CC BY 4.0.

Der Lizenzvertrag ist hier abrufbar:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>

Das Werk ist online verfügbar unter:

<https://getitdigital.uni-wuppertal.de/module/modul-8-schaltungen-variabler-frequenz>

Inhaltsverzeichnis

1	Wiederholung	1
1.1	Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente	1
1.1.1	Verhalten von Induktivitäten und Kapazitäten	2
1.1.2	Vergleich der linearen Zweipole R , L und C	2
1.2	Zweitore (Vierpole)	3
2	Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang	4
2.1	Definitionen	4
2.2	Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters	5
2.3	Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters	7
2.4	Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters	9
2.5	Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters	10
2.6	Vergleich passive Filter 1. Ordnung mit L und R	11
2.7	Beispiel Filterschaltung: Aufgabe	12
3	Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz	14
3.1	Logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen	17
3.2	Definition Dezibel	17
3.3	Grenzfrequenz einfacher Filterschaltungen	19
3.4	Tiefpass 1. Ordnung	20
3.4.1	Vergleich lineare und logarithmische Darstellung	22
3.4.2	Vergleich Tief- und Hochpass 1. Ordnung	22
3.5	Bandpass, Bandsperre	23
3.5.1	Realisierung: Serien- oder Parallelschaltung von Tief- und Hochpass	24
3.5.2	Bode-Diagramm	24
3.6	Ordnung von Filtern, Beispielfilter höherer Ordnung	25
4	Ortskurven	27
4.1	Definition Ortskurve	27
4.2	Zusammenhang Zeigerdiagramm und Ortskurve	28
4.3	Impedanzortskurve	29
4.4	Admittanzortskurve - Inversion von Ortskurven	30
4.5	Ortskurven von Grundsaltungen	31
5	Resonanzkreise	33
5.1	Resonanzerscheinung	33
5.2	Definitionen	35
5.3	Resonanzfrequenz am Beispiel idealer LC-Schwingkreise	36
5.4	RLC-Reihenschwingkreis - Resonanzverhalten	37
5.4.1	Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm	39
5.4.2	Fallunterscheidung in Impedanzkurve	40
5.4.3	Resonanzkurve und Gütefaktor	41
5.4.4	Spannungsresonanz	43
5.4.5	Stromkurve des RLC-Reihenschwingkreises	46
5.4.6	Spannungskurve des RLC-Reihenschwingkreis	47
5.5	RLC-Parallelschwingkreis - Resonanzverhalten	48
5.5.1	Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm	49
5.5.2	Fallunterscheidung in Admittanzkurve	49
5.5.3	Resonanzkurve und Gütefaktor	50
5.5.4	Stromresonanz am Beispiel eines RLC-Parallelschwingkreises	52
5.5.5	Spannungskurve des RLC-Parallelschwingkreis	54
5.5.6	Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises	56

6 Nebenrechnungen	56
A Übungsaufgaben	57
A.1 RC-Tiefpass 1. Ordnung	57
A.2 RC-Hochpass 1. Ordnung	57
A.3 Frequenzgang eines RLC-Serienschwingkreises	57
A.4 Frequenzgang eines Vierpols aus R, L und C	57
A.5 RLC-Parallelschwingkreis	58
A.6 RC-Filter zweiter Ordnung	58
A.7 Impedanz- und Admittanzortskurve eines RL-Gliedes	58
A.8 Admittanzortskurve gemischter Reihen-/Parallelschaltung	59
A.9 Wechselstrommessbrücke	59
B Lösungen zu den Übungsaufgaben	60
B.1 RC-Tiefpass 1. Ordnung	60
B.2 RC-Hochpass 1. Ordnung	60
B.3 Frequenzgang eines RLC-Serienschwingkreises	60
B.4 Frequenzgang eines Vierpols aus R, L und C	62
B.5 RLC-Parallelschwingkreis	63
B.6 RC-Filter zweiter Ordnung	65
B.7 Impedanz- und Admittanzortskurve eines RL-Gliedes	67
B.8 Admittanzortskurve gemischter Reihen-/Parallelschaltung	67
B.9 Wechselstrommessbrücke	68
Literaturverzeichnis	69
Index	70

1 Wiederholung

Um das frequenz- und zeitabhängige Verhalten elektrischer Netzwerke zu beschreiben, werden in diesem Kapitel kurz einige wichtige Grundlagen zusammengefasst.

Zur Bearbeitung vorausgesetzt werden Kenntnisse über elektrische Grundgrößen, lineare passive Bauteile R , L und C , Netzwerkrechnungen, sowie die komplexe Wechselstromrechnung.

1.1 Frequenzabhängigkeit elektrischer Bauelemente

Rein ohmsche Widerstände R können elektrische keine Energie speichern. Spannungen und Ströme sind proportional zueinander und zu jedem Zeitpunkt in Phase. Das Verhalten ist zeit- und frequenzunabhängig.

Induktivitäten L und Kapazitäten C hingegen können Energie speichern und abgeben. Dieser Vorgang ist inert (träge), benötigt also eine gewisse Zeit. Dadurch verhalten sie sich frequenzabhängig.

Ströme und Spannungen stehen bei Induktivitäten und Kapazitäten in (zeitlich) differentiell linearen Verhältnis zueinander. Dadurch entsteht bei beiden Bauteiltypen eine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom von betragsmäßig 90° .

Abbildung 1.1 zeigt die Spannungs- und Stromverläufe für R , L und C bei Erregung mit einer Wechselspannung $u_q = U \cdot \sin(\omega t)$ zum Vergleich.

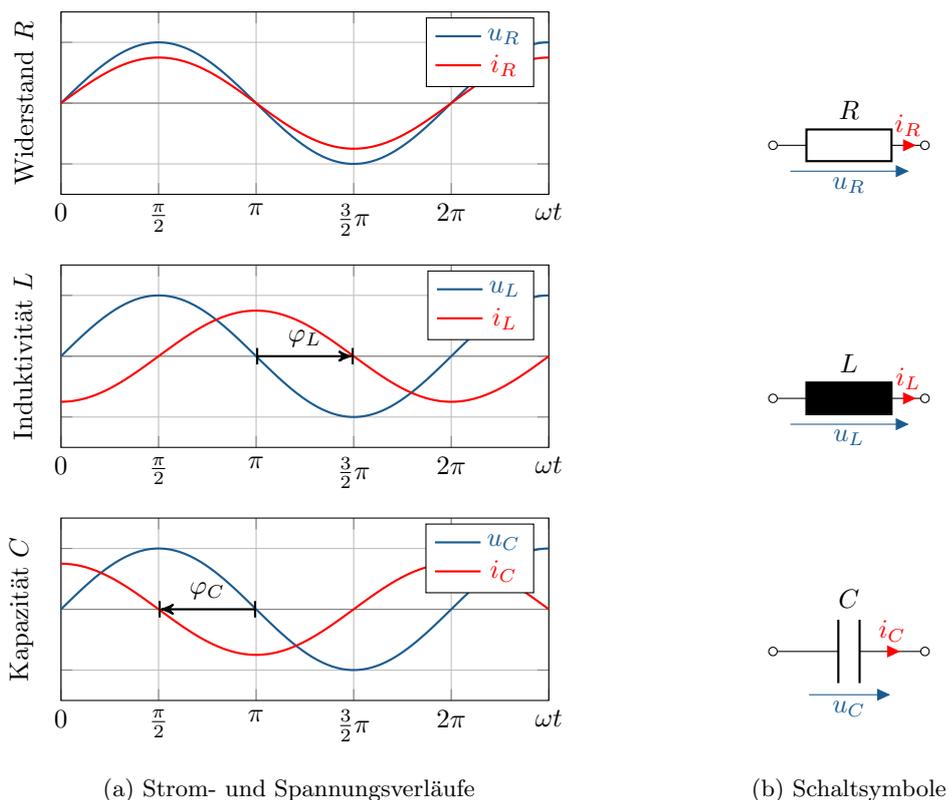


Abbildung 1.1: Phasenverschiebung bei R , L und C

Aufgrund der Phasenverschiebung bei L und C oszilliert deren Leistung (Energieaufnahme und -abgabe), ist über eine Periode gemittelt jedoch immer null. Induktivitäten und Kapazitäten können daher keine Wirkleistung, sondern nur Blindleistung verrichten, weshalb sie auch Blindwiderstände

genannt werden.

1.1.1 Verhalten von Induktivitäten und Kapazitäten

Induktivitäten als ideale Bauteile speichern durch den Effekt der (Selbst-)Induktion Energie im Magnetfeld. Kapazitäten als ideale Bauteile hingegen speichern Energie im elektrischen Feld. Beschrieben werden beide Effekte durch das Induktion- beziehungsweise das Gaußsche Gesetz.

Tabelle 1.1 listet die wichtigsten Unterschiede im Verhalten von Induktivitäten und Kapazitäten qualitativ als Übersicht auf.

Tabelle 1.1: Vergleich von Induktivität und Kapazität im Verhalten

	Induktivität	Kapazität
Gesetz	Induktionsgesetz	Gaußsches Gesetz
Energiespeich.	im Magnetfeld	im Elektr. Feld
stetig	Strom	Spannung
bei Gleichspg.	Kurzschluss	offen
bei Hochfreq.	offen	Kurzschluss

Die (Selbst-)Induktivität L als Eigenschaft kann vereinfacht als „Trägheit“ des Stroms betrachtet werden. Ströme in Induktivitäten sind stetig und eilen der Spannung hinterher. Bei hohen Frequenzen sperrt die Induktivität, bei Gleichspannung verhält sie sich wie ein Kurzschluss.

Die Kapazität C kann dem gegenüber vereinfacht als „Trägheit“ der Spannung betrachtet werden. Spannungen in Kapazitäten sind stetig und eilen dem Strom hinterher. Bei Gleichstrom sperrt die Kapazität, bei hohen Frequenzen verhält sie sich wie ein Kurzschluss.



Abbildung 1.2: Reale Induktivität (Spule, links) und Kapazitäten (Kondensator, rechts)

Abbildung 1.2 zeigt reale Bauteile, die Induktivitäten und Kapazitäten realisieren. Gezeigt sind eine Spule (Induktivität) und ein Kondensator (Kapazität).

1.1.2 Vergleich der linearen Zweipole R , L und C

1.2 zeigt eine Gegenüberstellung der Größen R , L und C und fasst deren wichtigsten Eigenschaften zusammen.

Tabelle 1.2: Vergleich lineare Bauteile R, L, C

Größe	Allgemein	El. Widerstand	Induktivität	Kapazität
Symbol				
Einheit	[Form.z.] = Einheit	$[R] = \Omega$ (Ohm)	$[L] = \text{H}$ (Henry)	$[C] = \text{F}$ (Farad)
Zeitbereich	$\frac{d}{dt}$ bzw. $\int dt$	$u_R = R \cdot i_R$	$u_L = L \cdot \frac{d}{dt} i_L$	$i_C = C \cdot \frac{d}{dt} u_C$
Frequenzb.	$j\omega$ bzw. $\frac{1}{j\omega}$	$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R$	$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I}_L$	$\underline{I}_C = j\omega C \cdot \underline{U}_C$
Impedanz	$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$
Wirkanteil	$R = \text{Re}\{\underline{Z}\}$	$R = \frac{U}{I}$	0	0
Blindanteil	$X = \text{Im}\{\underline{Z}\}$	0	$X_L = \omega L$	$X_C = -\frac{1}{\omega C}$

1.2 Zweitore (Vierpole)

Die Frequenzabhängigkeit von Eintoren (Zweipole) haben wir in Modul 3 bereits untersucht. Mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung konnten wir den frequenzabhängigen Wechselstromwiderstand (Impedanz) \underline{Z} einzelner Eintore bestimmen. Durch Anwendung der komplexen Strom- und Spannungssteilerregel konnten wir auch die Gesamt-Impedanz linearer zweipoliger Netzwerke bestimmen. Das heißt für solche, welche nur aus linearen Bauteilen wie R, L und C bestehen.



Abbildung 1.3: Vergleich: Schaltzeichen eines allgemeinen Zwei- und Vierpols

Zweitore (Vierpole) sind eine Erweiterung von Eintoren (Zweipolen). Sie verfügen über eine Eingangs- und eine Ausgangsseite mit jeweiligen Eingangs- und Ausgangsgrößen. Das Zweitormodell eignet sich gut zur Beschreibung von (frequenzabhängigen) Übertragungseigenschaften von elektrischen Netzwerken.

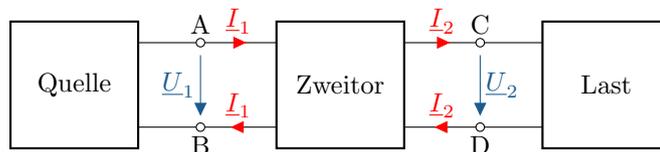


Abbildung 1.4: Verbindung einer Last über ein Zweitort mit der Quelle.

Im einfachsten Fall wird wie in 1.4 gezeigt, eine Quelle (Eintor) über ein Zweitort mit einer Last (Eintor) verbunden. Typische Zweitore sind beispielsweise Verstärker, Filter oder auch Transformatoren.

2 Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang von Zweitoren. Diese dienen zur Beschreibung des frequenzvariablen Verhaltens elektrischer Netze in Form von Zweitoren wie in Abbildung 2.1 gezeigt. Am Beispiel einfacher passiver Filterschaltungen werden wir die Begriffe Frequenz-, Amplituden- und Phasengang einführen und deren Bedeutung und Anwendung erläutern.

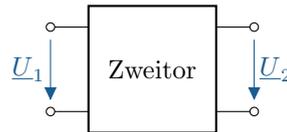


Abbildung 2.1: Schaltsymbol eines Zweitors (Vierpols) mit Eingang (links) und Ausgang (rechts)

Lernziele: Frequenzgang, Amplitudengang, Phasengang

Studierende lernen:

- Frequenzgänge anhand der Schaltungstopologie algebraisch zu bestimmen
- die Funktionsweise einfacher Hoch- und Tiefpassfiltern zu verstehen
- das Grenzverhalten von Vierpolen anhand ihrer Frequenzgänge zu analysieren

2.1 Definition Frequenzgang, Amplitudengang und Phasengang

Der **Frequenzgang** $\underline{F}(j\omega)$, auch komplexer Amplitudengang genannt, beschreibt das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal eines linearen zeitinvarianten Systems (LZI-System) bei sinusförmiger Anregung. Er bietet eine Möglichkeit frequenzabhängiges Verhalten von Zweitoren zu untersuchen, ist ein Spezialfall der Laplace-Übertragungsfunktion aus der Systemtheorie und wird wie folgt definiert:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \quad (2.1)$$

Aufgrund der Linearität von LZI-Systemen bleiben Frequenz und Sinusform am Ausgang erhalten. Amplitude und Phase können sich in Abhängigkeit der Frequenz vom Eingang zum Ausgang ändern. Erkennbar ist dies insbesondere in der Schreibweise in Polarkoordinaten.

$$\underline{F}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.2)$$

Der **Amplitudengang** $A(\omega)$ beschreibt die relative Amplitudenänderung zwischen Aus- und Eingangsspannung und entspricht dem Betrag des Frequenzganges. Der **Phasengang** $\varphi(\omega)$ hingegen, beschreibt die absolute Phasenänderung zwischen Aus- und Eingangsspannung und entspricht der Phase des Frequenzganges. Über $\underline{F}(j\omega)$ können wir beide wie folgt definieren:

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\})^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\})^2} = \frac{|\underline{U}_2|}{|\underline{U}_1|} \quad (2.3)$$

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(j\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\{\underline{F}(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{\underline{F}(j\omega)\}}\right) = \angle \underline{U}_2 - \angle \underline{U}_1 \quad (2.4)$$

2.2 Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters

Das Zweitor in Abbildung 2.2 stellt einen einfachen Tiefpass-Filter (kurz Tiefpass) dar. Der Name Tiefpass leitet sich von dem Verhalten her, dass Signale tiefer Frequenzen nahezu unverändert passieren, Signale hoher Frequenzen jedoch stark gedämpft (gefiltert) werden. Die Funktionsweise und das Verhalten des Tiefpasses lassen sich gut mittels einer Frequenzganganalyse veranschaulichen.

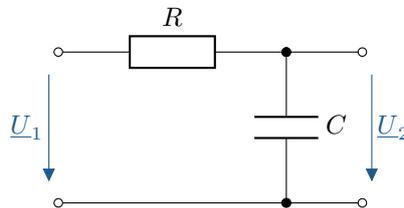


Abbildung 2.2: Schaltbild, RC-Tiefpass 1. Ordnung

Der gezeigte Tiefpass besteht aus einer Serienschaltung aus R und C mit Eingangsspannung \underline{U}_1 über beiden Elementen und Ausgangsspannung \underline{U}_2 über C . Da die Einzelelemente R und C lineare, zeitinvariante (LZI-)Bauteile sind, ist auch der daraus zusammen gesetzte Tiefpass ein LZI-System. Das bedeutet, dass bei Anregung der Schaltung mit einer sinusförmigen Eingangsspannung $u_1(t)$ (links), die Ausgangsspannung $u_2(t)$ (rechts) ebenfalls sinusförmig ist und die gleiche Frequenz besitzt wie die Eingangsspannung.

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) \\ \xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) &= \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die LZI-Eigenschaft ist Voraussetzung zur Bestimmung des Frequenzganges und die Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung. Zusätzliche Voraussetzung ist die Annahme einer sinusförmigen Anregung im eingeschwungenen Zustand, von der wir zwecks Analyse ausgehen. Statt der Ein- und Ausgangsspannung $u_1(t)$ und $u_2(t)$ im Zeitbereich betrachten wir die entsprechende komplexe Ein- und Ausgangsspannung \underline{U}_1 und \underline{U}_2 im Frequenzbereich wie im Schaltbild dargestellt.

Der Frequenzgang $\underline{F}(j\omega)$ entspricht nach Gleichung 2.1 dem komplexen Spannungsverhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung $\underline{U}_2/\underline{U}_1$. Gemäß komplexer Spannungsteilerregel entspricht das Spannungsverhältnis dem Verhältnis der Impedanz am Ausgang (Impedanz der Kapazität) und der Impedanz am Eingang (Summe der Impedanz von Kapazität und Widerstand), kurz $\frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C}$.

Gleichung 2.6 zeigt den ermittelten Frequenzgang des Tiefpasses. Zur Vereinfachung wurden Nenner und Zähler rationalisiert, der Nenner sortiert und der Term (optional) in kartesische Koordinaten umgeformt. (Vergleich kommentierte Nebenrechnung 6.1):

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR + 1} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Damit haben wir den $\underline{F}(j\omega)$ in Abhängigkeit von ω und den Bauteilgrößen C und R ermittelt. Mittels Betragsbildung lässt sich daraus gemäß (2.3) der Amplitudengang und durch Phasenberechnung gemäß (2.4) der Phasengang bestimmen.

Zur Betragsbildung bietet sich die Form $\frac{1}{1+j\omega CR}$ an. Da der Betrag im Zähler direkt ablesbar 1 beträgt, muss nur der Betrag im Nenner bestimmen werden wie sie in (2.7) gezeigt ist. Alternativ kann auch die kartesische Form aus (2.6) in (2.3) eingesetzt werden.

Für den Phasengang $\varphi(\omega)$ bietet sich die kartesische Schreibweise in der Form $\frac{1-j\omega CR}{1+(\omega CR)^2}$ an. In dieser lassen sich der Real- und Imaginärteil leicht ablesen. Der Nenner hat dabei als rein reelle Größe keinen Einfluss auf die Phasenlage wie in (2.8) gezeigt ist.

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+j\omega CR} \right| = \frac{1}{|1+j\omega CR|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \quad (2.7)$$

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(j\omega) = \angle \left(\frac{1-j\omega CR}{1+(\omega CR)^2} \right) = \arctan \left(\frac{-\omega CR}{\frac{1+(\omega CR)^2}{1+(\omega CR)^2}} \right) = \arctan(-\omega CR) \quad (2.8)$$

Alternativ kann der Phasengang auch aus der nicht kartesischen Form des Frequenzganges bestimmt werden. Der Phasengang ergibt sich aus der Phasenlage des Zählers subtrahiert mit der Phasenlage des Nenners:

$$\varphi(\omega) = \angle \left(\frac{1}{1+j\omega CR} \right) = \underbrace{\arctan \left(\frac{0}{1} \right)}_{\varphi_{\text{Zähler}}} - \underbrace{\arctan \left(\frac{\omega CR}{1} \right)}_{\varphi_{\text{Nenner}}} = \arctan(-\omega CR) \quad (2.9)$$

Die Herangehensweise bietet sich vor allem an, wenn sich Betrag und/oder Phase des Zählers direkt ablesen lassen. Dadurch kann ein Rechenschritt zum Umrechnen in kartesische Koordinaten gespart werden.

Im folgenden Exkurs wird die separate Betrachtung von Zähler und Nenner von Frequenzgängen näher erläutert:

Exkurs Berechnung komplexer Zahlen in (kartesischen) Descartes- und Polar-Koordinaten

Der Frequenzgang nimmt in der Regel die Form eines komplexen gebrochen rationalen Bruches an. Das bedeutet, dass sowohl Nenner als auch Zähler sich als komplexe Polynome darstellen lassen:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{F}_Z(j\omega)}{\underline{F}_N(j\omega)} = \frac{a_n \omega^n + \dots + a_1 \omega + a_0}{b_m \omega^m + \dots + b_1 \omega + b_0} \quad \text{mit} \quad a_i, b_j \in \mathbb{C} \quad n, m, \omega \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

Liegt $\underline{F}(j\omega)$ nun als komplexer Bruch vor mit Zähler und Nenner in kartesischen Koordinaten, so können wir $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ durch separate Betragsbildung und Phasenberechnung von Zähler und Nenner bestimmen. Hierfür werden die Formeln aus (2.3) und (2.4) für Zähler (Index Z) und Nenner (Index N) angewandt. Da Amplituden- und der Phasengang wie in (2.2) gezeigt die Polar-Koordinaten (Amplitude und Phase) des Frequenzganges darstellen ergibt sich folgendes Berechnungsschema:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{F}_Z(j\omega)}{\underline{F}_N(j\omega)} = \frac{|\underline{F}_Z| \cdot e^{j\angle \underline{F}_Z}}{|\underline{F}_N| \cdot e^{j\angle \underline{F}_N}} = \frac{A_Z}{A_N} \cdot e^{j(\varphi_Z - \varphi_N)} \quad (2.11)$$

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \frac{|\underline{F}_Z|}{|\underline{F}_N|} = \frac{A_Z}{A_N} \quad (2.12)$$

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(j\omega) = \angle \underline{F}_Z - \angle \underline{F}_N = \varphi_Z - \varphi_N \quad (2.13)$$

Im Allgemeinen bietet sich für Multiplikationen und Divisionen komplexer Zahlen die Berechnung in Polarkoordinaten (mit Betrag und Argument) an. Eine Multiplikation/Division führt bei komplexen Zahlen zur Multiplikation/Division der Beträge und Addition/Subtraktion der Argumente. Bei Additionen und Subtraktionen eignet sich die kartesische Form mit Real- und Imaginärteil besser für Berechnungen, da diese direkt addiert/subtrahiert werden können.

2.3 Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Tiefpass-Filters

In diesem Kapitel wird das Grenzverhalten des Tiefpass-Filters 1. Ordnung aus dem vorigen Kapitel (s. Abbildung 2.2) für sehr hohe und sehr niedrige Frequenzen untersucht. Dazu werden die Grenzwerte des Amplitudengangs $A(\omega)$ und des Phasengangs $\varphi(\omega)$ bestimmt, sowie die Ergebnisse beschrieben, interpretiert und grafisch dargestellt.

Grenzwerte:

Für den Amplitudengang aus Gleichung 2.7 ergeben sich für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$ die folgenden Grenzwerte:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{1} = 1 \quad (2.14)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\infty}} = 0$$

Für den Phasengang aus Gleichung 2.8 ergeben sich analog dazu die Grenzwerte:

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega CR)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ \quad (2.15)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$

An Gleichung 2.20 ist zu erkennen, dass der Tiefpass bei sehr niedrigen Frequenzen kaum dämpft ($A(\omega) \rightarrow 1$), bei sehr hohen Frequenzen hingegen stark dämpft ($A(\omega) \rightarrow 0$).

An Gleichung 2.21 ist zu erkennen, dass der Tiefpass bei sehr niedrigen Frequenzen (bei kaum Dämpfung) kaum Phasenverschiebung aufweist ($\varphi(\omega) \rightarrow 0^\circ$), bei sehr hohen Frequenzen (starke Dämpfung) hingegen eine Phasenverschiebung bis -90° aufweist.

Erklärung des Grenzverhaltens anhand des Schaltbildes:

Das Grenzverhalten bezüglich Amplitudenänderung und Phasenverschiebung lässt sich gut anhand des Schaltbildes 2.2 erklären.

Im Grenzfall einer Gleichspannung ($f = 0$) am Eingang sperrt die Kapazität ($X_C \rightarrow \infty$). Ihr Verhalten entspricht hier zwei offenen Klemmen, wodurch die gesamte Eingangsspannung am Ausgang U_2

über der Kapazität C anliegt. Die relative Amplitudenänderung beträgt daher 1 (ungedämpft) und die Phasenverschiebung 0° (in Phase).

Bei sehr hohen Frequenzen ($f \rightarrow \infty$) verhält sich die Kapazität wie ein Kurzschluss ($X_C \rightarrow 0$). Damit geht die Ausgangsspannung gegen null (starke Dämpfung, $A \rightarrow 0$) und die Eingangsspannung liegt annähernd vollständig über R an. Eingangsspannung und Strom liegen dadurch näherungsweise in Phase. Die Phasenverschiebung von Ausgangsspannung über der Kapazität zu Eingangsspannung beträgt dadurch näherungsweise -90° .

Visualisierung:

Um eine Vorstellung des Verhaltens von Amplituden- und Phasengang zu bekommen, können wir die Funktionen graphisch darstellen.

Der Amplitudengang $A(\omega)$ und der Phasengang $\varphi(\omega)$ sind in Abbildung 2.3a und 2.3b dargestellt. Beide Graphen sind mit linearen Skalen dargestellt, wobei die Skalierungen beider x-Achsen für ω [Hz] identisch sind. Eine Veränderung des Faktors CR führt in linearer Darstellung lediglich zu einer Stauchung oder Streckung der Graphen in x-Richtung, weshalb auf eine explizite Angabe der Werte verzichtet wurde.

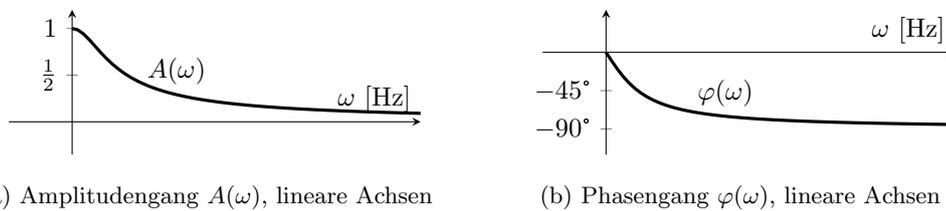


Abbildung 2.3: Lineardarstellung des Amplitudengangs und Phasengangs eines Tiefpass 1. Ordnung

In Kapitel 3 wird die Darstellung des Frequenzganges mit logarithmischer Skala eingeführt. Auch die Definition der **Grenzfrequenz** f_g (respektive der Grenzkreisfrequenz ω_g) zur Unterteilung des Frequenzbereichs in einen **Durchlassbereich** und einen **Sperrbereich** wird dort erläutert.

Exkurs zur Herleitung der Graphenform:

Die Graphenform des Amplitudengangs $A(\omega)$ in linearer Darstellung lässt sich daran erklären, dass dieser sich für sehr niedrige Frequenzen ($f \rightarrow 0$) der waagrecht Geraden $A = 1$ annähert und für sehr hohe Frequenzen ($f \rightarrow \infty$) der Potenzfunktion $\frac{1}{\omega CR}$ annähert. Abbildung 2.4 zeigt diese Näherungen für $A(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ mit $x = \omega CR$.

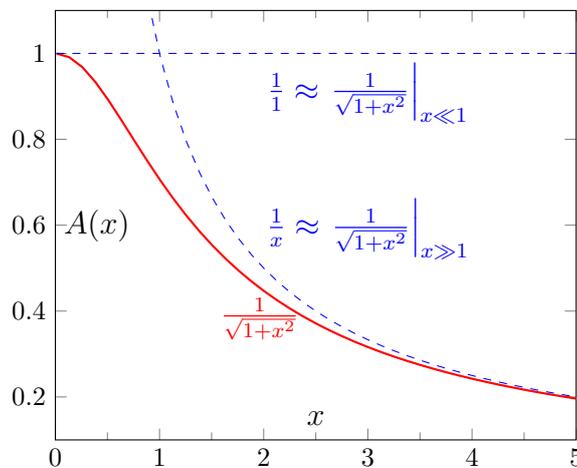


Abbildung 2.4: Amplitudengang Tiefpass 1. Ordnung, lineare Achsen, Näherungen mit $x = \omega CR$

Die Form des Phasenganges lässt sich leicht aus der Form einer (Arcus-)Tangensfunktion ableiten. Abbildung 2.5 zeigt die Tangensfunktion und dessen Umkehrfunktion Arcustangens, sowie deren jeweiligen Spiegelungen an der y-Achse in linearer Darstellung.

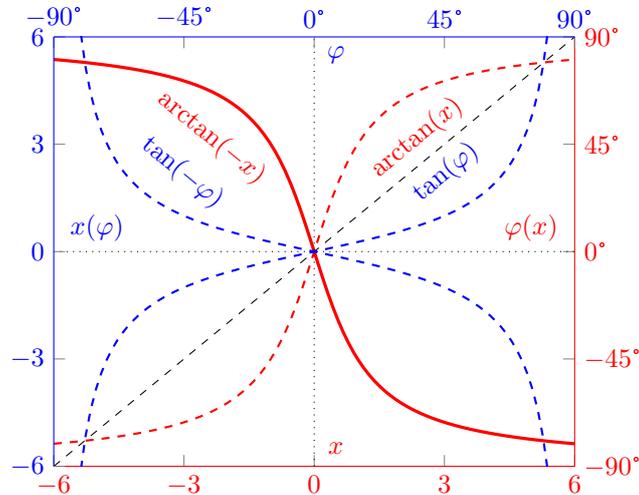


Abbildung 2.5: Phasengang Tiefpass 1. Ordnung, lineare Achsen, Vergleich Tangens/Arcustangens

Die Umkehrung der jeweiligen Funktion ist durch Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden (schwarz gestrichelte Gerade) und Tausch der x- und y-Achse erreichbar, vorausgesetzt die jeweilige Funktion ist stetig monoton wachsend oder stetig monoton fallend. Der Tangens ist daher zur Bildung des Arcustangens auf den Winkelbereich -90° bis $+90^\circ$ beschränkt bei einem Wertebereich von $-\infty$ bis $+\infty$. Aufgrund der nicht darstellbaren Polstellen ist der dargestellte Wertebereich auf -6 bis $+6$ beschränkt.

Der Phasengang des Tiefpass 1. Ordnung entspricht dem abgebildeten $\arctan(-x)$ für $x = \omega CR > 0$. Da es physikalisch keine negativen Frequenzen gibt, gilt $\omega > 0 \rightarrow x > 0$, wodurch der Wertebereich des Phasengangs nur den halben Wertebereich des Arcustangens abdeckt, also von -90° bis 0° .

2.4 Frequenzgang am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters

Ein Hochpass-Filter (kurz Hochpass) funktioniert ähnlich einem Tiefpass-Filter. Dem Namen entsprechend passieren beim Hochpass jedoch Signale hoher Frequenzen nahezu ungedämpft (ungefiltert), während Signale niedriger Frequenzen stark gedämpft (gefiltert) werden.

Abbildung 2.6 zeigt exemplarisch einen RC-Hochpass erster Ordnung, der im Folgenden näher untersucht wird. Der Hochpass besteht aus einer einfachen Serienschaltung von Widerstand R und Kapazität C . Die Eingangsspannung \underline{U}_1 liegt über R und C in Reihe an, während die Ausgangsspannung \underline{U}_2 über R abgegriffen wird. Der Aufbau ist identisch mit dem RC-Tiefpass erster Ordnung, nur dass die Ausgangsspannung über R statt über C anliegt.

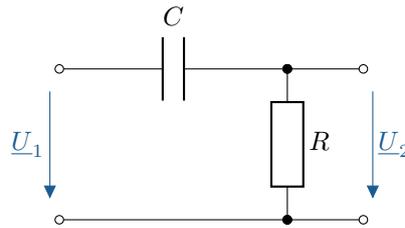


Abbildung 2.6: Schaltbild, RC-Hochpass 1. Ordnung

Die Herleitung des Frequenzganges erfolgt analog zum Vorgehen beim Tiefpass in Kapitel 2.2. Da es sich beim Hochpass um ein LZI-System handelt gilt:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) \\ \xrightarrow{\text{LZI}} u_2(t) &= \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Das heißt, bei sinusförmiger Eingangsspannung $u_1(t)$, ist auch die Ausgangsspannung $u_2(t)$ sinusförmig mit gleicher Frequenz wie die Eingangsspannung.

Der Frequenzgang lässt sich dadurch gemäß Gleichung 2.1 bestimmen, indem die komplexe Wechselspannungen \underline{U}_2 am Ausgang und \underline{U}_1 am Eingang ins Verhältnis gesetzt werden. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} \\ &= \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega CR}} = \frac{1 + j \frac{1}{\omega CR}}{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Für den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\varphi(\omega)$ ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$A(\omega) = |\underline{F}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 - j \frac{1}{\omega CR}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}}} \quad (2.18)$$

$$\varphi(\omega) = \angle \underline{F}(j\omega) = \angle \left(\frac{1 + j \frac{1}{\omega CR}}{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}} \right) = \arctan \left(\frac{1}{\omega CR} \right) \quad (2.19)$$

2.5 Grenzverhalten am Beispiel eines einfachen Hochpass-Filters

Das Grenzverhalten des Hochpass-Filters 1. Ordnung aus Kapitel 2.4 wird in diesem Kapitel für sehr hohe und sehr niedrige Frequenzen untersucht. Die Grenzwertbestimmung des Amplitudengangs $A(\omega)$ und des Phasengangs $\varphi(\omega)$ erfolgt analog zu der des Tiefpass-Filter wie in Kapitel 2.3 beschrieben.

Grenzwerte:

Für den Amplitudengang aus Gleichung 2.18 ergeben sich die folgenden Grenzwerte für $f \rightarrow 0$ und $f \rightarrow \infty$:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (2.20)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Für den Phasengang aus Gleichung 2.19 folgt analog dazu:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(\infty) = +90^\circ \quad (2.21)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0^\circ$$

Das heißt, bei sehr niedrigen Frequenzen dämpft der Hochpass stark ($A(\omega) \rightarrow 0$) mit Phasenverschiebung bis $+90^\circ$ und bei sehr hohen Frequenzen kaum ($A(\omega) \rightarrow 1$) mit Phasenverschiebung bis 0° .

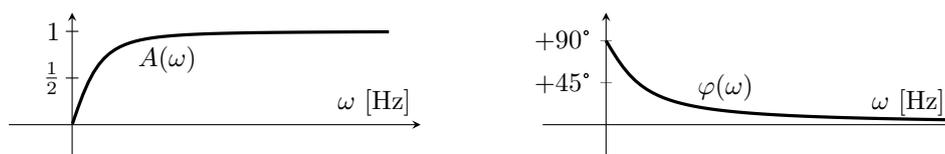
Anhand des Schaltbildes 2.6 lässt sich dieses Grenzverhalten gut erklären. Bei Gleichspannung ($f = 0$) sperrt die Kapazität, wodurch die gesamte Eingangsspannung über dieser abfällt.

Bei sehr kleinen Frequenzen ($f \rightarrow 0$) liegt die Eingangsspannung näherungsweise vollständig über der Kapazität an. Der Strom eilt der Eingangsspannung bis $+90^\circ$ voraus, wodurch sich eine positive Phasenverschiebung bis $+90^\circ$ zur Ausgangsspannung über dem Widerstand ergibt.

Bei sehr hohen Frequenzen ($f \rightarrow \infty$) verhält sich die Kapazität wie ein Kurzschluss, wodurch die Eingangsspannung näherungsweise vollständig über dem Widerstand am Ausgang anliegt. Dadurch sind Ausgangs- und Eingangsspannung näherungsweise gleich in Amplitude und in Phase.

Visualisierung:

Abbildung 2.7 zeigt den Amplitudengang $A(\omega)$ und den Phasengang $\varphi(\omega)$ des Hochpass 1. Ordnung in linearer Darstellung mit gleicher Skalierung und gleichem Wertebereich für die x-Achsen.



(a) Amplitudengang $A(\omega)$, lineare Achsen

(b) Phasengang $\varphi(\omega)$, lineare Achsen

Abbildung 2.7: Lineardarstellung des Amplitudengang und Phasengang eines Hochpass 1. Ordnung

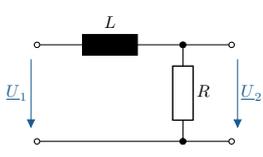
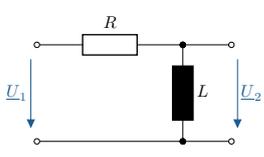
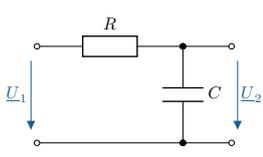
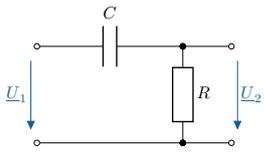
Eine logarithmische Darstellung des Frequenzganges wird in Kapitel 3.4.2 eingeführt.

2.6 Vergleich passive Filter 1. Ordnung mit L und R

Tiefpass und Hochpass lassen sich auch mit einer Induktivität L und einem Widerstand R realisieren. In Tabelle 2.1 sind die Schaltbilder für RL-Filter 1. Ordnung und ihre RC-Pendants gegenübergestellt. Zudem ist zu jedem Schaltbild die Formel für den Frequenzgang aufgeführt.

Im Vergleich der Schaltbilder ist zu erkennen, dass die RL- und RC-Varianten sich lediglich in der Anordnung von L und R beziehungsweise R und C unterscheiden. Die Frequenzgänge der RL- und

Tabelle 2.1: Vergleich Schaltbild und Frequenzgang für RL- und RC-Filter 1. Ordnung

	Tiefpass	$\underline{F}(j\omega)$	Hochpass	$\underline{F}(j\omega)$	ω_g
RL		$\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$		$\frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}}$	$\frac{R}{L}$
RC		$\frac{1}{1 + j\omega CR}$		$\frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega CR}}$	$\frac{1}{CR}$

RC-Varianten unterscheiden sich nur im Faktor $\frac{L}{R}$ und CR vor ω voneinander. Wie in Kapitel 3.3 noch näher erläutert wird, entspricht dieser Faktor dem Kehrwert der Grenzkreisfrequenz ω_g , welche vollständigshalber mit in der Tabelle aufgeführt ist.

2.7 Beispiel Filterschaltung: Aufgabe

Beispiel 2.1: Filterschaltung: Aufgabe

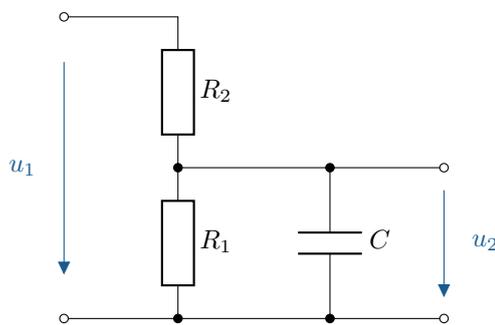


Abbildung 2.8: Filterschaltung, passiv

Aufgabe:

- Leiten Sie $\underline{F}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}$ allgemein her.
- Zeichnen Sie Betrag und Phase von $\underline{F}(j\omega)$ für:

$$R_1 = 900 \, \Omega$$

$$R_2 = 100 \, \Omega$$

$$C = 1,25 \, \mu\text{F}$$

- Bei welcher Frequenz f ist $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$? Welche Phasenverschiebung besitzt u_2 nun gegenüber u_1 ?

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) & \underline{U}_1 &= \hat{U}_1 \\ u_2(t) &= \hat{U}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi) & \underline{U}_2 &= \hat{U}_2 \cdot e^{j\varphi} \end{aligned}$$

Beispiel 2.2: Filterschaltung: Lösung

Lösung a) Frequenzgang allgemein

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{R_1 \parallel Z_C}{R_2 + (R_1 \parallel Z_C)} = \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{R_1}{j\omega C}} \cdot \frac{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1 \cdot R_2 + \frac{R_2}{j\omega C} + \frac{R_1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2} \hat{=} \frac{a + jb}{c + jd} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{R_1(R_1 + R_2) - j\omega C R_1^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2} \quad (\text{kartesisch}) \quad \hat{=} \frac{a' + jb'}{c'} \quad a', b', c' \in \mathbb{R}$$

Betrag: $|A(\omega)| = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$ mit $|\underline{F}(j\omega)| = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}$

Phase: $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega C R_1^2 R_2}{R_1(R_1 + R_2)}\right)$ mit $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{b'}{a'}\right)$
 $= \arctan\left(\frac{-\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$

Altern.: $\varphi(\omega) = \arctan(0) - \arctan\left(\frac{\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$ mit $\varphi(\omega) = \overbrace{\arctan\left(\frac{b}{a}\right)}^{\varphi_Z} - \overbrace{\arctan\left(\frac{d}{c}\right)}^{\varphi_N}$

Lösung b) Grenzverhalten und Skizze

$$A(\omega) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega C R_1 R_2)^2}}$$

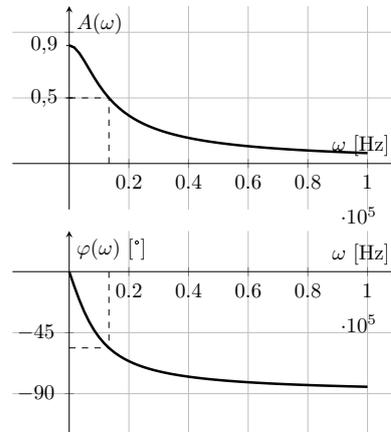
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0,9$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{R_1}{\infty} = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \arctan(-\infty) = -90^\circ$$



Lösung c) Bestimmten Arbeitspunkt ermitteln

Ges.: Frequenz f_1 bei der $\hat{U}_2 = \frac{1}{2}\hat{U}_1$ und Phasenverschiebung u_2 zu u_1 bei f_1 :

$$A(\omega_1) = \frac{R_1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad A(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \Big|_{f=f_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2}{R_1^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad (R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2$$

$$\Rightarrow (\omega_1 C R_1 R_2)^2 = 4R_1^2 - (R_1 + R_2)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \pm \frac{\sqrt{4R_1^2 - (R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2)}}{C R_1 R_2}$$

$$\omega_1 = 1,3304 \cdot 10^4 \frac{1}{s}, f_1 = 2,117 \text{ kHz} \quad \text{mit} \quad \omega_1 < 0 \text{ unphysikalisch, } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\varphi(\omega_1) = \arctan(-1,4967) = -56,25^\circ \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{F\}}{\text{Re}\{F\}}\right)$$

3 Logarithmische Darstellung, Frequenzgang, Grenzfrequenz

In der Elektrotechnik und Nachrichtentechnik werden häufig logarithmische Skalen verwendet, um den Frequenzgang von Filtern und Verstärkern darzustellen. Die logarithmische Darstellung ermöglicht eine bessere Übersicht über das Verhalten des Systems im gesamten Frequenzbereich.

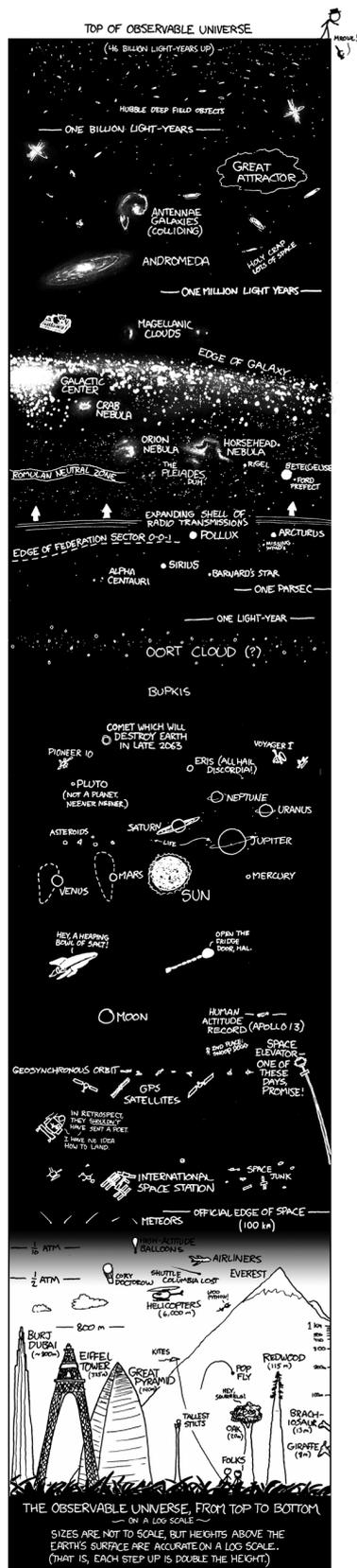
Abbildung 3.1 zeigt zwei Comic-Strips von XKCD, die die Vorteile der logarithmischen Darstellung humorvoll darstellen.

In diesem Kapitel werden wir uns mit der logarithmischen Darstellung von Frequenzgängen in Form sogenannter Bode-Diagramme beschäftigen. Zur Beschreibung des Frequenzganges einfacher Filterschaltungen werden die Einheit Dezibel, sowie die Grenzfrequenz und die Ordnung von Filtern definiert. Darüber hinaus werden Bandpass- und Bandsperfilter vorgestellt.

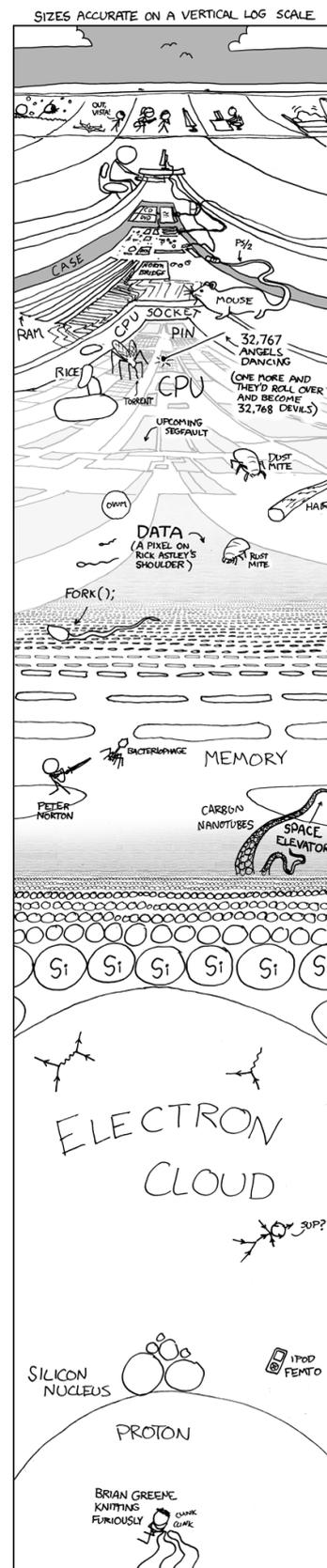
Lernziele: Logarithmische Darstellung, Frequenzgang

Studierende lernen:

- Unterschiede zwischen linearer und logarithmischer Darstellung kennen.
- Dezibel als Einheit kennen und zu verwenden.
- Grenzfrequenzen von Filterschaltungen kennen und zu bestimmen.
- Bodediagramme zu konstruieren und zu interpretieren.
- Funktionsweise von Bandpass- und Bandsperfilter kennen und verstehen.
- Aufbau und Verhalten von Filtern höherer Ordnung kennen und verstehen.



(a) Comic *Height*, Log-Skala Höhe[1, #482]



(b) Comic *Depth*, Log-Skala Tiefe[1, #485]

Abbildung 3.1: xkcd Comics zu logarithmischen Darstellungen von Größen

3.1 Logarithmische Darstellung von Potenzfunktionen

In der logarithmischen Darstellung wird eine logarithmische Skala für eine oder mehrere Achsen verwendet. Eine lineare Zunahme von abzubildenden Werten korrespondiert hierbei mit einer logarithmischen Zunahme der Distanz auf der Skala. Anschaulicher im Umkehrschluss: Bei linearer Zunahme der Distanz auf der Skala steigt die Potenz der abzubildenden Werte im selben Maß linear an.

Logarithmische Skalen bieten sich im Allgemeinen an, um Wertebereiche über mehrere Größenordnungen darzustellen. Eine Besonderheit in der doppelt logarithmischen Darstellung ist, dass Potenzfunktionen als Geraden dargestellt werden. Abbildung 3.2 zeigt zum Vergleich mehrerer Potenzfunktionen in linearer Darstellung (links) und in doppelt-logarithmischer Darstellung mit Basis 10 (rechts).

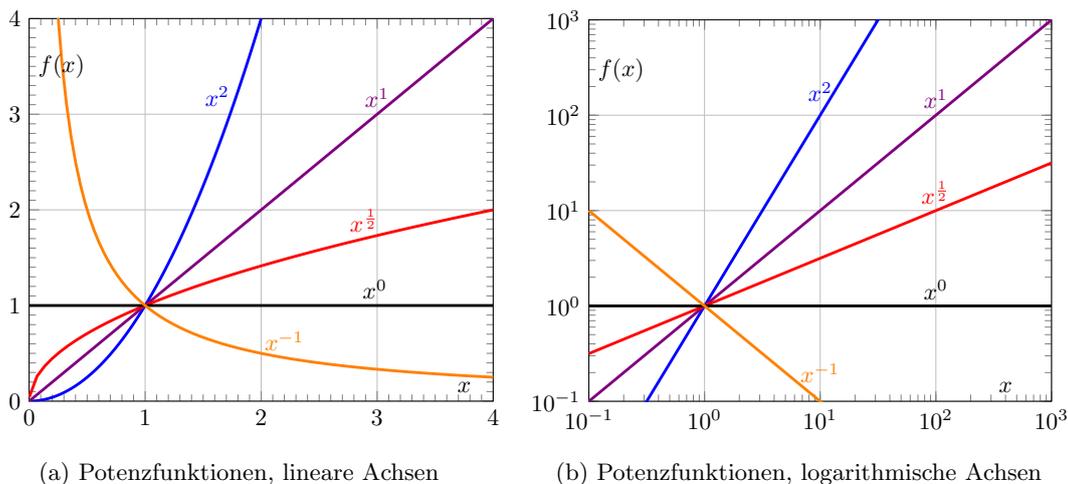


Abbildung 3.2: Vergleich lineare und logarithmische Skalierung von Potenzfunktionen

Der Exponent einer Potenzfunktion entspricht in doppelt-logarithmischer Darstellung der Steigung der Geraden. Eine Verschiebung in y-Richtung entspricht einem Vorfaktor a für die Funktion $f(x)$, eine Verschiebung in x-Richtung einem Vorfaktor x_{off} für x in der Funktion. Durch diese Eigenschaften eignet sich die logarithmische Darstellung besonders zur Darstellung von Amplitudengängen.

3.2 Definition Dezibel

Dezibel ist eine Hilfsmaßeinheit zur Kennzeichnung dekadisch-logarithmischer Verhältnisse zweier Größen. Verwendung findet es u.A. in der Signaltheorie und Nachrichtentechnik, beispielsweise um die Verstärkung/Dämpfung eines Bauteils oder einer Signalstrecke anzugeben. Ein Dezibel [dB] entspricht dem zehnfachen der Basiseinheit Bel [B].

Definiert ist das Bel als Kennzeichnung des dekadisch-logarithmischen Verhältnisses (Symbol Q) zweier einheitgleicher Leistungsgrößen (Index P) wie in Gleichung 3.1 gezeigt ist. In Zusammenhang mit Spannung oder Strom als sogenannte Leistungswurzelgrößen (ehemals Feldgrößen, Index F) kann das (Dezi-)Bel in linearen Systemen ebenfalls verwendet werden wie in Gleichung 3.2 gezeigt ist. Die Umrechnung basiert auf der Proportionalität von $P \sim U^2$ beziehungsweise $P \sim I^2$, woraus sich der Faktor 2 ergibt.

$$\text{Leistungsgrößen (z.B. } P, W) \quad Q_{(P)} = \log \frac{P_2}{P_1} \text{ B} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2} \text{ dB} \quad (3.1)$$

$$\text{Leistungswurzelgr. (z.B. } U, I) \quad Q_{(R)} = \log \frac{U_2^2}{U_1^2} \text{ B} = 20 \cdot \log \frac{U_1}{U_2} \text{ dB} \quad (3.2)$$

Die Angabe Q in dB beschreibt hier die Verstärkung eines Systems von Eingangs- (Index 1) zu Ausgangssignal (Index 2). Tabelle 3.1 zeigt für typische Dezibelwerte zugehörige Spannungsverhältnisse $\frac{U_2}{U_1}$ und Leistungsverhältnisse $\frac{P_2}{P_1}$. Eine Änderung um 6 dB entspricht auf die zweite Nachkommastelle gerundet genau dem Faktor 2 für Spannungen und auf die erste Nachkommastelle gerundet genau dem Faktor 4 für Leistungen.

Tabelle 3.1: Typische Dezibelwerte (Verstärkung in dB) bei Spannungs- und Leistungsverhältnissen

Leist.wurz.gr.	$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{10}$	10	20	100
Leistungsgrößen	$\frac{P_2}{P_1}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	10	100	400	10.000
Verstärkung	Q_{dB}	-3 dB	0 dB	+3 dB	+6 dB	10 dB	20 dB	26 dB	40 dB

Dadurch, dass 3 dB sehr präzise dem Faktor 2 bei Leistungen (Faktor $\sqrt{2}$ bei Spannungen) entspricht, beziehungsweise 6 dB dem Faktor 4, lassen sich relativ einfach Abschätzungen vornehmen. Im Vergleich zur SI-Einheit Neper, welches auf dem natürlichen Logarithmus basiert, hat sich das Dezibel daher als logarithmische Hilfsmaßeinheit in der Praxis durchgesetzt.

Faustformeln für Spannungsverhältnisse:

- Faktor 1 = 0 dB
- Faktor 2 \approx 6 dB
- Faktor 4 \approx 12 dB mit $4 = 2^2 \approx 2 \cdot 6 \text{ dB}$
- Faktor 5 \approx 14 dB mit $5 = 10 \cdot \frac{1}{2} \approx 20 \text{ dB} - 6 \text{ dB}$
- Faktor 8 \approx 18 dB mit $8 = 2^3 \approx 3 \cdot 6 \text{ dB}$
- Faktor 10 = 20 dB \implies 20 dB/Dek (spannungsbezogen)

Exemplarisch ist in Abbildung 3.4 die logarithmische y-Achse für $A(\omega)$ einmal einheitenlos (links) und einmal in dB (rechts) angegeben mit Kennzeichnung der ganzzahligen Faktoren beziehungsweise Dezibelwerten aus obiger Faustformel.

Phänologisch gilt:

- Eine Verstärkung liegt vor für $\frac{U_2}{U_1} > 1$
- Eine Dämpfung liegt vor für $\frac{U_2}{U_1} < 1$

Für die Verstärkung respektive Dämpfung als physikalische Größen gilt, dass diese sich in dB mit umgekehrtem Vorzeichen entsprechen. Üblich ist die Bezeichnungen G (von engl. Gain) für die Verstärkung von Bauteilen oder D (von engl. Damping) für deren Dämpfung. Beide Angaben werden typischerweise in dB und falls nicht näher deklariert in Bezug auf Spannungspegel angegeben. In Datenblättern wird die Dämpfung in dB teilweise auch mit negativem Vorzeichen angegeben.

3.3 Grenzfrequenz einfacher Filterschaltungen

Hoch- und Tiefpässe erlauben die Filterung von Eingangssignalen in Abhängigkeit von deren Frequenz wie in Kapitel 2.3 für einen Tiefpass und in Kapitel 2.5 für einen Hochpass gezeigt wurde.

Der Frequenzbereich der Amplitudengänge beider Filter wird unterteilt in einen **Durchlassbereich** und einen **Sperrbereich**. Als Abgrenzung dient die sogenannte **Grenzfrequenz** f_g , respektive Grenz(kreis)frequenz ω_g . Definiert ist ω_g über ein festgelegtes Verhältnis von effektiver Ausgangs- zu Eingangsspannung.

Im Falle einfacher Filterschaltungen gilt:

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{\omega=\omega_g} := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \leftrightarrow \quad A(\omega_g) := \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.3)$$

Nach Tabelle 3.1 entspricht dies einer Dämpfung von 3 dB respektive einer Verstärkung von -3 dB. Die Ausgangsleistung beträgt bei ω_g die Hälfte der Eingangsleistung.

Beispiel: Tiefpass erster Ordnung

Mit Gleichung 2.7 folgt für den RC-Tiefpass erster Ordnung für die Grenzkreisfrequenz:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \\ A(\omega_g) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g CR)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dots \implies \omega_g &= \frac{1}{CR} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Grenzkreisfrequenz ω_g entspricht dem Kehrwert der Zeitkonstante $\tau = CR$ des RC-Gliedes.

Der Frequenz-, der Amplituden- und der Phasengang des RC-Tiefpasses erster Ordnung aus Gleichung 2.6, 2.7 und 2.8 lassen sich normiert auf ω_g darstellen. Dadurch ergeben sich bauteilunabhängig:

$$F(j\omega) \stackrel{2.6}{=} \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad \stackrel{3.4}{\implies} \quad F(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_g)} \quad (3.5)$$

$$A(\omega) \stackrel{2.7}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad \stackrel{3.4}{\implies} \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}} \quad (3.6)$$

$$\varphi(\omega) \stackrel{2.8}{=} -\arctan(\omega CR) \quad \stackrel{3.4}{\implies} \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_g) \quad (3.7)$$

Abbildung 3.3 zeigt den Amplitudengang in Abhängigkeit von ω/ω_g . Neben dem realen Verlauf in rot, ist auch der Verlauf eines idealisierten Tiefpasses mit hoher Flankensteilheit in blau dargestellt.

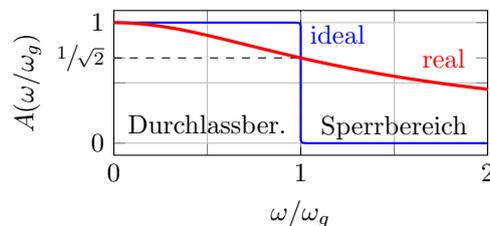


Abbildung 3.3: Durchlassbereich und Sperrbereich eines einfachen Tiefpasses, lineare Skala

Eine Änderung der Grenzfrequenz führt in linearer Darstellung zu einer Stauchung oder Streckung des Amplitudenganges entlang der Frequenzachse.

Beispiel: Hochpass erster Ordnung

Analog können wir die Grenzfrequenz für den RC-Hochpass erster Ordnung bestimmen:

$$A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_g CR}\right)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.8)$$

$$\dots \implies \omega_g = \frac{1}{CR}$$

Die Grenzfrequenz beider Filter ist also identisch bei gleichen Bauteilwerten R und C . Für den Frequenzgang des Hochpasses ergibt sich analog zur Tiefpass-Variante:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 - j(\omega_g/\omega)} \quad (3.9)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g/\omega)^2}} \quad (3.10)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan(\omega_g/\omega) \quad (3.11)$$

3.4 Tiefpass 1. Ordnung

Frequenzgänge werden typischerweise in **Bode-Diagrammen** dargestellt. Bode-Diagramme bestehen aus einer doppelt-logarithmischen Darstellung des Amplitudengangs und einer einfach-logarithmischen Darstellung des Phasengangs. Die x-Achse für die (Kreis-)frequenz wird in beiden Darstellung logarithmisch skaliert. Die y-Achse wird beim Amplitudengang logarithmisch und beim Phasengang linear skaliert.

Abbildung 3.4 zeigt den Amplitudengang aus Gl. 3.6 eines Tiefpass 1. Ordnung als Bode-Diagramm. Durchlassbereich für $\omega < \omega_g$ und Sperrbereich für $\omega > \omega_g$ sind ebenso wie die Position für $\omega = \omega_g$ gekennzeichnet. Die Frequenzangabe auf der x-Achse wurde auf die Grenzfrequenz normiert und erfolgt daher einheitenlos.

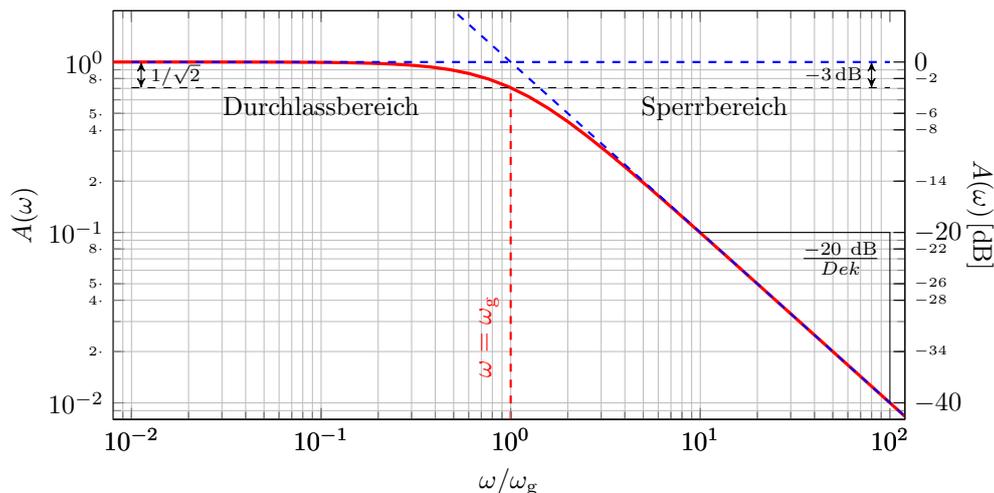


Abbildung 3.4: Bode-Diagramm Tiefpass 1. Ordnung, Amplitudengang

Gut zu erkennen ist die Unterteilung des Frequenzbereiches in Durchlass- und Sperrbereich durch

die Grenzfrequenz. Der Verlauf des Amplitudenganges lässt sich in beiden Bereichen mithilfe der Asymptoten (Geraden) approximieren [blau gestrichelt]:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = 1 &\quad \implies \quad A(\omega) \approx 1 &\quad \text{für} \quad \omega < \omega_g &\quad (\text{Durchlassbereich}) \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = \frac{\omega_g}{\omega} &\quad \implies \quad A(\omega) \approx \frac{\omega_g}{\omega} &\quad \text{für} \quad \omega > \omega_g &\quad (\text{Sperrbereich}) \end{aligned}$$

Die Steigung der Asymptote (Gerade) im Sperrbereich beträgt -20 dB/Dek , aufgrund der Proportionalität von $A(\omega) \sim \omega^{-1}$.

Die Näherung durch beide Asymptoten weicht maximal 3 dB für $\omega = \omega_g$ vom realen Verlauf ab. Bei der Grenzfrequenz schneiden sich beide Asymptoten, was jedoch nicht allgemein für Filter gilt. Zur Konstruktion einer Skizze bieten sich beide Asymptoten (Geraden) und der Punkt $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$ an. Für die Skizze wird im Übergangsbereich von Faktor fünf größer oder kleiner der Grenzfrequenz ($\frac{1}{5}\omega_g < \omega < 5\omega_g$) ein Bogen von Asymptote durch $A(\omega_g) = 1/\sqrt{2}$ zu Asymptote gezeichnet.

Eine Veränderung der Grenzfrequenz führt im Bode-Diagramm zu einer Verschiebung entlang der Frequenz-Achse. Dies gilt für den Amplituden- als auch für den Phasengang, da die Frequenzachse in beiden Darstellungen logarithmisch skaliert ist. Die Normierung auf die Grenzfrequenz bietet sich an, um die Funktionsweise des Frequenzganges unabhängig von spezifischen Bauteilwerten darzustellen.

Abbildung 3.5 zeigt den dazugehörigen Phasengang als Bode-Diagramm ebenfalls mit Normierung der Frequenz auf die Grenzfrequenz. Die Kurvenform des Phasenganges ähnelt der Kurvenform eines Arkustangens in linearer Darstellung bei entsprechender Verschiebung und Stauchung.

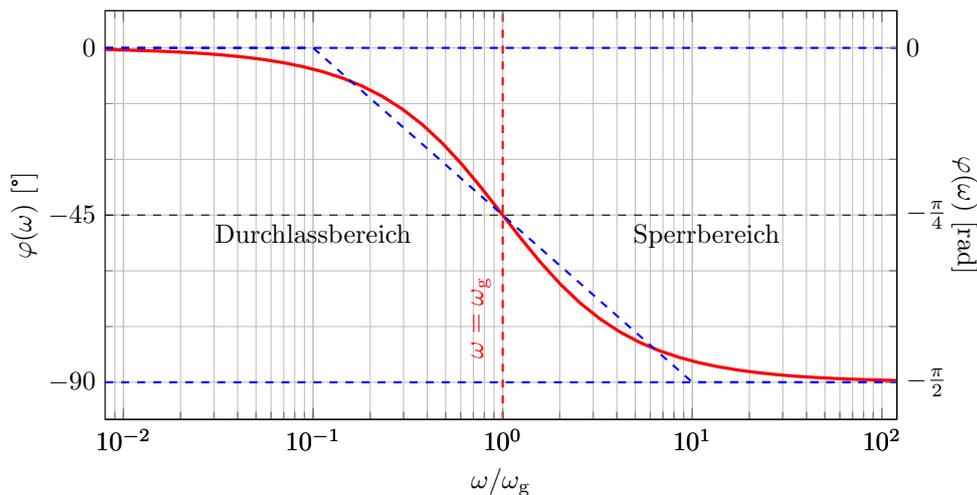


Abbildung 3.5: Bode-Diagramm Tiefpass 1. Ordnung, Phasengang

Der Wertebereich des Phasenganges wird durch die beiden horizontalen Asymptoten $\varphi(\omega) = 0^\circ$ für $\omega \rightarrow 0$ und $\varphi(\omega) = -90^\circ$ für $\omega \rightarrow \infty$ begrenzt. Der Phasengang besitzt in dieser Darstellungsform eine Punktsymmetrie zum Wendepunkt in $\varphi(\omega_g) = -45^\circ$ und keine Extrema.

Sei ω_n die normierte Frequenz ω/ω_g . So lässt sich der Phasengang abschnittsweise durch folgende drei Geradenabschnitte approximieren:

$$\varphi(\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{für} \quad \omega_n < 10^{-1} & \text{Durchlassbereich (ohne Grenzbereich)} \\ -45^\circ + \frac{-45^\circ}{\text{Dek}} \omega_n & \text{für} \quad 10^{-1} \leq \omega_n \leq 10 & \text{Grenzbereich} \\ -90^\circ & \text{für} \quad 10 < \omega_n & \text{Sperrbereich (ohne Grenzbereich)} \end{cases} \quad (3.12)$$

Die maximale Abweichung der Approximation beträgt $\pm 5.71^\circ$ an den Knickstellen bei $\omega_g \pm 1 \text{ Dek}$.

3.4.1 Vergleich lineare und logarithmische Darstellung

Zum Vergleich sind in Abbildung 3.6 der Amplituden- und Phasengang eines Tiefpass 1. Ordnung in linearer und logarithmischer Darstellung (Bode-Diagramm) dargestellt.

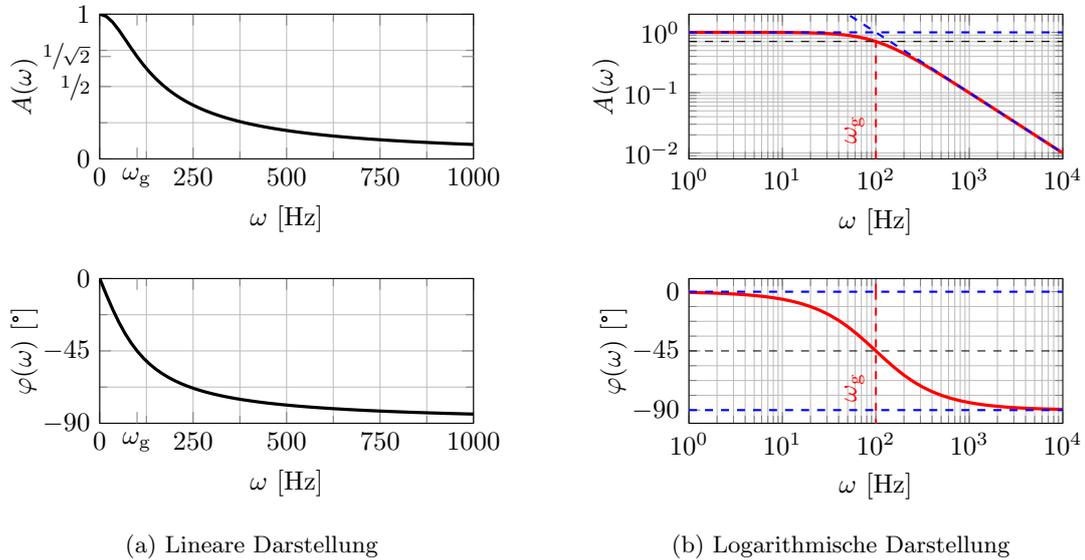


Abbildung 3.6: Vergleich lineare und logarithmische Darstellung des Tiefpass 1. Ordnung

Anders als bei linearer Darstellung entspricht bei logarithmischer Darstellung die Ableitung einer Funktionen nicht der ablesbaren Steigung im Kurvenverlauf. In Abbildung 3.6 ist dies gut erkennbar. Die Steigung von $A(\omega)$ in linearer Darstellung geht sowohl für $\omega \rightarrow 0$ als auch für $\omega \rightarrow \infty$ zu gegen 0. [Vgl. Kapitel 2.3] Im Bodediagramm ist die Steigung für $\omega \rightarrow 0$ ebenfalls null, nähert sich für $\omega \rightarrow \infty$ jedoch einer minimalen Steigung von -20 dB/Dek an. Beim Phasengang ist in linearer Darstellung die Steigung (Ableitung) für $\omega \rightarrow 0$ minimal und negativ. In logarithmischer Darstellung scheint $\varphi(\omega)$ für $\omega \rightarrow 0$ jedoch am flachesten (Steigung gegen 0).

3.4.2 Vergleich Tief- und Hochpass 1. Ordnung

Abbildung 3.7 zeigt die Frequenzgänge eines Tiefpass und eines Hochpass 1. Ordnung im Bode-Diagramm zum Vergleich. Der Frequenzbereich (x-Achse) ist in beiden Fällen auf die jeweilige Grenzfrequenz normiert.

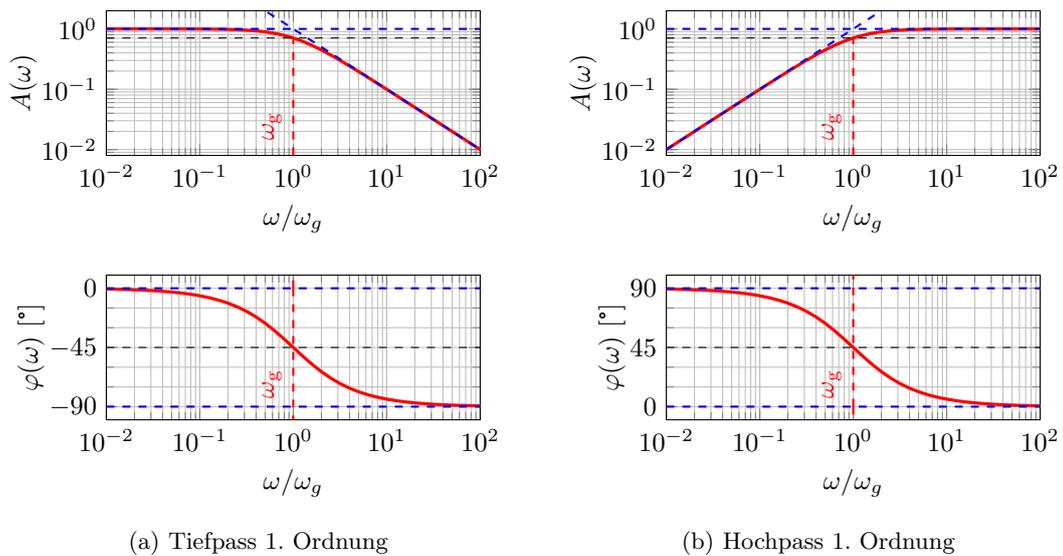


Abbildung 3.7: Vergleich Tief- und Hochpass 1. Ordnung, Bode-Diagramme

3.5 Bandpass, Bandsperre

Bandpass-Filter und Bandsperre-Filter sind Filtertypen zur Filterung von Frequenzbändern.

Ähnlich wie Tief- und Hochpass finden beide eine breite Anwendung in der Signalverarbeitung zum Beispiel im Bereich der Audio-, Nachrichten-, Mess- und Regelungstechnik. Weitere Anwendungen finden sich beispielsweise in der Energietechnik bei der Einspeisung von Energie ins elektrische Versorgungsnetz, um eine stabile Netzfrequenz zu gewährleisten.

Bandpässe filtern Signale außerhalb eines bestimmten Frequenzbandes heraus, während Bandsperren Signale innerhalb eines bestimmten Frequenzbandes herausfiltern. Die Frequenzbänder werden durch eine obere und untere Grenzfrequenz f_{go} und f_{gu} definiert.

$$\left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{f=f_{go}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{f=f_{gu}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.13)$$

Daraus abgeleitete Größen sind die **Bandbreite** B und die **Mittenfrequenz** f_M . Die Bandbreite ist definiert als Differenz von oberer und unterer Grenzfrequenz:

$$B = \Delta f = f_{go} - f_{gu} \quad (3.14)$$

Die Mittenfrequenz f_M ist definiert als das geometrische Mittel beider Grenzfrequenzen:

$$f_M = \sqrt{f_{go} \cdot f_{gu}} \quad (3.15)$$

In logarithmischer Darstellung liegt f_M qua Definition exakt in der Mitte zwischen beiden Grenzfrequenzen. Dadurch lassen sich mit B und f_M Größe und Lage des Frequenzbandes im Frequenzspektrum beschreiben.

3.5.1 Realisierung: Serien- oder Parallelschaltung von Tief- und Hochpass

Eine mögliche Realisierung von Bandpass- und Bandsperre-Filtern ist durch Kombination eines Tief- und Hochpass-Filters. Auf diese Weise lässt sich anschaulich das Verhalten kombinierter Filterschaltungen erläutern.

Durch die Serienschaltung eines Tief- und Hochpass entsteht ein Bandpass, vorausgesetzt die Grenzfrequenzen sind passend gewählt. Für ein Bandpassverhalten muss die obere Grenzfrequenz durch den Tiefpass und die untere Grenzfrequenz durch den Hochpass realisiert werden. Mathematisch beschreiben lässt sich der resultierende Frequenzgang als Produkt der Einzelfrequenzgänge mit $\underline{F}_{\text{BP}} = \underline{F}_{\text{TP}} \cdot \underline{F}_{\text{HP}}$. Voraussetzung für die Multiplikation der Einzelfrequenzgänge zum Gesamtfrequenzgang ist die Rückwirkungsfreiheit des nachgeschalteten Vierpols auf das Ausgangssignal des vorgeschalteten Vierpols.

Abbildung 3.8 zeigt exemplarisch das Schaltbild eines solchen Bandpasses zweiter Ordnung als Serienschaltung eines RC-Tiefpasses und eines RC-Hochpasses, beide erster Ordnung. Der symbolische Verstärkerblock zwischen beiden Filter verhindert eine Rückwirkung des Hochpass auf die Ausgangsspannung des Tiefpasses. Nur unter der Annahme einer Rückwirkungsfreiheit lassen sich die Frequenzgänge von Tiefpass und Hochpass durch in Reihe Schalten multiplizieren.

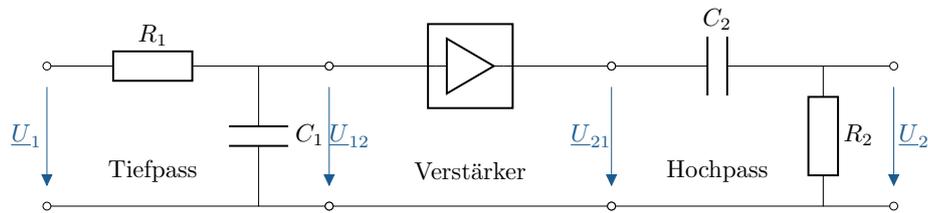


Abbildung 3.8: Bandpass 2. Ordnung, Schaltbild

Eine Bandsperre lässt sich realisieren indem die Eingänge von Tief- und Hochpass parallel und deren Ausgänge in Serie geschaltet werden. Dadurch erhalten beide Einzelfilter die gleiche Eingangsspannung und die Ausgangsspannungen werden addiert. Der resultierende Frequenzgang ist die Summe der Einzelfrequenzgänge mit $\underline{F}_{\text{BS}} = \underline{F}_{\text{TP}} + \underline{F}_{\text{HP}}$. In diesem Fall muss die obere Grenzfrequenz durch den Hochpass und die untere Grenzfrequenz durch den Tiefpass realisiert werden.

3.5.2 Bode-Diagramm

In Abbildung 3.9 ist das Bode-Diagramm des Bandpasses aus Abb. 3.8 dargestellt. Amplitudengang und Phasengang übereinander teilen sich eine gemeinsame X-Achse, zum besseren Vergleich der beiden Graphen. Der Verstärkungsfaktor beträgt 1 (passiv) und die Grenzkreisfrequenzen liegen bei 10^2 Hz und 10^4 Hz.

Die obere und untere Grenzkreisfrequenz ω_{go} und ω_{gu} sind in beiden Darstellungen gekennzeichnet (rot gestrichelte, vertikal), ebenso wie die -3 dB Grenze (schwarz gestrichelt, horizontal) deren Schnitt mit $A(\omega)$ die Grenzfrequenzen definiert.

Die Bandbreite ist im Amplitudengang angedeutet als Doppelfeil zwischen beiden Grenzfrequenzen. Aufgrund der logarithmischen Skalierung entspricht die Bandbreite nicht dem angezeigten geometrischen Abstand im Diagramm.

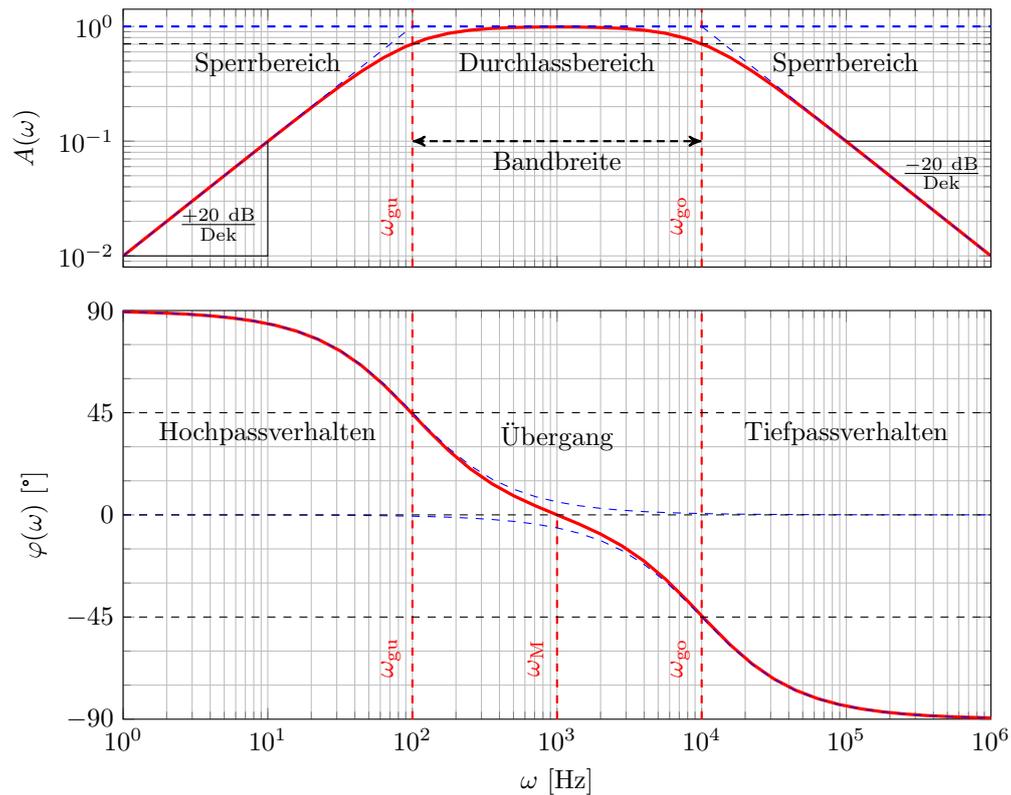


Abbildung 3.9: Bandpass 2. Ordnung, Bode-Diagramm

Im Schaubild abzulesen sind:

$$\omega_{\text{gu}} = 10^2 \text{ Hz} \quad \text{und} \quad \omega_{\text{go}} = 10^4 \text{ Hz} \quad (3.16)$$

$$B \stackrel{3.14}{=} \Delta f = \frac{\omega_{\text{go}} - \omega_{\text{gu}}}{2\pi} = \frac{9900}{2\pi} \text{ Hz} \quad (3.17)$$

$$f_{\text{m}} \stackrel{3.15}{=} \frac{\omega_{\text{m}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_{\text{go}} \cdot \omega_{\text{gu}}}}{2\pi} = \frac{10^3}{2\pi} \text{ Hz} \quad (3.18)$$

Die Mittenkreisfrequenz ω_{m} ist im Phasengang gekennzeichnet. Die Phasenverschiebung beträgt dort 0° , da sich die Phasenverschiebung des Tief- und Hochpasses (blau gestrichelt, dünn) in dem Punkt gegenseitig aufheben.

Gut zu erkennen ist das Hochpassverhalten im unteren Sperrbereich (mit $+20 \text{ dB/Dek}$ und $\varphi(\omega) > 0^\circ$) und das Tiefpassverhalten im oberen Sperrbereich (mit -20 dB/Dek und $\varphi(\omega) < 0^\circ$).

3.6 Ordnung von Filtern, Beispielfilter höherer Ordnung

Abbildung 3.10 zeigt exemplarisch die Amplitudengänge verschiedener Filter höherer Ordnung im Vergleich. Zu erkennen sind ein Butterworth-, ein Tschebycheff-, ein Cauer-Filter im Vergleich mit einem idealen Tiefpass.

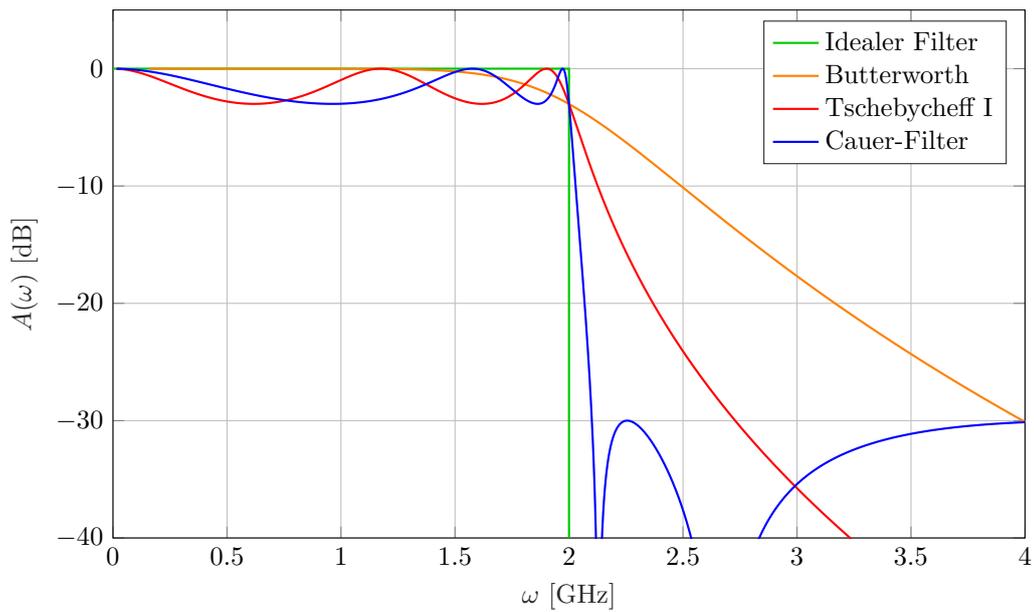


Abbildung 3.10: Beispiel Filter höherer Ordnung

Ordnung anhand der summierten Steilheit der Flanken erklären.

- Tief-/Hochpass (eine Flanke): Ordnung n bei $\pm n \cdot 20$ dB /Dek
- Bandpass/-sperre (zwei Flanken): Ordnung $2n$ bei $\pm n \cdot 20$ dB /Dek

Filter 2. Ordnung durch: RLC oder Kombination zweier Filtern 1. Ordnung: 2x (RC) bzw. 2x (RL) (1. Ordnung)

Filter höherer Ordnung als 2 durch Kaskadierung von Filtern niedrigerer Ordnung möglich.

Vgl: https://wiki.mexle.org/elektronische_schaltungstechnik/6_filterschaltungen_ii#zusammensetzen_des_bandpass_filter

Merke:

$n \cdot 20$ dB/Dek Steilheit bei Filter n -ter Ordnung für alle Flanken summiert.
Höhere Ordnung durch Kaskadierung von Filtern niedrigerer Ordnung möglich.

4 Ortskurven

Die Darstellung von Ortskurven ist ein Mittel zur Visualisierung der parameterabhängigen Veränderung von komplexen Größen. Zur Analyse des frequenzvariablen Verhaltens von Eintoren bieten sich Impedanz- und Admittanzortskurven an. In diesen kann die Veränderung der Impedanz respektive der Admittanz in Abhängigkeit der (Kreis-)Frequenz dargestellt werden.

Lernziele: Ortskurven

Studierende lernen:

- Ortskurven kennen und mögliche Anwendungsbereiche kennen.
- Ortskurven prinzipiell zu konstruieren und zu interpretieren.
- Impedanz- und Admittanzortskurven von Grundschaltungen kennen.

4.1 Definition Ortskurve

Eine Ortskurve ist die graphische Darstellung einer komplexen Größe \underline{z} in Abhängigkeit eines reellen Parameters p in der komplexen Ebene [2, Vgl.]:

$$\underline{z}(p) = \operatorname{Re}\{\underline{z}(p)\} + j \operatorname{Im}\{\underline{z}(p)\} \quad \text{mit } \underline{z} \in \mathbb{C}; p \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

Ortskurven werden in vielen verschiedenen Bereichen angewandt, um mögliche Zustände eines Systems zu visualisieren. Abbildung 4.1 zeigt exemplarisch die Stromortskurve einer Asynchronmaschine in der komplexen Ebene, auch Heylandkreis oder Ossannakreis genannt. [QUELLE:XYZ] Zu Erkennen ist der komplexe Statorstrom \underline{I}_s in Abhängigkeit des Schlupfes s . Die Darstellungsform eignet sich beispielsweise zur Visualisierung verschiedener Betriebszustände, im Fall der Asynchronmaschine sind das der Motor-, Brems- und Generatorbetrieb.

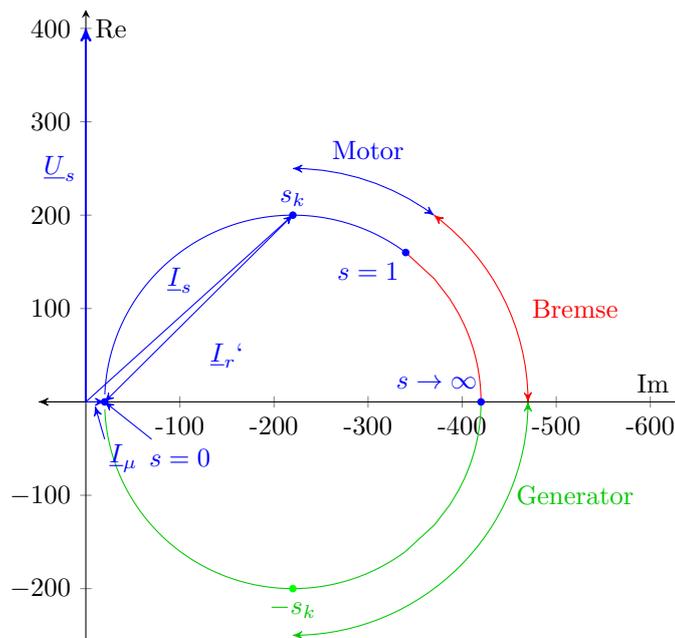


Abbildung 4.1: Beispiel Stromortskurve einer Asynchronmaschine mit Betriebszuständen

Im Beispiel der Stromortskurve einer Asynchronmaschine lassen sich zudem verschiedene Leistungswerte graphisch ermitteln wie in Abbildung 4.2 exemplarisch dargestellt ist. Die Beispiele dienen der Veranschaulichung der Definition und möglicher Anwendungsbereiche von Ortskurven, weshalb von einer Herleitung beider Beispiele abgesehen wird.

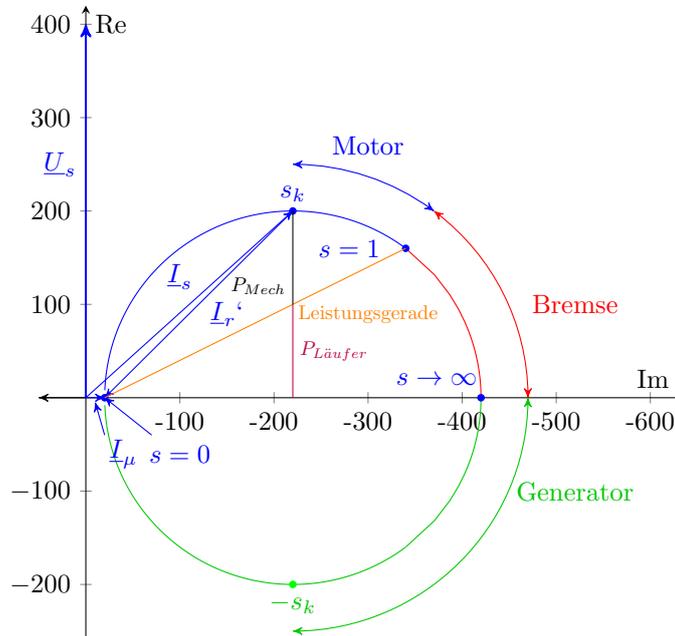


Abbildung 4.2: Beispiel Stromortskurve einer Asynchronmaschine mit Leistungsgrößen

Ortskurven eignen sich gut zur Visualisierung von Systemzuständen, -größen und deren Einfluss aufeinander.

4.2 Zusammenhang Zeigerdiagramm und Ortskurve

Ein Zeiger im Zeigerdiagramm stellt eine komplexe Größe stationär in der komplexen Ebene dar. Die Darstellungsform dient der Visualisierung von Phasenverschiebungen und Betragsverhältnissen. Typische Größen für Wechselstromkreise sind unter anderem Spannung, Strom, Leistung und Impedanz.

Ortskurven beschreiben die Bahn, die ein Zeiger bei Variation eines Parameters durchläuft. Die Ortskurve kann so als Verallgemeinerung eines Zeigers im Zeigerdiagramm verstanden werden. [2, Vgl.] Übliche Parameter sind Frequenz und Bauteilgrößen.

Die Hervorhebung einzelner Zeiger mit Angabe des variierenden Parameters kann den Verlauf der Ortskurve verdeutlichen und die Interpretation erleichtern. Positionsänderungsrate und -richtung geben Aufschluss über die Dynamik des Systems.

Merke: Ortskurve

Zeigt Größe in komplexer Ebene parameterabhängig als Kurve (Punkteschar).

4.3 Impedanzortskurve

In Impedanzortskurven wird die Impedanz eines Systems in Abhängigkeit eines Parameters dargestellt.

Beispiel 4.1 zeigt eine Impedanzortskurve für eine variable Bauteilgröße.

Beispiel 4.2 zeigt eine Impedanzortskurve für variable Frequenz.

Beispiel 4.1: Impedanzortskurve RL-Glied, Widerstand variabel

Konstruktion der Impedanzortskurve einer RL-Serienschaltung für variablen Widerstand R . Die Schaltung ist in Abbildung 4.3 abgebildet.

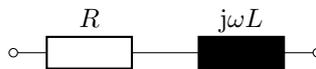


Abbildung 4.3: RL-Glied (Serienschaltung)

Die Impedanz des RL-Gliedes ist gegeben durch:

$$\underline{Z} = R + j\omega L$$

Sei R variabel und beschrieben als (p -fache) Vielfache eines Referenzwiderstandes R_0 mit p im geschlossenen Intervall $[0,3]$, so gilt:

$$R(p) = p \cdot R_0 \quad \text{mit } p \in [0,3]$$

Seien ω und L konstant, sowie die Reaktanz ωL gleich einer Referenzreaktanz X_0 :

$$\omega L = X_0 \quad \text{mit } \omega, L = \text{konst.}$$

Impedanz \underline{Z} in Abhängigkeit von p :

$$\underline{Z}(p) = p \cdot R_0 + jX_0$$

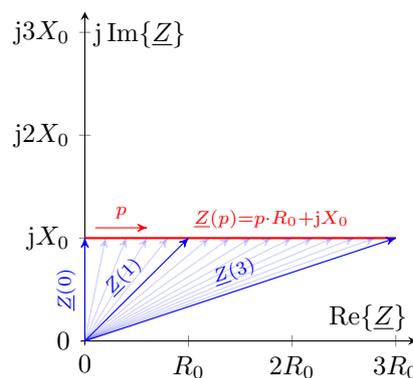


Abbildung 4.4: Impedanzortskurve RL-Glied (Serie)

Beispiel 4.2: Impedanzortskurve RL-Glied, Frequenz variabel

Konstruktion der Impedanzortskurve der RL-Serienschaltung in Abbildung 4.5 für variable Frequenz f und oder variable Induktivität L . Aufbau wie in Beispiel 4.1, jedoch mit variabler Frequenz ω .

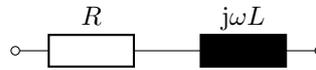


Abbildung 4.5: RL-Glied (Serienschaltung)

Gesamtimpedanz allgemein:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R + j\omega L \\ &= R + jX\end{aligned}$$

Die Gesamt-Reaktanz X des RL-Gliedes ist proportional zu ω und proportional zu L . Das heißt eine Veränderung von ω hat den selben Einfluss wie eine Veränderung von L auf die Impedanz des RL-Gliedes.

Mit X als Vielfache p einer Referenz-Reaktanz X_0 und $R = R_0$ gilt:

$$\underline{Z} = R_0 + p \cdot jX_0$$

In der komplexen Ebene dargestellt:

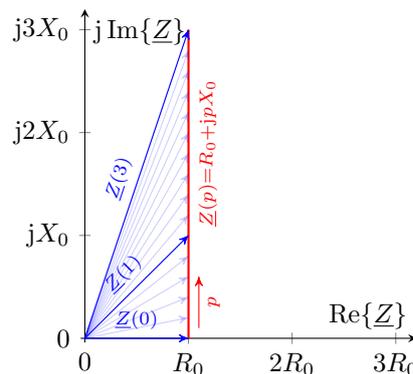


Abbildung 4.6: RL-Glied (Serienschaltung)

4.4 Admittanzortskurve - Inversion von Ortskurven

Analog zur Impedanzkurve bezeichnet eine Admittanzkurve die Ortskurve einer Admittanz. Die Admittanz \underline{Y} entspricht algebraisch dem Kehrwert der Impedanz \underline{Z} und vice versa:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad \leftrightarrow \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \quad (4.2)$$

Die Umformung von Impedanz zu Admittanz und umgekehrt ist jeweils ein Spezialfall der Möbius-Transformation.

Für die Beziehung zwischen Admittanz- und Impedanzortskurven gelten daher folgende allgemeinen Eigenschaften von Möbius-Transformation: [3, Vgl.]

- Winkeltreue: $\angle(\underline{Z}_1, \underline{Z}_2) = \angle(\underline{Y}_1, \underline{Y}_2)$ mit $\underline{Y}_i = \underline{Z}_i^{-1}$, $i \in [1, 2]$
- Kreisverwandtschaft: Kreise und Geraden werden auf Kreise und Geraden abgebildet

Die Kehrwertbildung entspricht im speziellen der Inversion, einem Elementartyp der Möbius-Transformation. Eine Inversion von Ortskurven führt zu den in Tabelle 4.1 aufgelisteten geometrischen Umformungen von Kreisen und Geraden. Abbildung 4.7 zeigt exemplarisch die Inversion eines Gitters durch den Ursprung.

Tabelle 4.1: Typische Formen bei Inversion von Ortskurven

ursprüngliche Ortskurve		invertierte Ortskurve	
Gerade	durch den Ursprung	Gerade	durch den Ursprung
Gerade	nicht durch den Ursprung	Kreis	durch den Ursprung
Kreis	durch den Ursprung	Gerade	nicht durch den Ursprung
Kreis	nicht durch den Ursprung	Kreis	nicht durch den Ursprung

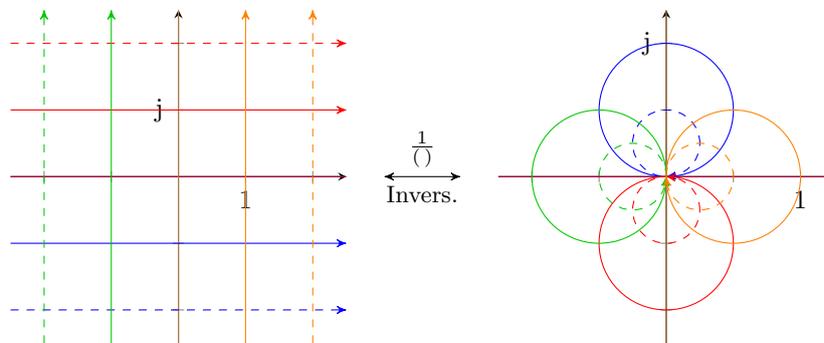


Abbildung 4.7: Beispiel Möbius-Transformation, Inversion von Gitter¹

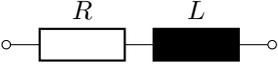
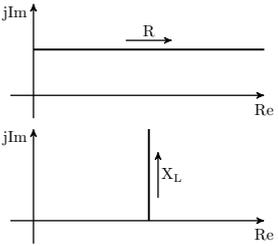
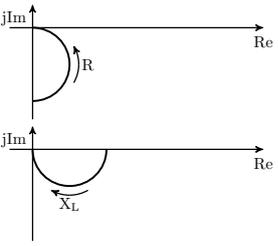
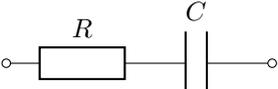
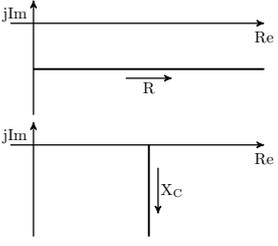
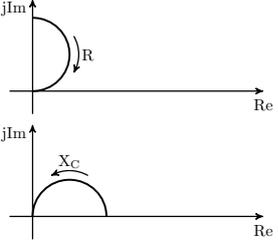
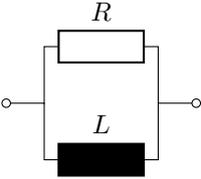
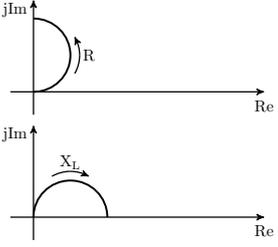
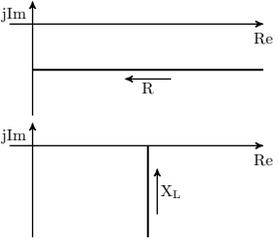
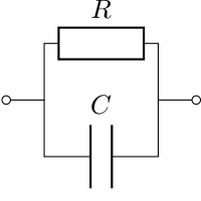
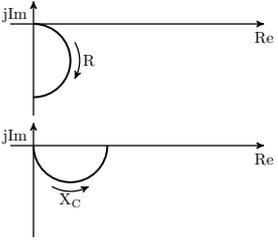
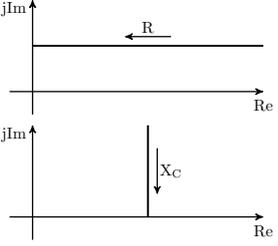
4.5 Ortskurven von Grundschaltungen

Tabelle 4.2 zeigt eine Übersicht der Impedanz- und Admittanzortskurven für die vier Grundschaltungen RL- und RC-Glied jeweils in Serien- und Parallelschaltung.

Ortskurven schwingungsfähiger LC- und RLC-Glieder unterscheiden sich von den hier dargestellten Ortskurven dadurch, dass der Blindanteil der Impedanz bzw. Admittanz je nach Frequenzbereich sowohl induktiv als auch kapazitiv sein kann, je nachdem welcher Anteil überwiegt.

¹Angelehnt an MoebiusInversion.svg von Chrislb, CC-BY-SA-2.0-DE, 2005, <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MoebiusInversion.svg>

Tabelle 4.2: Ortskurven der Grundsaltungen RL- und RC-Glied

Grundsaltung	\underline{Z} -Ortskurve	\underline{Y} -Ortskurve
		
		
		
		

5 Resonanzkreise

Resonanzkreise, auch Schwingkreise genannt, sind schwingungsfähige Stromkreise, die auf Anregung mit einer bestimmten Frequenz stark reagieren (Resonanzfall). Unterschieden werden die zwei Typen des Parallel-Resonanzkreises und Serien-Resonanzkreises.

Schwingungsfähig ist ein System, wenn es Energie in zwei Formen speichern und zwischen beiden Formen hin und her wandeln kann. Resonanzkreise verfügen daher immer über eine Kapazität (elektrischer Speicher) und eine Induktivität (magnetischer Speicher).

Anwendung finden Resonanzkreise unter anderem im Bereich der Energie-, Mess- und Kommunikationstechnik. Dort werden sie zum Beispiel zur Filterung von Netzrückwirkungen oder Signalen eingesetzt.

Resonanzkreise können unter Umständen zu unerwünschten Effekten wie extreme Über- oder Unterspannungen führen.

Lernziele: Resonanzkreise

Studierende lernen:

- Resonanzkreise zu erkennen und zu berechnen
- Resonanzfrequenz, Kennwiderstand und Güte zu bestimmen
- Resonanzkurven zu berechnen, zu beschreiben und zu zeichnen

5.1 Resonanzerscheinung

Eine Resonanz tritt auf, wenn schwingungsfähige Systeme mit einer Frequenz nahe ihrer Resonanzfrequenz angeregt werden.

In diesem Abschnitt werden zunächst der Zustand einer freien Schwingung und der einer erzwungenen Schwingung beschrieben. In Unterkapitel 5.2 wird die Bedingung für Resonanz mathematisch festgelegt und im Folgekapitel in Beispiel 5.1 für einen Serien- und Parallel-Schwingkreis berechnet.

Abbildung 5.1 zeigt exemplarisch das Schaltbild eines RLC-Serienschwingkreises. Die Reihenschaltung aus R, L und C ist über den gezeigten Schalter kurzschließbar. Zum Zeitpunkt $t = 0$ schließt der Schalter, dabei beträgt die Spannung der Kapazität den Wert $U_0 > 0$ (Kapazität geladen) und es fließt kein Strom $I = 0$ (Induktivität entladen).

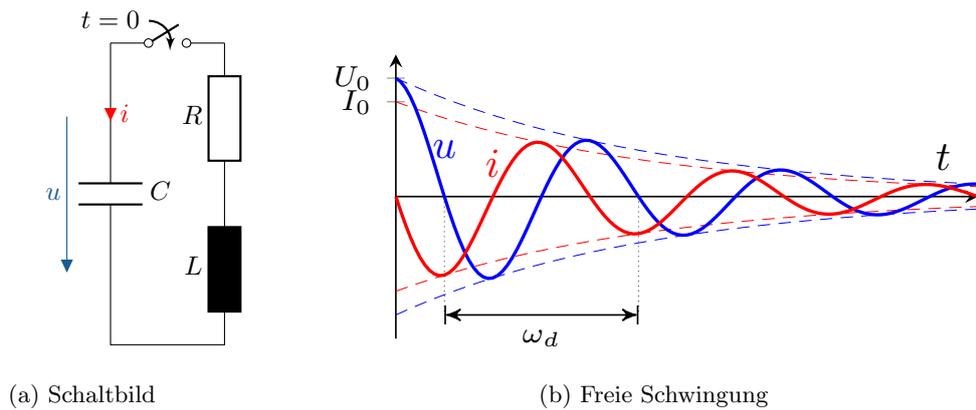


Abbildung 5.1: RLC-Serienschwingkreis, frei schwingend

Abbildung 5.1b zeigt den Zeitverlauf der Kapazitätsspannung u und des Stromes i durch den RLC-Serienschwingkreis ab $t = 0$. Der Resonanzkreis befindet sich im Zustand freier Schwingung. Das heißt Ströme und Spannungen oszillieren ohne äußere Anregung mit der **Eigenfrequenz** f_d (gedämpft) des Resonanzkreises.

Die Amplituden klingen aufgrund der Dämpfung ($R > 0$) ab. Sie lassen sich jeweils durch eine Exponentialkurve beschreiben, welche den jeweiligen Zeitverlauf einhüllt (gestrichelte Kurve). Für genauere Berechnungen von Ausgleichsvorgängen, siehe Modul 12: Schaltvorgänge.

Die Energie E pendelt zwischen der elektrischen Form im \vec{E} -Feld der Kapazität ($E_{el} \sim u^2$) und der magnetischen Form im \vec{H} -Feld der Induktivität ($E_{mag} \sim i^2$). Anhand der Minima beziehungsweise Maxima und der Nullstellen beider Zeitverläufe ist erkennbar, wie die Energie in jeder Periode zwei mal hin- und zurück gewandelt wird.

Aufgrund der reellen (Verlust-)Leistung im ohmschen Widerstand ($R > 0$), wird bei jeder Energieumwandlung ein Teil der Energie in Form von Wärme im Widerstand umgesetzt. Der Widerstand dämpft den Schwingkreis und führt zum Abklingen von Strom und Spannung in Zustand freier Schwingung.

Die Eigenkreisfrequenz $\omega_d = 2\pi f_d$ ist unabhängig von der Amplitude. Bei ungedämpften Systemen entspricht sie exakt der **Resonanzkreisfrequenz** ω_0 . Bei leicht gedämpften Systemen ist ω_d geringfügig kleiner als ω_0 . Stark gedämpfte Systeme schwingen nicht, sondern klingen aperiodisch ab.

Abbildung 5.2a zeigt zum Vergleich einen RLC-Serienschwingkreis mit Anregung durch eine ideale Spannungsquelle u_e an einer Kapazität (erzwungene Schwingung). Abbildung 5.2b zeigt den eingeschwungenen Zeitverlauf von Strom und Spannung der Kapazität bei sinusförmiger Anregung.

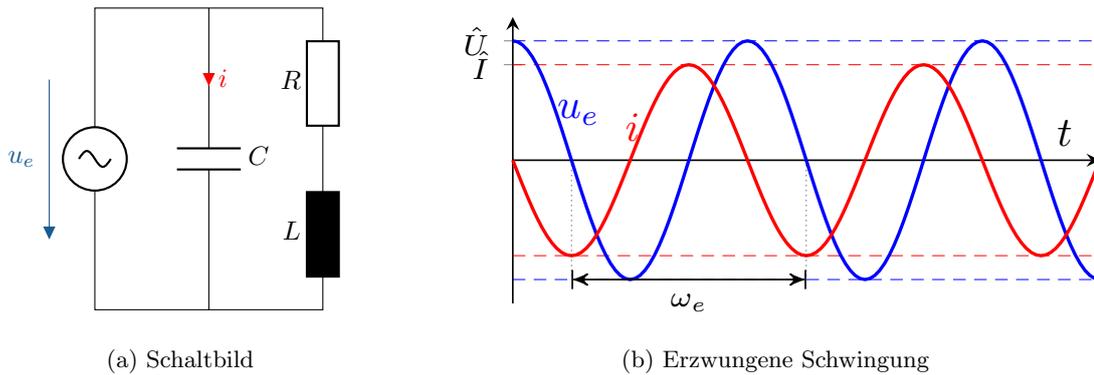


Abbildung 5.2: RLC-Serienschwingkreis, erzwungene Schwingung

Strom und Spannung schwingen im eingeschwungenen Zustand mit der Frequenz der Spannungsquelle, welche in diesem Fall auch Erregerfrequenz genannt wird.

Entspricht die Erregerfrequenz der Resonanzfrequenz, tritt der **Resonanzfall** ein. Dies kann durch Variation der Erregerfrequenz oder der Bauteilgrößen L oder C geschehen.

5.2 Definition Resonanzbedingung, -frequenz, Güte, Kennwiderstand

Für Resonanzkreise gilt im Resonanzfall, dass der Imaginärteil der Impedanz gleich null wird. Respektive gilt, dass der Imaginärteil der Admittanz gleich null wird sowie Strom und Spannung an den Ausgangsklemmen in Phase liegen.

Als Resonanzbedingung gilt an den Ausgangsklemmen des Resonanzkreises:

$$\begin{aligned} \varphi_{u0} - \varphi_{i0} &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Phasenverschiebung gleich null} \\ \Leftrightarrow \operatorname{Im}\{\underline{Z}_0\} &\stackrel{!}{=} 0 && \text{Reaktanz gleich null} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Frequenzvariable Größen sind im Resonanzfall im Folgenden mit Index 0 gekennzeichnet:

$$\underline{Z}, \underline{U}, \underline{I}, \varphi_u, \varphi_i = \underline{Z}_0, \underline{U}_0, \underline{I}_0, \varphi_{u0}, \varphi_{i0} \quad \text{für } \omega = \omega_0$$

Die **Resonanzfrequenz** f_0 ist die Frequenz, bei der eine Anregung den Resonanzfall erzeugt beziehungsweise die Resonanzbedingung erfüllt. Teilweise wird die **Resonanzkreisfrequenz** ω_0 auch unpräziserweise als Resonanzfrequenz bezeichnet. Allgemein gilt $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Bei einfachen RLC-Schwingkreisen hebt sich im Resonanzfall die Reaktanz X_L der Induktivität und X_C der Kapazität gegenseitig auf. Betragsmäßig sind diese gleich groß, weshalb deren Betrag im Resonanzfall auch als **Kennwiderstand** X_k bezeichnet wird. Analog dazu ist der **Kennleitwert** B_k definiert als der Betrag des Leitwertes der Induktivität und der Kapazität im Resonanzfall:

$$X_k = |X_{L,0}| = |X_{C,0}| \quad (5.2)$$

$$B_k = |B_{L,0}| = |B_{C,0}| = \frac{1}{X_k} \quad (5.3)$$

Kennwiderstand und -leitwert haben die gleichen Einheiten wie Impedanz $[\Omega]$ und Admittanz $[S]$.

Die **Güte** Q , auch Gütefaktor oder Resonanzschärfe genannt, ist eine einheitenlose Größe. Sie ist allgemein definiert als das Verhältnis des Blindleistungsbetrages der Induktivität oder der Kapazität zur (Wirk-)Leistung des Schwingkreises im Resonanzfall:

$$Q = \frac{|Q_{L,0}|}{P_{R,0}} = \frac{|Q_{C,0}|}{P_{R,0}} \quad \text{allgemein} \quad (5.4)$$

Die Güte ist manchmal auch im Speziellen für Reihen- oder für Parallelschwingkreise definiert.

Bei RLC-Reihenschwingkreisen entspricht die Güte dem Verhältnis von Kennwiderstand X_k zu ohmschem Widerstand R , bei RLC-Parallelschwingkreisen entspricht die Güte dem Verhältnis von Kennleitwert B_k zu ohmschem Leitwert G :

$$Q = \frac{X_k}{R} \quad \text{im Reihenschwingkreis} \quad (5.5)$$

$$Q = \frac{Y_k}{G} \quad \text{im Parallelschwingkreis} \quad (5.6)$$

Damit beschreibt die Güte auch das Verhältnis möglicher Überspannungen zu Quellenspannungen für Reihenschwingkreise bei Spannungsresonanz beziehungsweise das Verhältnis von Überströmen zu Quellenströmen für Parallelschwingkreise bei Stromresonanz:

$$Q = \frac{U_{L,0}}{U_q} = \frac{U_{C,0}}{U_q} \quad \text{bei Spannungsresonanz} \quad (5.7)$$

$$Q = \frac{I_{L,0}}{I_q} = \frac{I_{C,0}}{I_q} \quad \text{bei Stromresonanz} \quad (5.8)$$

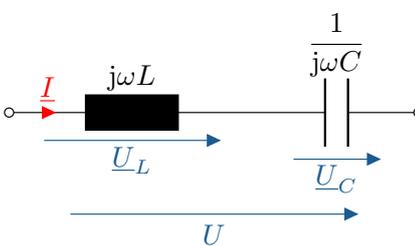
5.3 Resonanzfrequenz am Beispiel idealer LC-Schwingkreise

In Beispiel 5.1 wird exemplarisch die Resonanzkreisfrequenz für ideale LC-Serien- und LC-Parallelschwingkreise bestimmt.

Anhand der Beispiele wird rechnerisch verdeutlicht, weshalb in Reihenschwingkreisen eine Resonanz durch Spannungen und in Parallelschwingkreisen durch Ströme hervorgerufen wird. Zur Unterscheidung wird deshalb auch von einer **spannungsbezogenen** und einer **strombezogenen** Resonanz gesprochen.

Beispiel 5.1: Resonanz in LC-Schwingkreisen

Berechnung der Resonanzfrequenz ω_0 für LC-Serien- und LC-Parallelschwingkreise.

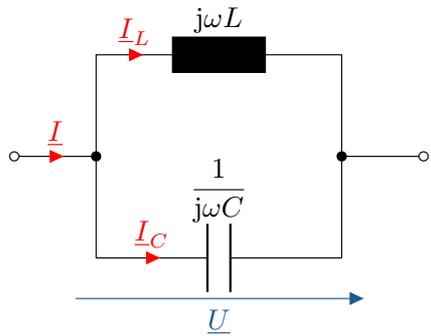


LC-Serienschwingkreis

Bei Anregung mit Spannung \underline{U} :

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{I} \cdot \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \\ &= \underline{I} \cdot j \left(\underbrace{\omega L - \frac{1}{\omega C}}_{=0 \text{ Resonanz}} \right) \\ \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} &= 0 \\ \Rightarrow \underline{I} &\rightarrow \infty \quad \text{für } \underline{U} = \text{konst.}\end{aligned}$$

Spannungsbezogene Resonanz
im Serienschwingkreis



LC-Parallelschwingkreis

Bei Anregung mit Strom \underline{I} :

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{U} \cdot \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right) \\ &= \underline{U} \cdot j \left(\underbrace{\omega C - \frac{1}{\omega L}}_{=0 \text{ Resonanz}} \right) \\ \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} &= 0 \\ \Rightarrow \underline{U} &\rightarrow \infty \quad \text{für } \underline{I} = \text{konst.}\end{aligned}$$

Strombezogene Resonanz
im Parallelschwingkreis

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Die **Resonanzfrequenz** ist für beide Schwingkreise gleich.

Im Resonanzfall heben sich im idealen Reihenschwingkreis die Spannungen über L und C gegenseitig auf. Daher können theoretisch beliebig hohe Spannungen über L und C entstehen. In realen Schaltungen wird die Spannung jedoch durch den ohmschen Widerstand R begrenzt. [Vgl. RLC-Schwingkreis in Kapitel 5.4]

Analog gilt das gleiche im Resonanzfall für die Ströme durch L und C im Parallelschwingkreis.

Die Resonanzfrequenz einfacher RLC-Schwingkreise ist identisch mit der idealer LC-Schwingkreise, da der Widerstand R sich nicht auf den Blindanteil der Impedanz auswirkt, mit R , L und C alle in Reihe oder alle parallel.

5.4 RLC-Reihenschwingkreis - Resonanzverhalten

In diesem Unterkapitel wird exemplarisch das Resonanzverhalten eines RLC-Serienschwingkreises untersucht. Der Schwingkreis ist in Abbildung 5.4 gezeigt und entspricht dem idealen LC-Serienschwingkreis aus Beispiel 5.1 mit einem zusätzlichen ohmschen Widerstand R in Reihe.

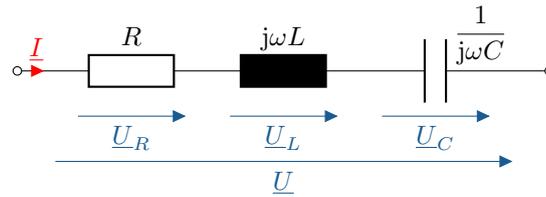


Abbildung 5.4: Schaltbild RLC-Serienschwingkreis

Die Impedanz \underline{Z} des RLC-Serienschwingkreis aus Abbildung 5.4 ist gegeben durch:

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right) \quad (5.9)$$

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (5.10)$$

Im Resonanzfall verschwindet nach Gleichung 5.1 der Imaginärteil der Impedanz. Folglich heben sich bei dieser Anordnung die Reaktanzen von Induktivität und Kapazität auf. Durch einsetzen von \underline{Z} in die Resonanzbedingung lässt sich die Resonanzfrequenz ω_0 bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\underline{Z}\} &= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Da die Reaktanz der Induktivität positiv und proportional zur Frequenz ist ($X_L \sim \omega$), und da die Reaktanz der Kapazität negativ und proportional zum Kehrwert der Frequenz ist ($-X_C \sim \frac{1}{\omega}$), überwiegt für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz der induktive Anteil und für Frequenzen unterhalb der kapazitive Anteil.

Daraus ergibt sich die folgende Fallunterscheidung für den RLC-Serienschwingkreis:

$$\text{Im}\{\underline{Z}\} = \begin{cases} \omega L - \frac{1}{\omega C} < 0 & \omega < \omega_0 & \text{ohmsch-kapazitiv} \\ \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 & \omega = \omega_0 & \text{rein ohmsch} \\ \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0 & \omega > \omega_0 & \text{ohmsch-induktiv} \end{cases} \quad (5.12)$$

Die Fallunterscheidung wird in Abbildung 5.5 anhand eines Zeigerdiagramms und in Abbildung 5.6 anhand einer Impedanzkurve verdeutlicht.

Exkurs: Freie Schwingung als Grenzfall der Resonanz

Die Bezeichnung Resonanz, von lateinisch *resonare* (widerhallen), bezieht sich, der Wortbedeutung entsprechend, immer auf Systemzustände bei externer Anregung.

Wie in Abbildung 5.1 gezeigt schwingt ein geladener RLC-Serienschwingkreis bei Kurzschluss der äußeren Anschlussklemmen im Zustand freier Schwingung mit dessen Eigenfrequenz.

Der Kurzschluss kann als ideale Spannungsquelle (Innenwiderstand $R_i = 0$) mit Spannung $U = 0$ betrachtet werden. Die Eigenfrequenz (mit Dämpfung) ergibt sich aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung des Schwingkreises. Mehr dazu in Modul 12: Schaltvorgänge.

Knoten- und Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R + u_L + u_C \stackrel{!}{=} 0 \\ i(t) &= i_R = i_L = i_C \end{aligned}$$

DGL:

$$\begin{aligned} u(t) &= iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \stackrel{!}{=} 0 \\ L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Ansatz:

$$i(t) = ke^{\lambda t} \qquad \frac{di}{dt} = k\lambda e^{\lambda t} \qquad \frac{d^2 i}{dt^2} = k\lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i &= 0 \\ k \cdot \underbrace{\left(L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} \right)}_{=0} e^{j\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

Auflösen:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Wie in Modul 12 näher erläutert wird, ergibt sich für den Fall, dass $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$ (geringe Dämpfung) eine komplexe Lösung. Nur in diesem Fall kann der Resonanzkreis frei schwingen mit, wobei der Realteil der Lösung die Abklingkonstante und der Imaginärteil (Wurzelterm) die Eigenkreisfrequenz ω_d definieren:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

5.4.1 Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm

Abbildung 5.5 zeigt für alle drei Fälle exemplarisch ein Zeigerdiagramm. Gezeigt sind die entstehenden Spannungen über R , L und C , sowie die Gesamtspannung \underline{U} bei einer Anregung mit konstantem Strom \underline{I} . Die maßstabsgetreuen Längenverhältnisse $\frac{U_L}{U_C}$ entsprechen: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{1}$.

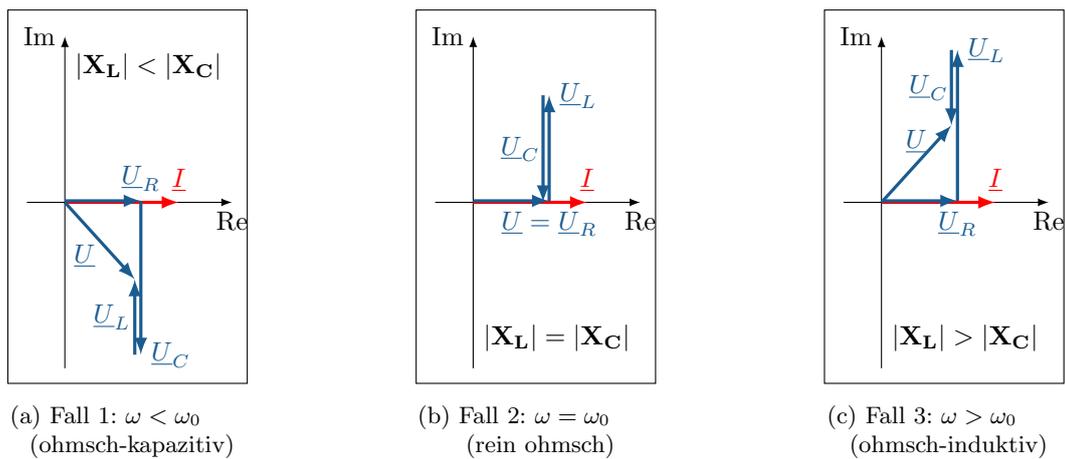


Abbildung 5.5: Zeigerdiagramm RLC-Serienschwingkreis

Da es sich um einen passiven Schwingkreis handelt (Verbraucherpfilsystem), ist die Wirkleistung P des Schwingkreis immer positiv mit $P = \text{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}\}$.

Bei reell eingepprägtem Strom \underline{I} ist der Realanteil der Gesamtspannung \underline{U} daher immer positiv. Der Zeiger der Gesamtspannung \underline{U} deutet also entweder in den ersten Quadranten (ohmsch-induktiv), in den vierten Quadranten (ohmsch-kapazitiv) oder auf die reale Achse (rein ohmsch).

5.4.2 Fallunterscheidung in Impedanzkurve

Für den Reihenschwingkreis aus Abbildung 5.4 ergibt sich die Impedanz zu:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R + j(X_L + X_C) \\ &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die kapazitive Reaktanz (hyperbolisch) überwiegt für Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz, die induktive Reaktanz (linear) überwiegt für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz wie in Gleichung 5.12 gezeigt ist.

Abbildung 5.6 zeigt die Impedanzkurve eines RLC-Serienschwingkreises in Abhängigkeit der Frequenz bezogen auf die Resonanzfrequenz f/f_0 äquivalent ω/ω_0 . Gezeigt sind die Beträge der Impedanz $|\underline{Z}|$, der Reaktanz $|X|$, der Reaktanz der Induktivität $|X_L|$, der Reaktanz der Kapazität $|X_C|$ und des ohmschen Widerstandes R .

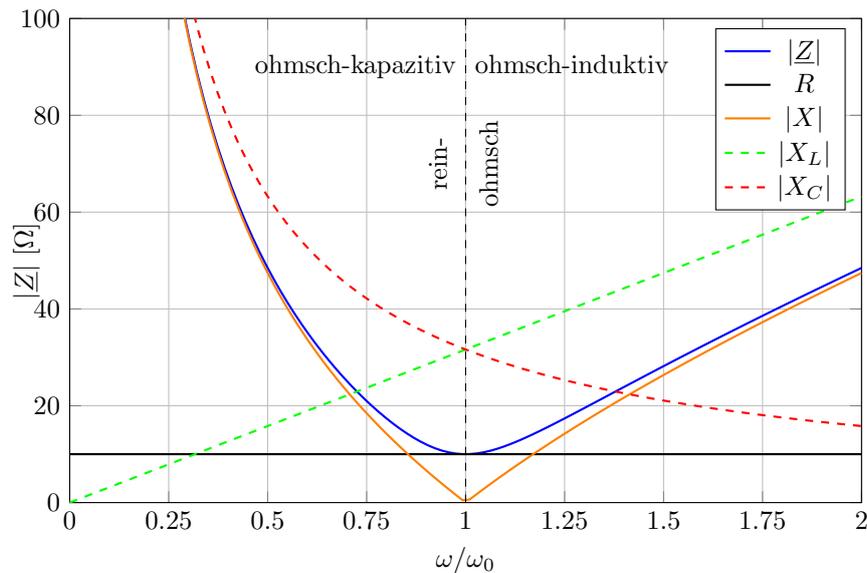


Abbildung 5.6: Impedanzkurve RLC-Serienschwingkreis
mit $R = 10 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$

Wie in der Impedanzkurve zu erkennen ist, ist die Impedanz im Resonanzfall rein ohmsch und entspricht dem ohmschen Widerstand R :

$$\underline{Z}_0 = R \quad (5.14)$$

Die Reaktanz der Induktivität X_L (positiv) und die Reaktanz der Kapazität X_C (negativ) heben sich im Resonanzfall auf (Schnittpunkt der Kurven). Die Beträge beider Reaktanzen sind im Resonanzfall gleich und entsprechen dem Kennwiderstand X_k :

$$\begin{aligned} X_k &= |X_{L,0}| = |X_{C,0}| = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &= \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Zu erkennen ist noch, dass der Betrag der Impedanz sich für sehr niedrige Frequenzen $\omega \ll \omega_0$ dem kapazitiven Verlauf annähert mit $\lim_{\omega \rightarrow 0} |Z| = |X_C|$ und für sehr hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ dem induktiven Verlauf annähert mit $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Z| = |X_L|$.

5.4.3 Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Reihenschwingkreises

Die Impedanz eines RLC-Serienschwingkreises lässt wie in Gleichung 5.10 über die Bauteilgrößen R , L und C in Abhängigkeit der Frequenz ω ausdrücken:

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (5.16)$$

Mithilfe der Resonanzkreisfrequenz aus Gleichung 5.11 kann die Kreisfrequenz auf diese normiert werden. Hierfür werden die ω der Reaktanz-Terme mit ω_0 erweitert ($\omega = \omega \frac{\omega_0}{\omega_0}$). Dadurch lassen sich die Reaktanzen X_L und X_C mithilfe des Kennwiderstandes X_k aus Gl. 5.15 ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= R + j \left(\omega L \frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{\omega C} \frac{\omega_0}{\omega_0} \right) \\
 &= R + j \left(X_{L,0} \frac{\omega}{\omega_0} + X_{C,0} \frac{\omega}{\omega_0} \right) \\
 &= R + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) X_k
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Dabei gilt:

$$X_L = +X_k \frac{\omega}{\omega_0} = +\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{\omega \sqrt{LC}}{1} = \omega L \quad (\text{linear}) \tag{5.18}$$

$$X_C = -X_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} = -\frac{1}{\omega C} \quad (\text{hyperbolisch}) \tag{5.19}$$

$$X_k = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{konstant}) \tag{5.20}$$

Wie in Gleichung 5.5 konstatiert, ist die Güte Q eines Reihenschwingkreises das Verhältnis dessen Kennwiderstandes X_k zum dessen ohmschen Widerstand R . Dadurch lässt sich die Impedanz des Schwingkreises normiert auf dessen Kennwiderstand X_k mithilfe der Güte Q ausdrücken:

$$\frac{\underline{Z}}{X_k} = \frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad \text{mit} \quad Q = \frac{X_k}{R} \tag{5.21}$$

Der Term $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ wird auch als relative Verstimmung ν_r bezeichnet.[4]

Abbildung 5.7 zeigt exemplarisch mehrere Resonanzkurven eines RLC-Serienschwingkreises für unterschiedliche Gütefaktoren Q zum Vergleich. Die y-Achse zeigt den Impedanzbetrag normiert auf den Kennwiderstand X_k und die x-Achse zeigt die Frequenz normiert auf die Resonanzfrequenz ω_0 .

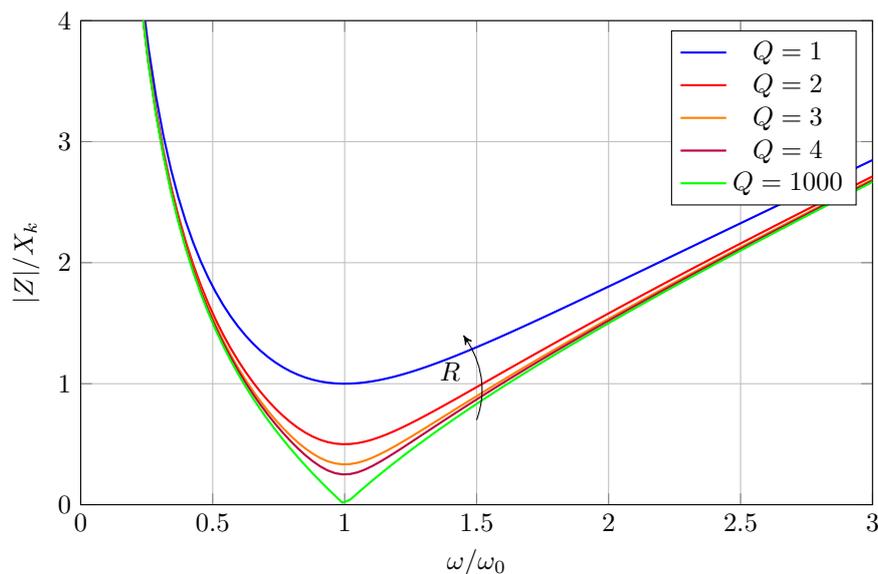


Abbildung 5.7: Resonanzkurve der Impedanz, RLC-Serienschwingkreis, Vergleich Güten

Im Bereich der Resonanzfrequenz zeigt sich der deutlichste Unterschied der einzelnen Impedanzkurven für unterschiedliche Gütefaktoren. Wie in Gleichung 5.14 gezeigt ist, gilt im Resonanzfall: $Z_0 = R$.

Eine hohe Güte bedeutet, dass der Schwingkreis bei Resonanzfrequenz eine sehr geringe Impedanz bezogen auf den Kennwiderstand X_k aufweist. Der Gütefaktor ist daher auch Maß für die Schwingungsfähigkeit des Schwingkreises beziehungsweise umgekehrt für die Dämpfung.

Dabei gilt für den Serienschwingkreis:

$$Q = \frac{X_k}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \quad (5.22)$$

Für Frequenzen weit unterhalb der Grenzfrequenz $\omega \ll \omega_0$ und weit oberhalb $\omega \gg \omega_0$ dominieren die Blindanteile der Impedanz wie in Kapitel 5.4 gezeigt ist. Daher ist der Einfluss der Güte auf die Impedanz bei diesen Frequenzen gering (Annäherung der Kurven).

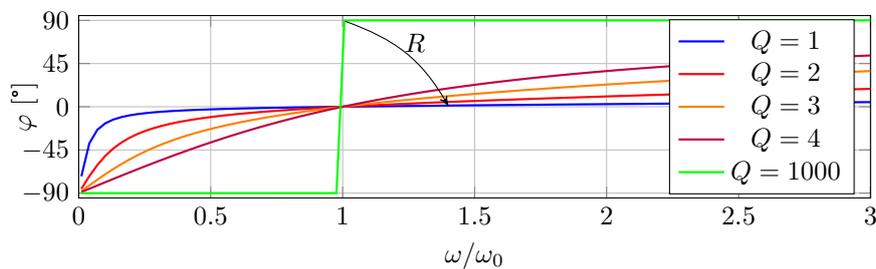


Abbildung 5.8: Resonanzkurve der Phase, RLC-Serienschwingkreis, Vergleich Güten

Abbildung 5.8 zeigt die Phasenkurve des Schwingkreises für unterschiedliche Güten mit $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$. Für Frequenzen deutlich unterhalb der Resonanzfrequenz $\omega \ll \omega_0$ ist die Phasenverschiebung φ nahezu -90° (rein kapazitiv). Für Frequenzen deutlich oberhalb der Resonanzfrequenz $\omega \gg \omega_0$ ist die Phasenverschiebung φ nahezu $+90^\circ$ (rein induktiv).

Je höher die Güte (Resonanzschärfe), desto steiler ist der Übergang im Bereich der Resonanzfrequenz von kapazitiv zu induktiv.

5.4.4 Spannungsresonanz am Beispiel eines RLC-Reihenschwingkreises

Bei Anregung eines Serienschwingkreises mit einer konstanten Spannungsquelle \underline{U}_q kann es zu einer **Spannungsresonanz** kommen, die sich durch Überspannungen an L und C auszeichnet.

Untersucht sei der RLC-Serienschwingkreis aus Abbildung 5.4 mit der Impedanz \underline{Z} aus Gleichung 5.10. Die Spannung \underline{U} über den Schwingkreis entspricht der konstanten Quellenspannung \underline{U}_q an dessen Außenklemmen wie in Abbildung 5.9 gezeigt.

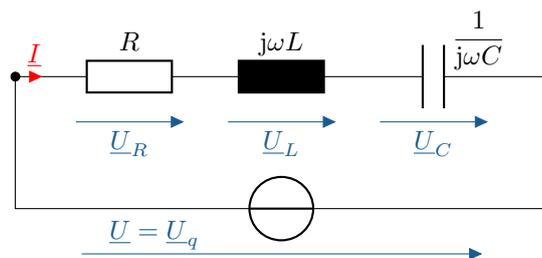


Abbildung 5.9: Schaltbild RLC-Serienschwingkreis mit konstanter Spannungsquelle

Mit der Knoten- und Maschengleichung:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{U}_q \\ \underline{I} &= \underline{I}_R = \underline{I}_L = \underline{I}_C\end{aligned}$$

und der Bauteil-Impedanzen folgen die komplexen Spannungsteiler:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} &= \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} &= \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} &= \frac{\underline{I}}{\underline{I}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\end{aligned}$$

Nach Kürzen der Ströme bleiben die frequenzvariablen Impedanzterme. Die einzelnen Spannungen ergeben sich durch deren Multiplikation mit der Spannung \underline{U} .

Um die frequenzabhängigen Spannungen zu normieren, lassen sich die Reaktanzen wie in Gleichung 5.15 mithilfe des Kennwiderstandes X_k und der Resonanzkreisfrequenz ω_0 aus Gleichung 5.11 ausdrücken. Mit der so normierten Impedanz aus Gleichung 5.17 ergibt sich für die Spannungsteiler die Terme:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} &= \frac{R}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k} \\ \frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} &= \frac{jX_k \frac{\omega}{\omega_0}}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k} \\ \frac{\underline{U}_C}{\underline{U}} &= \frac{-jX_k \frac{\omega_0}{\omega}}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k}\end{aligned}$$

Abbildung 5.10 zeigt die Beträge der Spannungen U_R , U_L , U_C des RLC-Serienschwingkreises in Abhängigkeit der Kreisfrequenz normiert auf die Resonanzkreisfrequenz. Die Normierung auf ω_0 ermöglicht zum Beispiel den Vergleich der Güte von Reihenschwingkreisen mit unterschiedlichen Resonanzfrequenzen.

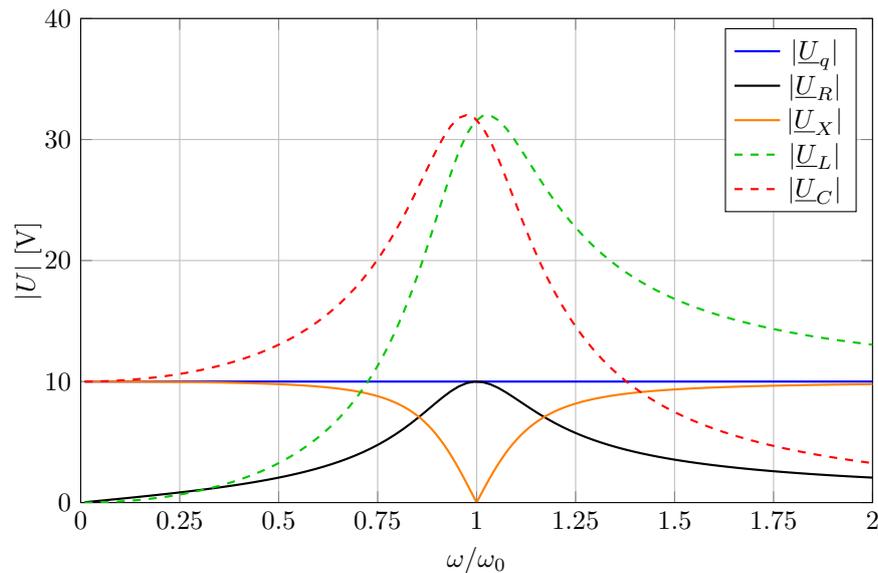


Abbildung 5.10: Resonanzkurve der Spannung am RLC-Serienschwingkreis
 $U_q = 10 \text{ V}$, $Q = 3,162$

Wie in der Abbildung zu erkennen ist, ergibt sich im Bereich der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$ eine deutlich höhere Spannung über L und C im Vergleich zum ohmschen Widerstand R .

Das Maß der Spannungsüberhöhung bei der Resonanzkreisfrequenz wird durch die Güte ausgedrückt. Wie in Gleichung 5.7 definiert ist, entspricht sie dem Verhältnis von Überspannung der Scheinwiderstände (X_L , X_C) $U_{L,0}$, $U_{C,0}$ zu Spannung des Wirkwiderstandes (R) $U_{R,0}$ im Resonanzfall ($\omega = \omega_0$).

$$Q = \frac{U_{L,0}}{U} = \frac{U_{C,0}}{U} = \frac{X_k}{R} \quad (5.23)$$

Wie in der Graphik zu erkennen ist, sind die Spannungsbeträge $|U_L|$ und $|U_C|$ nicht exakt bei der Resonanzfrequenz maximal!

Exkurs: Herleitung der Güte über die Blindleistung

Allgemein gilt für die Scheinleistung eines Bauteiles:

$$\underline{S} = S \cdot e^{j\varphi} \quad (5.24)$$

$$= U \cdot I \cos \varphi + jU \cdot I \sin \varphi \quad (5.25)$$

$$= P \cdot jQ \quad (5.26)$$

Induktivität und Kapazität können als Scheinwiderstände lediglich Blindleistung aufnehmen und abgeben. Mit $\varphi_L = +90^\circ$ und $\varphi_C = -90^\circ$ folgt für den Resonanzfall für die Blindleistung beider Bauteile:

$$Q_L = U_L I_L \cdot \sin\left(+\frac{\pi}{2}\right) = +U_L \cdot I_L \quad (5.27)$$

$$Q_C = U_C I_C \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -U_C \cdot I_C$$

Bei Anregung mit einer konstanten Spannungsquelle \underline{U}_q fließt im Reihenschwingkreis der gleiche Strom \underline{I} durch alle Bauteile.

Mit der allgemeinen Definition der Güte über die Blindleistung in Gleichung 5.4 der Induktivität Q_L respektive der Kapazität Q_C und der Wirkleistung P des Schwingkreises im Resonanzfall folgt für den Reihenschwingkreis:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{|Q_{L,0}|}{P_0} = \frac{U_{L,0}I_L}{U_{R,0}I_R} = \frac{U_{L,0}I}{U_{R,0}I} = \frac{U_{L,0}}{U} \\ &= \frac{|Q_{C,0}|}{P_0} = \frac{U_{C,0}I_C}{U_{R,0}I_R} = \frac{U_{C,0}I}{U_{R,0}I} = \frac{U_{C,0}}{U} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die Güte entspricht deshalb wie in Gleichung 5.28 gezeigt und in Gleichung 5.7 konstatiert, dem Verhältnis der Überspannung der Scheinwiderstände (L, C) gegenüber der Spannung des Wirkwiderstandes (R) im Resonanzfall.

Über die Spannungsteiler-Regel lässt sich die Güte durch einsetzen der Reaktanzen für den Resonanzfall auch als Verhältnis von Kennwiderstand zu Wirkwiderstand ausdrücken wie in Gleichung 5.5 konstatiert. Mit X_k aus Gl. 5.15 und Z aus Gl. 5.10 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{U_{L,0}}{U} &= \frac{I}{I} \cdot \frac{|jX_{L,0}|}{|R + j(X_{L,0} + X_{C,0})|} \\ &= \frac{|X_{L,0}|}{|R + j(\underbrace{X_{L,0} + X_{C,0}}_{=0})|} \\ &= \frac{|X_{L,0}|}{R} = \frac{X_k}{R} = Q \end{aligned} \quad (5.29)$$

5.4.5 Stromkurve des RLC-Reihenschwingkreises

Bei Anregung mit konstanter Spannung \underline{U}_q ergibt sich für den RLC-Serienschwingkreis aus Abbildung 5.9 ein frequenzabhängiger Stromverlauf. Dieser ist betragsmäßig in Abbildung 5.11 für verschiedene Gütefaktoren Q dargestellt.

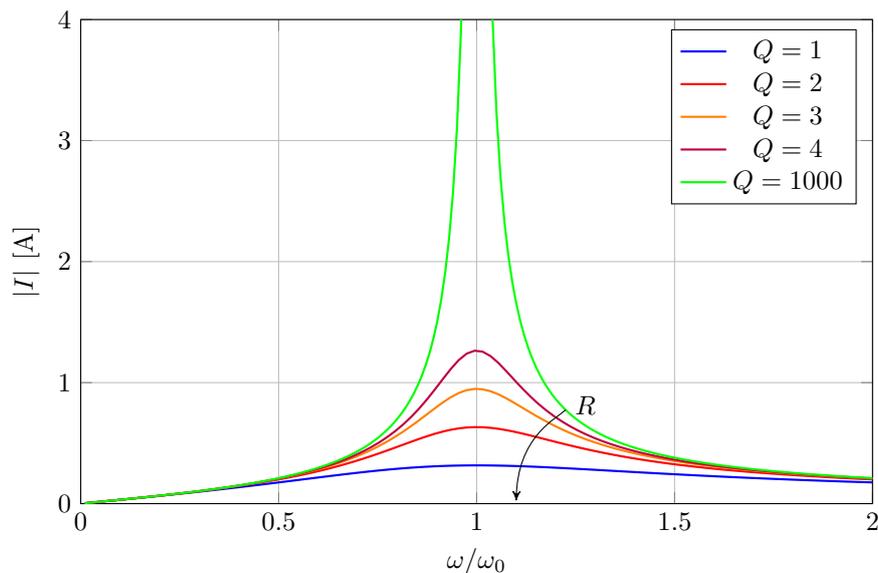


Abbildung 5.11: Stromkurve des RLC-Serienschwingkreises bei konstanter Spannung $X_k = 31,6 \Omega$, $U_q = 10 \text{ V}$, $Q = \text{var.}$

Der Strombetrag wird maximal bei Resonanzfrequenz wie der Graphik zu entnehmen ist. Wie in Abbildung 5.6 gezeigt ist, ist die Impedanz im Resonanzfall minimal und entspricht dem ohmschen Widerstand R .

Allgemein gilt für den Strom \underline{I} der folgende Zusammenhang mit der Impedanz \underline{Z} aus Gleichung 5.17 und Resonanzfrequenz ω_0 aus Gleichung 5.11:

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \\ &= \frac{\underline{U}_q}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{\underline{U}_q}{R + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) X_k}\end{aligned}\quad (5.30)$$

Der Maximalstrom I_0 ergibt sich für eine reelle Quellenspannung $\underline{U}_q = U_q$ aus dem Teiler der Quellenspannung durch den Widerstand R :

$$I_0 = \frac{U_q}{R} \quad \text{mit} \quad \underline{Z}_0 = R \quad (5.31)$$

Das heißt sowohl der Gesamtstrom \underline{I} als auch dessen Wirkanteil $\text{Re}\{\underline{I}\}$ werden durch den Widerstand R begrenzt.

Für den Strom \underline{I} bezogen auf den Maximalstrom I_0 gilt mit der Güte aus Gleichung 5.28:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{I}}{I_0} &= \frac{\underline{U}_q}{\underline{Z}} \cdot \frac{R}{U_q} = \frac{R}{\underline{Z}} \\ &= \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) Q}\end{aligned}\quad (5.32)$$

5.4.6 Spannungskurve des RLC-Reihenschwingkreis

Wird ein RLC-Serienschwingkreis mit einem konstanten Strom \underline{I}_q wie in Abbildung 5.12 angeregt, ergeben sich Bauteilspannungen.

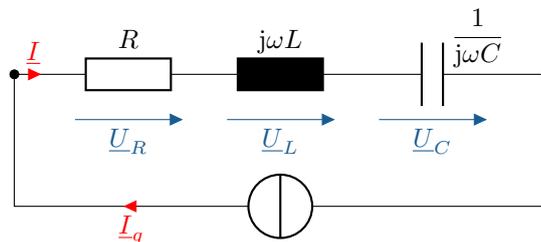


Abbildung 5.12: Schaltbild RLC-Serienschwingkreis mit konstanter Stromquelle

Die Bauteilspannungen sind dabei direkt proportional zu den jeweiligen Impedanzen. Für die Gesamtspannung gilt:

$$\underline{U} = \underline{I}_q \cdot \underline{Z}$$

Die Spannungskurve entspricht daher exakt dem Verlauf der Impedanzkurve in Abbildung 5.7.

5.5 RLC-Parallelschwingkreis - Resonanzverhalten

In diesem Unterkapitel wird das Resonanzverhalten eines RLC-Parallelschwingkreis untersucht. Der Schwingkreis ist in Abbildung 5.13 gezeigt und entspricht dem idealen LC-Parallelschwingkreis aus Beispiel 5.1 mit einem zusätzlichen parallelen ohmschen Widerstand R .

Die Untersuchung erfolgt analog zu jener für den RLC-Serienschwingkreis in Kapitel 5.4. Im Parallelschwingkreis wird dabei vornehmlich die Admittanz \underline{Y} betrachtet. Dadurch ergeben sich ähnliche Fallunterscheidungen und Rechenwege wie im Serienschwingkreis, wobei die Rollen von Strom und Spannung, von Induktivität und Kapazität, sowie von Widerstand und Leitwert vertauscht sind:

$$\underline{Y} = \underline{Z}^{-1} = G + jB = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad (5.33)$$

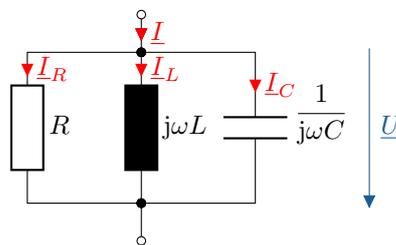


Abbildung 5.13: Schaltbild RLC-Parallelschwingkreis

Die Admittanz \underline{Y} des RLC-Parallelschwingkreis aus Abbildung 5.13 ist gegeben durch:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot (G + jB_C + jB_L) \quad (5.34)$$

$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (5.35)$$

Im Resonanzfall verschwindet nach Gleichung 5.1 der Imaginärteil der Impedanz respektive Admittanz. Folglich heben sich bei dieser Anordnung die Suszeptanzen von Induktivität B_L und Kapazität B_C auf. Durch einsetzen von \underline{Y} in die Resonanzbedingung lässt sich die Resonanzfrequenz ω_0 bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\underline{Y}\} &= \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \stackrel{!}{=} 0 \\ \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Da die Suszeptanz der Kapazität positiv und proportional zur Frequenz ist ($B_C = \omega C \sim \omega$), und da die Suszeptanz der Induktivität negativ und proportional zum Kehrwert der Frequenz ist ($-B_L \sim \frac{1}{\omega}$), überwiegt für Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz der induktive Anteil und für Frequenzen oberhalb der kapazitive Anteil.

Daraus ergibt sich die folgende Fallunterscheidung für den RLC-Serienschwingkreis:

$$\text{Im}\{\underline{Y}\} = \begin{cases} \omega C - \frac{1}{\omega L} < 0 & \omega < \omega_0 & \text{ohmsch-induktiv} \\ \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 & \omega = \omega_0 & \text{rein ohmsch} \\ \omega C - \frac{1}{\omega L} > 0 & \omega > \omega_0 & \text{ohmsch-kapazitiv} \end{cases} \quad (5.37)$$

Die Fallunterscheidung wird in Abbildung 5.14 anhand eines Zeigerdiagramms und in Abbildung 5.15 anhand einer Admittanzkurve verdeutlicht.

5.5.1 Fallunterscheidung im Zeigerdiagramm

Abbildung 5.14 zeigt für alle drei Fälle exemplarisch ein Zeigerdiagramm.

Gezeigt sind die entstehenden Ströme durch R , L und C , sowie der Gesamtstrom \underline{I} bei Anregung mit konstanter Spannung \underline{U} . Die maßstabsgetreuen Längenverhältnisse $\frac{I_L}{I_C}$ entsprechen: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\frac{2}{1}$.

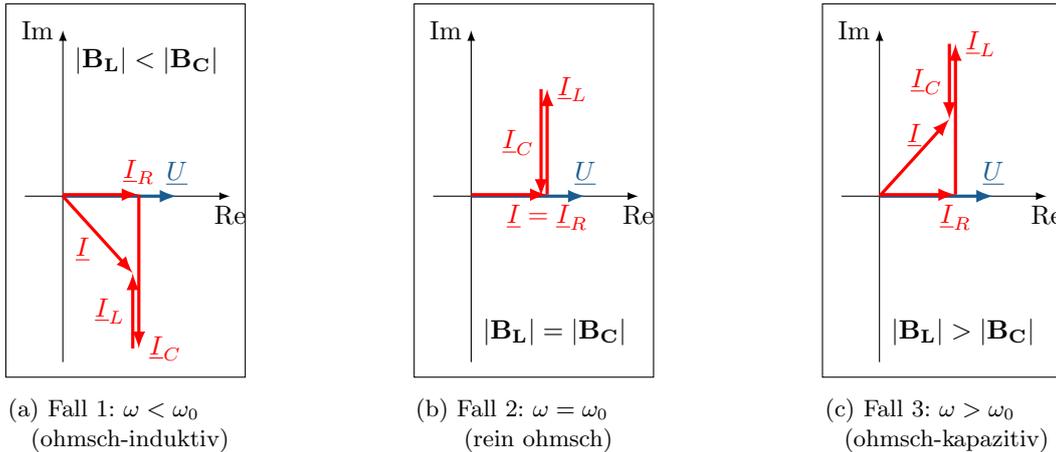


Abbildung 5.14: Zeigerdiagramm RLC-Parallelschwingkreis

Da es sich um einen passiven Schwingkreis handelt (Verbraucherzählpeilsystem), ist die Wirkleistung P des Schwingkreises immer positiv mit $P = \text{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}\}$.

Bei angelegter Spannung \underline{U} (mit Phasenwinkel 0 eingezeichnet) ist der Realanteil des Gesamtstrom \underline{I} immer positiv. Der Zeiger des Gesamtstrom \underline{I} deutet also entweder in den ersten Quadranten (ohmsch-induktiv), auf die reale Achse (rein ohmsch) oder in den vierten Quadranten (ohmsch-kapazitiv).

5.5.2 Fallunterscheidung in Admittanzkurve

Für den Parallelschwingkreis aus Abbildung 5.13 ergibt sich die Admittanz wie in Gleichung 5.35 zu:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= G + j(B_C + B_L) \\ &= G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die induktive Suszeptanz (hyperbolisch) überwiegt für Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz, die kapazitive Suszeptanz (linear) überwiegt für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz wie in Gleichung 5.37 gezeigt ist.

Abbildung 5.15 zeigt die Admittanzkurve eines RLC-Parallelschwingkreises in Abhängigkeit der Frequenz bezogen auf die Resonanzfrequenz f/f_0 äquivalent ω/ω_0 . Gezeigt sind die Beträge der Admittanz $|\underline{Y}|$, der Suszeptanz $|B|$, der Suszeptanz der Kapazität $|B_C|$, der Suszeptanz der Induktivität $|B_L|$ und der ohmsche Leitwert G .

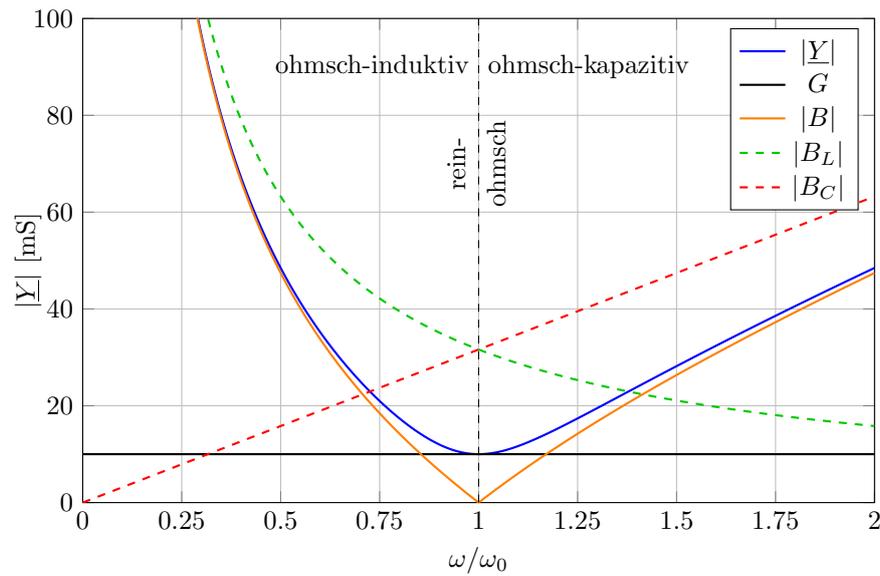


Abbildung 5.15: Admittanzkurve RLC-Parallelschwingkreis
mit $R = 10 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$, $C = 10 \mu\text{F}$

Wie in der Admittanzkurve zu erkennen ist, ist die Admittanz im Resonanzfall rein ohmsch und entspricht exakt dem ohmschen Leitwert G :

$$\underline{Y}_0 = G \quad (5.39)$$

Die Suszeptanzen der Kapazität B_C (positiv) und der Induktivität B_L (negativ) heben sich im Resonanzfall auf (Schnittpunkt der Kurven). Die Beträge beider Suszeptanzen sind im Resonanzfall gleich und entsprechen dem Kennleitwert B_k :

$$\begin{aligned} B_k &= |B_{C,0}| = |B_{L,0}| = \sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Zu erkennen ist noch, dass der Betrag der Admittanz sich für sehr niedrige Frequenzen $\omega \ll \omega_0$ dem induktiven Verlauf annähert mit $\lim_{\omega \rightarrow 0} |Y| = |B_L|$ und für sehr hohe Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ dem kapazitiven Verlauf annähert mit $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |Y| = |B_C|$.

5.5.3 Resonanzkurve und Gütefaktor eines RLC-Parallelschwingkreis

Die Admittanz eines RLC-Parallelschwingkreis lässt wie in Gleichung 5.35 über die Bauteilgrößen R , L und C in Abhängigkeit der Frequenz ω ausdrücken mit:

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (5.41)$$

Mithilfe der Resonanzkreisfrequenz aus Gleichung 5.36 kann die Kreisfrequenz auf diese normiert werden. Die Berechnung erfolgt analog zur Frequenznormierung bei der Impedanz des RLC-Serienschwingkreises in Gleichung 5.17. Die Suszeptanzen B_C und B_L werden dafür mithilfe des Kennleitwertes B_k aus Gl. 5.40 und dem Frequenzverhältnis von ω zu ω_0 beschrieben. Für die Admittanz folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{Y} &= G + j \left(\omega C \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{1}{\omega L} \frac{\omega_0}{\omega} \right) \\
&= G + j \left(B_{C,0} \frac{\omega}{\omega_0} - B_{L,0} \frac{\omega}{\omega_0} \right) \\
&= G + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) B_k
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Dabei gilt:

$$B_C = +B_k \frac{\omega}{\omega_0} = \omega C \quad (\text{linear}) \tag{5.43}$$

$$B_L = -B_k \frac{\omega_0}{\omega} = -\frac{1}{\omega L} \quad (\text{hyperbolisch}) \tag{5.44}$$

$$B_k = \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{konstant}) \tag{5.45}$$

Wie in Gleichung 5.6 konstatiert, lässt sich die Güte Q eines Parallelschwingkreises durch das Verhältnis von Kennleitwert B_k zum Wirkleitwert G beschreiben. Die Definition unterscheidet sich in dieser Hinsicht von jener im Serienschwingkreis.

Über die allgemeine Definition der Güte in Gleichung 5.4 anhand des Verhältnisses von Blindleistung zu Wirkleistung lässt sich die spezielle Güte-Definition für den Parallelschwingkreis ableiten. Gleiches gilt für den Serienschwingkreis wie in Gleichung 5.28 gezeigt ist.:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{|Q_{L,0}|}{P_0} = \frac{U \cdot I_{L,0}}{U \cdot I_R} = \frac{I_{L,0}}{I_R} = \frac{|B_{L,0}|}{G} \\
&= \frac{|Q_{C,0}|}{P_0} = \frac{U \cdot I_{C,0}}{U \cdot I_R} = \frac{I_{C,0}}{I_R} = \frac{|B_{C,0}|}{G} = \frac{B_k}{G}
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Dadurch lässt sich die Impedanz des Schwingkreises normiert auf dessen Kennleitwert B_k mithilfe der Güte Q ausdrücken:

$$\frac{\underline{Y}}{B_k} = \frac{1}{Q} + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \quad \text{mit} \quad Q = \frac{B_k}{G} \tag{5.47}$$

Der Term $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ wird auch als relative Verstimmung ν_r bezeichnet.[4]

Abbildung 5.16 zeigt exemplarisch mehrere Resonanzkurven eines RLC-Parallelschwingkreises für unterschiedliche Gütefaktoren Q zum Vergleich. Die y-Achse zeigt den Admittanzbetrag normiert auf den Kennleitwert B_k und die x-Achse zeigt die Kreisfrequenz normiert auf die Resonanzkreisfrequenz ω_0 .

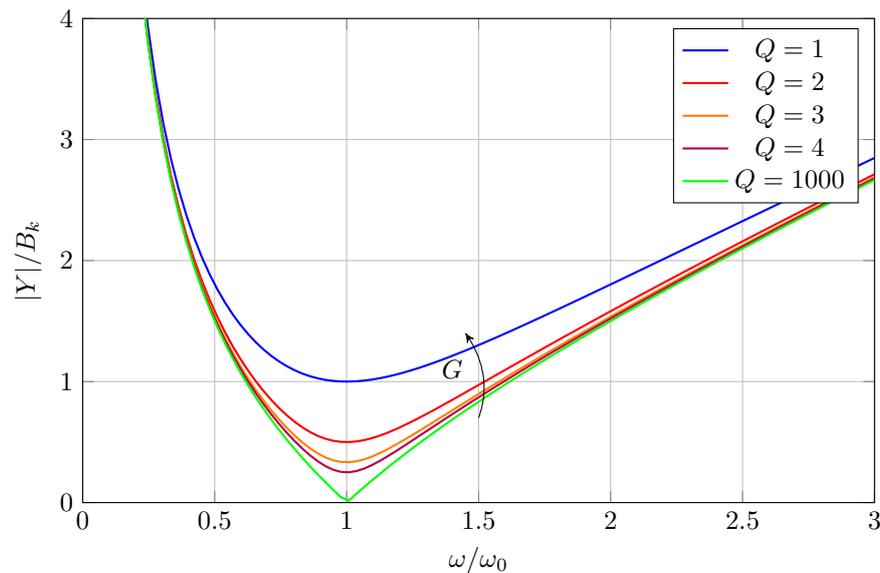


Abbildung 5.16: Resonanzkurve RLC-Parallelschwingkreis, Vergleich Gütefaktoren

Die Bauteilgrößen sind gleich gewählt wie für die Impedanzkurve des RLC-Serienschwingkreises in Abbildung 5.6. Anhand der Gleichungen 5.42 und 5.47 zeigt sich, dass die normierte Darstellung bei beiden Kurven den direkten Vergleich der Gütefaktoren ermöglicht.

Im Bereich der Resonanzfrequenz zeigt sich der deutlichste Unterschied der einzelnen Admittanzkurven für unterschiedliche Gütefaktoren. Mit $\underline{Y}_0 = G = \frac{B_k}{Q}$ entspricht die Admittanz im Resonanzfall direkt dem ohmschen Leitwert G und ist umgekehrt proportional zur Güte.

Die Güte ist Maß für die Schwingungsfähigkeit des Schwingkreises und Maß für die umgekehrte Dämpfung des Schwingkreises. Im Gegensatz zu einem Reihenschwingkreis bedeutet eine hohe Güte im Parallelschwingkreis einen geringen Wirkleitwert G (hoher Wirkwiderstand R) im Verhältnis zu einem hohen Blindleitwert B (geringer Blindwiderstand X).

5.5.4 Stromresonanz am Beispiel eines RLC-Parallelschwingkreises

Bei Anregung eines Parallelschwingkreises mit einer konstanten Stromquelle \underline{I}_q kann es zu einer **Stromresonanz** kommen, die sich durch Überströmen zwischen L und C auszeichnet.

Untersucht sei der RLC-Parallelschwingkreis aus Abbildung 5.13 mit der Admittanz \underline{Y} aus Gleichung 5.35. Der Strom \underline{I} durch den Schwingkreis entspricht dem konstanten Quellenstrom \underline{I}_q an dessen Außenklemmen wie in Abbildung 5.17 gezeigt ist.

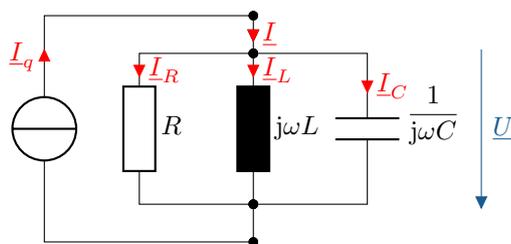


Abbildung 5.17: Schaltbild RLC-Parallelschwingkreis mit konstanter Stromquelle

Mit der Knoten- und Maschengleichung:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_R = \underline{U}_L = \underline{U}_C \\ \underline{I} &= \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I}_q\end{aligned}$$

und der Bauteil-Admittanzen folgen die komplexen Stromteiler:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{I}_R}{\underline{I}} &= \frac{\underline{U}}{\underline{U}} \cdot \frac{\underline{Y}_R}{\underline{Y}} = \frac{G}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \\ \frac{\underline{I}_L}{\underline{I}} &= \frac{\underline{U}}{\underline{U}} \cdot \frac{\underline{Y}_L}{\underline{Y}} = \frac{\frac{1}{j\omega L}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \\ \frac{\underline{I}_C}{\underline{I}} &= \frac{\underline{U}}{\underline{U}} \cdot \frac{\underline{Y}_C}{\underline{Y}} = \frac{j\omega C}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}\end{aligned}$$

Die Stromverhältnisse von Bauteilströmen zu Gesamtstrom entsprechen dem frequenzvariablen Verhältnis von Bauteiladmittanz zu Gesamtadmittanz. Die Berechnung des Stromteilers über die Admittanzen bietet sich in Parallelschaltungen aufgrund der einfachen Addition der Einzeladmittanzen an ähnlich wie die Berechnung über die Impedanz in Serienschaltungen.

Um die frequenzabhängigen Ströme zu normieren, lassen sich die Suszeptanzen wie in Gleichung 5.40 mithilfe des Kennleitwerts B_k und der Resonanzkreisfrequenz ω_0 aus Gleichung 5.36 ausdrücken. Mit der so normierten Admittanz aus Gleichung 5.42 ergeben sich für die Spannungsteiler die Terme:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{I}_R}{\underline{I}} &= \frac{G}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k} \\ \frac{\underline{I}_L}{\underline{I}} &= \frac{-j\frac{\omega_0}{\omega} B_k}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k} \\ \frac{\underline{I}_C}{\underline{I}} &= \frac{j\frac{\omega}{\omega_0} B_k}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k}\end{aligned}\tag{5.48}$$

Abbildung 5.18 zeigt die Beträge der Ströme I_R , I_L , I_C in Abhängigkeit der Kreisfrequenz normiert auf die Resonanzkreisfrequenz.

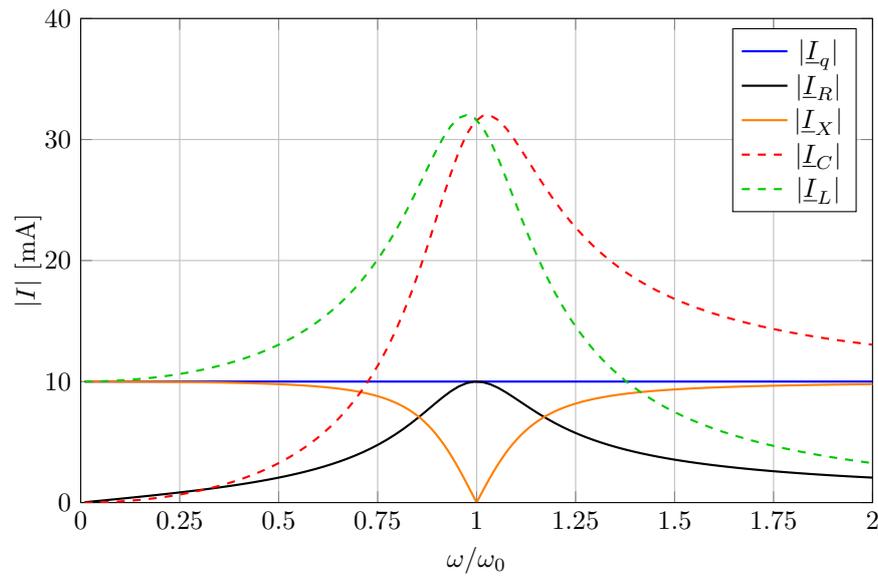


Abbildung 5.18: Resonanzkurve des Stromes am RLC-Parallelschwingkreis
 $U_q = 10 \text{ V}$, $Q = 3,162$

Wie in der Abbildung zu erkennen ist, ergibt sich im Bereich der Resonanzkreisfrequenz $\omega = \omega_0$ eine Stromüberhöhung bei L und C im Vergleich zum ohmschen Widerstand R . Dabei liegt das jeweilige Maximum des Stromes nicht exakt bei ω_0 , sondern für L leicht unterhalb und für C leicht oberhalb der Resonanzfrequenz.

Die Güte entspricht wie in Gleichung 5.46 gezeigt und in Gleichung 5.8 konstatiert, dem Verhältnis des Überstromes zum Gesamtstrom im Resonanzfall. Im Resonanzfall gilt $I_0 = I_{R,0} = I_{q,0}$. Deshalb lässt sich die Güte der Stromteiler-Regel entsprechend als Verhältnis von Kennleitwert B_k zu Wirkleitwert G ausdrücken:

$$Q = \frac{I_{L,0}}{I} = \frac{I_{C,0}}{I} = \frac{B_k}{G} \quad (5.49)$$

Die frequenzabhängigen Stromverhältnisse ausgedrückt durch die Güte Q mit \underline{Y} aus Gleichung 5.47:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{I}_R}{\underline{I}} &= \frac{\frac{1}{Q}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \\ \frac{\underline{I}_L}{\underline{I}} &= \frac{-j\frac{\omega_0}{\omega}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \\ \frac{\underline{I}_C}{\underline{I}} &= \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{1}{Q} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned} \quad (5.50)$$

5.5.5 Spannungskurve des RLC-Parallelschwingkreis

Bei Anregung mit konstantem Strom \underline{I}_q wie in Abbildung 5.17 ergibt sich für den RLC-Parallelschwingkreis aus Abbildung 5.17 ein frequenzabhängiger Spannungsverlauf. Dieser ist betragsmäßig in Abbildung 5.19 für verschiedene Gütefaktoren Q dargestellt.

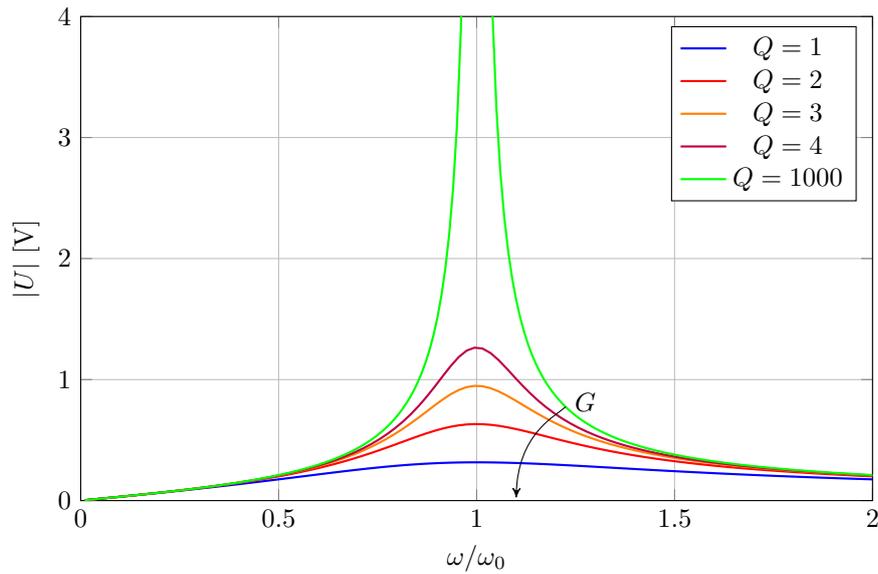


Abbildung 5.19: Spannungskurve des RLC-Parallelschwingkreises bei konstantem Strom $B_k = 31,6 \text{ mS}$, $I_q = 10 \text{ mA}$, $Q = \text{var.}$

Das Spannungsverhalten des RLC-Parallelschwingkreises ist analog zum Stromverhalten des RLC-Serienschwingkreises, wie es in Kapitel 5.4.5 beschrieben wurde.

Mit der Admittanz normiert auf den Kennleitwert aus Gleichung 5.47, den Kirchhoffschen Regeln und dem ohmschen Gesetz folgt für die Spannung \underline{U} :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{\underline{I}}{\underline{Y}} \\ &= \frac{\underline{I}_q}{G + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{\underline{I}_q}{G + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) B_k} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Die Maximalspannung U_0 ergibt sich im Resonanzfall. Sie entspricht dem Teiler des reellen Quellenstrom $\underline{I}_q = I_q$ durch den Wirkleitwert G :

$$U_0 = \frac{I_q}{G} \quad \text{mit} \quad Y_0 = G \quad (5.52)$$

Dadurch werden die komplexe Gesamtspannung \underline{U} als auch deren Wirkanteil $\text{Re}\{\underline{U}\}$ durch den Leitwert G und den Quellenstrom I_q begrenzt.

Für die Spannung \underline{U} normiert auf die Maximalspannung U_0 folgt aus Gl. 5.51:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}}{U_0} &= \frac{\underline{Y}}{\underline{I}_q} = \frac{G}{\underline{Y}} \\ &= \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) Q} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Der normierte Spannungsverlauf des RLC-Parallelschwingkreises entspricht also exakt dem normierten Stromverlauf des RLC-Serienschwingkreises mit Abbildung 5.10 und Gleichung 5.32.

5.5.6 Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises

Die Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises bei Anregung mit einer konstanten Spannungsquelle \underline{U}_q ergibt sich aus der Admittanz \underline{Y} und der Spannungsquelle \underline{U}_q :

$$\underline{I} = \underline{U}_q \cdot \underline{Y}$$

Damit ist der Strom \underline{I} direkt proportional zur Admittanz \underline{Y} und damit zur Kreisfrequenz ω . Die Stromkurve des RLC-Parallelschwingkreises entspricht also der Admittanzkurve des Schwingkreises wie sie in Abbildung 5.16 dargestellt ist.

6 Nebenrechnungen

Frequenzgang eines RC-Tiefpass 1. Ordnung. [Nebenrechnung zu Gleichung (2.6)]

$$\begin{aligned}
 \underline{F}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} & \quad \left| \quad = \frac{Z_C}{(Z_R + Z_C)} \cdot \underline{I} \quad \text{Komplexe Spannungsteilerregel} \\
 & = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \quad \left| \quad \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} \quad \text{Rationalisieren} \\
 & = \frac{1}{j\omega CR + 1} \quad \left| \quad \quad \quad \text{Umformen} \quad (6.1) \\
 & = \frac{1}{1 + j\omega CR} \quad \left| \quad \cdot \frac{1 - j\omega CR}{1 - j\omega CR} \quad \text{Optional für kartesische Form} \\
 & = \frac{1 - j\omega CR}{1 + (\omega CR)^2}
 \end{aligned}$$

A Übungsaufgaben

A.1 RC-Tiefpass 1. Ordnung

Die Ausgangsspannung eines RC-Tiefpasses soll bei der Frequenz $f = 1 \text{ kHz}$ nur noch 10% der Eingangsspannung betragen. Wie groß ist die Grenzfrequenz zu wählen?

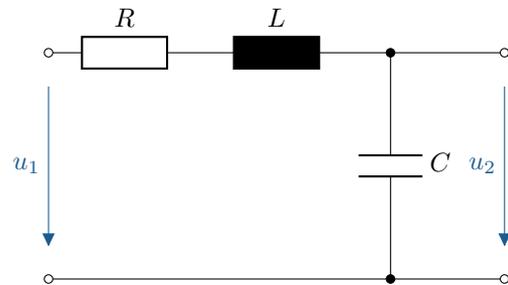
A.2 RC-Hochpass 1. Ordnung

Wie groß ist die Phasenverschiebung φ bei einem RC-Hochpass 1. Ordnung, wenn die Sperrdämpfung (Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangsspannung) -6 dB beträgt?

A.3 Frequenzgang eines RLC-Serienschwingkreises

Gegeben ist die rechts dargestellte Schaltung mit $L = 20 \text{ mH}$, einem Widerstand $R = 150 \Omega$ und einem Kondensator mit $C = 1 \mu\text{F}$.

- Geben Sie die Resonanzfrequenz der Schaltung an. Handelt es sich um Strom- oder Spannungsresonanz?
- Leiten Sie den Frequenzgang $\frac{U_2}{U_1}$ allgemein her.



- Berechnen und skizzieren Sie den Betrag des Frequenzganges $\frac{U_2}{U_1}$ in halblogarithmischer Darstellung. Geben Sie den Betrag für $\omega = 0, 100 \text{ s}^{-1}, 2000 \text{ s}^{-1}, 3500 \text{ s}^{-1}, \omega_0, 10000 \text{ s}^{-1}$ und ∞ an.
- Kommt es bei einer Induktivität von 10 mH im Resonanzfall zu einer Spannungsüberhöhung?

A.4 Frequenzgang eines Vierpols aus R, L und C

Die rechts dargestellte Schaltung soll untersucht werden. Hierbei sollen für die Bauelemente die allgemeinen Werte R_1, R_2, L, C verwendet werden.

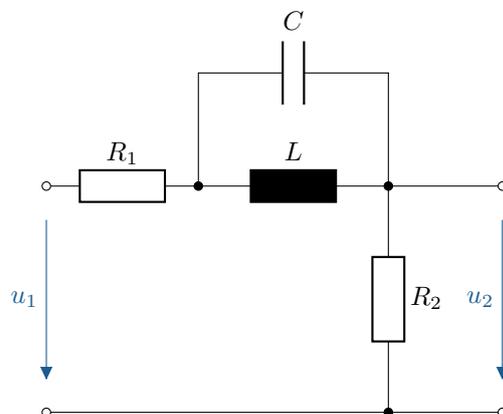
- Bestimmen Sie das Spannungsteilverhältnis

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}$$

- Berechnen und skizzieren Sie den Betrag und die Phase von $\underline{F}(j\omega)$. Kennzeichnen Sie charakteristische Punkte.
- Berechnen Sie die Ausgangsspannung $u_2(t)$, wenn für die Eingangsspannung

$$u_1(t) = 5 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \cdot t)$$

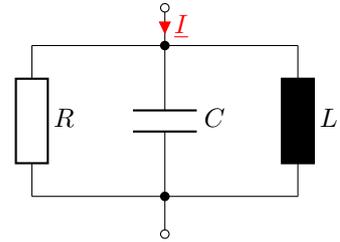
gilt.



A.5 RLC-Parallelschwingkreis

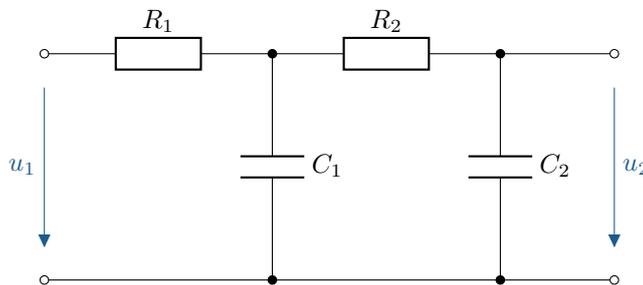
Der rechts dargestellte Schwingkreis soll untersucht werden.

- Bestimmen Sie die komplexe Gesamtimpedanz \underline{Z} in allgemeiner Form.
- Skizzieren Sie den Betrag der komplexen Impedanz in linearer Darstellung und kennzeichnen Sie charakteristische Punkte.
- Berechnen Sie die Resonanzfrequenz f_0 , sowie die Frequenzen f_u und f_o , bei denen der Betrag von $\underline{Z}(\omega)$ auf $\frac{Z_0}{\sqrt{2}}$ gefallen ist, wobei Z_0 der Betrag der Gesamtimpedanz im Resonanzfall ist. Bestimmen Sie auch die Differenz der beiden Frequenzen. Diese gibt die Bandbreite B an. Für diesen Aufgabenteil gilt $R = 300 \Omega$, $L = 200 \text{ mH}$ und $C = 1 \mu\text{F}$.
- Die Bandbreite wird auch mit der Formel $B = \frac{f_0}{Q}$ bestimmt. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil c).
- Liegen die obere und die untere Grenzfrequenz symmetrisch um f_0 ?



A.6 RC-Filter zweiter Ordnung

Für die untenstehende hintereinandergeschalteten RC-Glieder gilt $R_1 = R_2 = R = 1000 \Omega$ und $C_1 = C_2 = C = 1 \mu\text{F}$.



- Bestimmen Sie den Frequenzgang der Schaltung $\underline{F}(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}$.
- Zeichnen Sie den Amplitudengang und den Phasengang in logarithmischer Darstellung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem einfachen RC-Glied mit denselben Bauelementen.

A.7 Impedanz- und Admittanzortskurve eines RL-Gliedes

Gegeben ist die Serienschaltung aus einer Induktivität $L = 10 \text{ mH}$ und einem Widerstand $R = 5 \text{ k}\Omega$ bei einer variablen Frequenz mit $f_{\min} = 5 \text{ kHz}$ und $f_{\max} = 50 \text{ kHz}$.

- Bestimmen Sie die Impedanzortskurve und stellen Sie diese quantitativ dar. Kennzeichnen Sie den Parameter an mindestens drei sinnvollen Stellen.
- Zeichnen Sie die invertierte Ortskurve (Admittanzortskurve). Überlegen Sie sich zunächst den prinzipiellen Verlauf und benutzen Sie dann einige Zahlenwerte aus dem vorherigen Aufgabenteil a) für die Bestimmung der Ortskurvenpunkte.

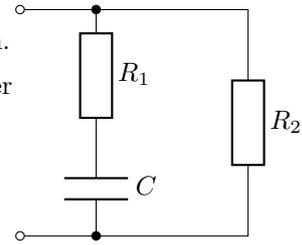
A.8 Admittanzortskurve gemischter Reihen-/Parallelschaltung

Die Admittanz der rechts gezeigten Schaltung soll untersucht werden.

Parallel zu einer Reihenschaltung aus dem Widerstand R_1 und der Kapazität C befindet sich ein zweiter Widerstand R_2 .

Die Bauteilwerte sind gegeben durch:

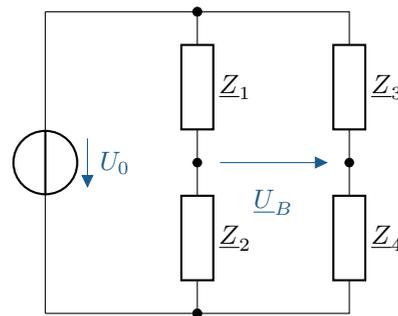
$$R_1(p) = p \cdot R_0, \quad R_0 = 5 \Omega, \quad R_2 = 20 \Omega \quad \text{und} \quad \omega C = 5 \Omega$$



- Bestimmen Sie die Admittanz für $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$ und $p \rightarrow \infty$.
- Skizzieren Sie den Verlauf der Admittanzortskurve und zeichnen Sie die Werte ein. (Empfohlener Darstellungsbereich: $0 + j0$ bis $0,25 \text{ S} + j0,25 \text{ S}$)
- Für welchen Wert von p eilt der Gesamtstrom \underline{I} einer angelegten Wechselspannung \underline{U} um 45° voraus? Bestimmen Sie zeichnerisch den Wert für \underline{Y} .
- Überprüfen Sie das Ergebnis aus c) rechnerisch.

A.9 Wechselstrommessbrücke

- Bestimmen Sie allgemein die Gleichung für die Messspannung \underline{U}_B . Bringen Sie das Ergebnis auf einen gemeinsamen Nenner und kürzen Sie, wenn möglich.
- Im Ausschlagsverfahren soll ein Blindwiderstand gemessen werden. Im gegebenen Messbereich seien $\underline{Z}_1 = jX_1$ und $\underline{Z}_2 = jX_2$ (reine Blindwiderstände) und $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = R$ (reine Wirkwiderstände). Bestimmen Sie die Gleichung für die Messspannung \underline{U}_B .



- Ist die Messspannung \underline{U}_B aus Aufgabe b) frequenzabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Wie verhält sich die Messspannung \underline{U}_B bei $X_1 = X_2$?
- Wie verhält sich die Messspannung \underline{U}_B bei $X_1 = -X_2$?

B Lösungen zu den Übungsaufgaben

B.1 RC-Tiefpass 1. Ordnung

$$\begin{aligned}\underline{F}(j\omega) &= \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \\ A(\omega) &= \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ A(\omega_g) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g RC)^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{RC} \\ A(\omega) &\stackrel{!}{=} 0,1 \Rightarrow \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \stackrel{!}{=} 10 \\ \Leftrightarrow 1 + (\omega RC)^2 &= 100 \Leftrightarrow (\omega RC)^2 = 99 \Rightarrow \omega_g = \frac{\omega}{\sqrt{99}} \\ \Rightarrow f_g &= \frac{f}{\sqrt{99}} = \frac{1 \text{ kHz}}{\sqrt{99}} = 100,5 \text{ Hz}\end{aligned}$$

B.2 RC-Hochpass 1. Ordnung

$$\begin{aligned}-6 \text{ dB} &= 20 \cdot \lg\left(\frac{U_a}{U_e}\right) \text{ dB} \\ \Rightarrow -0,3 &= \lg\left(\frac{U_a}{U_e}\right) \\ \Rightarrow \frac{U_a}{U_e} &= 10^{-0,3} = 0,501 \\ \frac{U_a}{U_e} &= \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega CR}} \\ \frac{U_a}{U_e} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}} \stackrel{!}{=} 0,501 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}} &= \frac{1}{0,501} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(\omega CR)^2} &= 2,981 \Leftrightarrow \frac{1}{\omega CR} = \sqrt{2,981} = 1,727 \\ \frac{U_a}{U_e} &= \frac{1 + j\frac{1}{\omega CR}}{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right) = \arctan\left(\sqrt{2,981}\right) = 59,92^\circ\end{aligned}$$

B.3 Frequenzgang eines RLC-Serienschwingkreises

a) Die Resonanzkreisfrequenz ω_0 ergibt sich durch die Resonanzbedingung $\text{Im}\{\underline{Z} = 0\}$.

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \cdot \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right) \Rightarrow \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \text{ mH} \cdot 1 \mu\text{F}}} = 7071,07 \text{ s}^{-1} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1125,4 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Da die Schaltung eine Reihenschaltung aus einem Widerstand, Kondensator und einer Spule ist, handelt es sich um eine Spannungsresonanz.

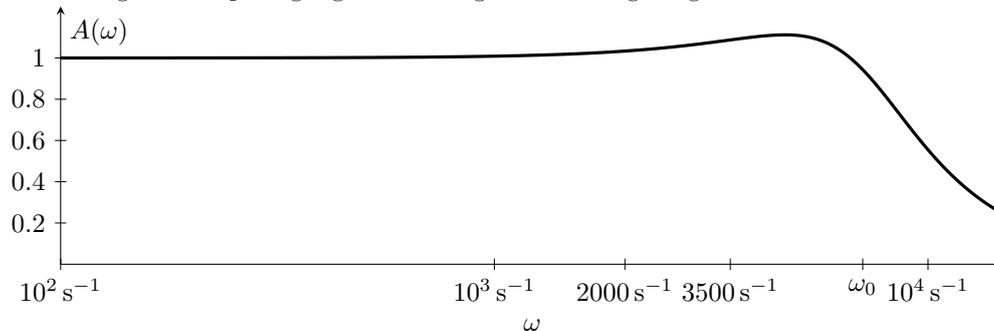
- b) Die Spannungsteilerregel liefert den Frequenzgang:

$$\begin{aligned} \frac{U_2}{U_1} = F(j\omega) &= \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} \\ &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \quad \left| \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} \right. \\ &= \frac{1}{j\omega CR + j^2\omega^2 LC + 1} \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \end{aligned}$$

- c) Der Betrag des Frequenzganges (Amplitudengang $A(\omega)$) ergibt sich zu:

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

Der Betrag des Frequenzganges ist in folger Abbildung dargestellt.



Die zugehörigen Werte sind:

ω	0	100 s^{-1}	2000 s^{-1}	3500 s^{-1}	ω_0	10000 s^{-1}	$\omega \rightarrow \infty$
$A(\omega)$	1,000	1,009	1,033	1,087	0,943	0,555	0

- d) Die Güte eines Reihenschwingkreises gibt die Spannungsüberhöhung über L beziehungsweise C im Resonanzfall an.

$$\begin{aligned} \frac{U_2(\omega_0)}{U_1(\omega_0)} = Q_S &= \frac{X_k}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &= \frac{1}{150 \Omega} \cdot \sqrt{\frac{10 \text{ mH}}{1 \mu\text{F}}} = 0,66 \end{aligned}$$

Für $L = 10 \text{ mH}$ ist $Q_S < 1$, es kommt also zu keiner Spannungsüberhöhung im Resonanzfall.

B.4 Frequenzgang eines Vierpols aus R, L und C

a) Das Spannungsteilerverhältnis ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \underline{F}(j\omega) &= \frac{U_2}{U_1} \\ &= \frac{R_2}{R_1 + \underline{Z}_L \parallel \underline{Z}_C + R_2} \quad \text{mit} \quad \underline{Z}_L \parallel \underline{Z}_C = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = -j \cdot \left(\frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} \right) \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2 - j \left(\frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} \right)} \end{aligned}$$

b) Der Betrag des Spannungsteilerverhältnisses ergibt sich allgemein zu:

$$|\underline{F}(j\omega)| = A(\omega) = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}} \right)^2}}$$

Die Parallelschaltung aus L und C verhält sich für $\omega \rightarrow 0$ und für $\omega \rightarrow \infty$ wie ein Kurzschluss, da jeweils eins der beiden Bauelemente in beiden Fällen eine Impedanz gegen Null besitzt. Daraus folgt für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$:

$$A(\omega \rightarrow 0) = A(\omega \rightarrow \infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Im Resonanzfall ($\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$) heben sich die Admittanzen von L und C (Parallel-Schwingkreis) gegenseitig auf. Mit $Y_C + Y_L \rightarrow 0$ folgt auch $\underline{Z}_L \parallel \underline{Z}_C \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow \omega_0$.

$$A(\omega_0) = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \infty^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

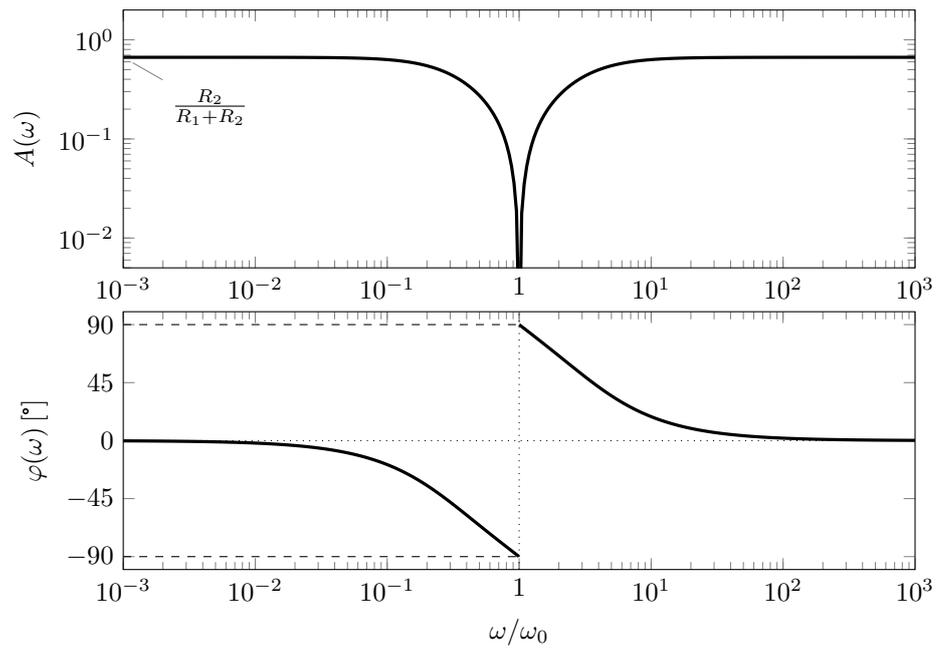
Die Phase ergibt sich zu:

$$\varphi(\omega) = \underbrace{\arctan\left(\frac{0}{R_2}\right)}_{\varphi_{\text{Zähler}}} - \underbrace{\arctan\left(\frac{-\left(\frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}\right)}{R_1 + R_2}\right)}_{\varphi_{\text{Nenner}}} = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}}{R_1 + R_2}\right)$$

Mit:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega \rightarrow 0) &= \arctan(0) = 0 \\ \varphi(\omega \rightarrow \infty) &= \arctan(0) = 0 \\ \varphi(\omega_0) &= \arctan(\infty) = \pm \frac{\pi}{2} \\ \varphi(\omega < \omega_0) &< 0 \\ \varphi(\omega > \omega_0) &> 0 \end{aligned}$$

Der Amplitudengang und Phasengang sind in folgendem Bode-Diagramm dargestellt.



c) Die Ausgangsspannung ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{F}(j\omega) \cdot \underline{U}_1 \\ u_2(t) &= A(\omega) \cdot 5 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \quad \text{mit } \omega = 2\pi \cdot 10 \text{ kHz} \end{aligned}$$

B.5 RLC-Parallelschwingkreis

a) Die Gesamtimpedanz des Schwingkreises ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\ \underline{Z} &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} \\ &= \frac{\frac{1}{R} - j \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \end{aligned}$$

b) Betrag der Gesamtimpedanz in halblogarithmischer Darstellung:

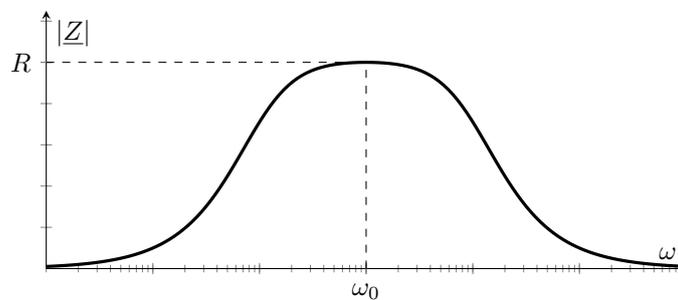


Abbildung B.1

Die Gesamtimpedanz ist maximal bei Resonanzkreisfrequenz mit $\underline{Z}(\omega_0) = R$.

c) Resonanz:

$$\operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$|\underline{Z}(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \underbrace{\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right)^2}_{=0}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}}} = R$$

Grenzfrequenzen, Bandbreite:

$$|\underline{Z}(\omega)| \stackrel{!}{=} \frac{R}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$1 + R^2 \cdot \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 = 2$$

$$\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 = \frac{1}{R^2}$$

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = \pm \frac{1}{R}$$

$$\omega^2 LC \pm \omega \cdot \frac{L}{R} - 1 = 0$$

$$\omega^2 \pm \omega \cdot \frac{1}{RC} - \frac{1}{LC} = 0$$

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Rightarrow \omega = \pm \frac{1}{2 \cdot RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(2 \cdot RC)^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{1}{2 \cdot RC} = 1,6667 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad \frac{1}{LC} = 5 \cdot 10^6 \text{ s}^{-2}$$

$$\omega = \pm 1,6667 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \pm 2,7889 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_{g,o} = 4,4556 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad f_{g,o} = 709,12 \text{ Hz}$$

$$\omega_{g,u} = 1,1222 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \quad f_{g,u} = 178,60 \text{ Hz}$$

$$B = f_{g,o} - f_{g,u} = 530,5 \text{ Hz}$$

d) Bestimmung der Bandbreite über die Resonanzfrequenz und die Güte:

$$B = \frac{f_0}{Q} \quad \text{mit} \quad Q = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot R = \sqrt{\frac{1 \mu\text{F}}{200 \text{ mH}}} \cdot 300 \Omega = 0,6708$$

$$B = \frac{355,88 \text{ Hz}}{0,6708} = 530,5 \text{ Hz} \quad \text{mit} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{200 \text{ mH} \cdot 1 \mu\text{F}}} = 355,88 \text{ Hz}$$

e) Bei logarithmischer Frequenzachse verläuft die Kurve des Impedanzbetrags $|\underline{Z}(\omega)|$ symmetrisch um die Resonanzkreisfrequenz ω_0 , das heißt $f_{g,o}$ und $f_{g,u}$ liegen dann symmetrisch um f_0 .

$$\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}_{=\vartheta(\omega), \vartheta^2 \text{ symmetrisch um } \omega_0 \text{ bei faktorieller Änderung}} \cdot \frac{C}{L} \quad \Rightarrow \quad \vartheta^2(n \cdot \omega_0) = \vartheta^2\left(\frac{1}{n} \cdot \omega_0\right)$$

B.6 RC-Filter zweiter Ordnung

a) Frequenzgang:

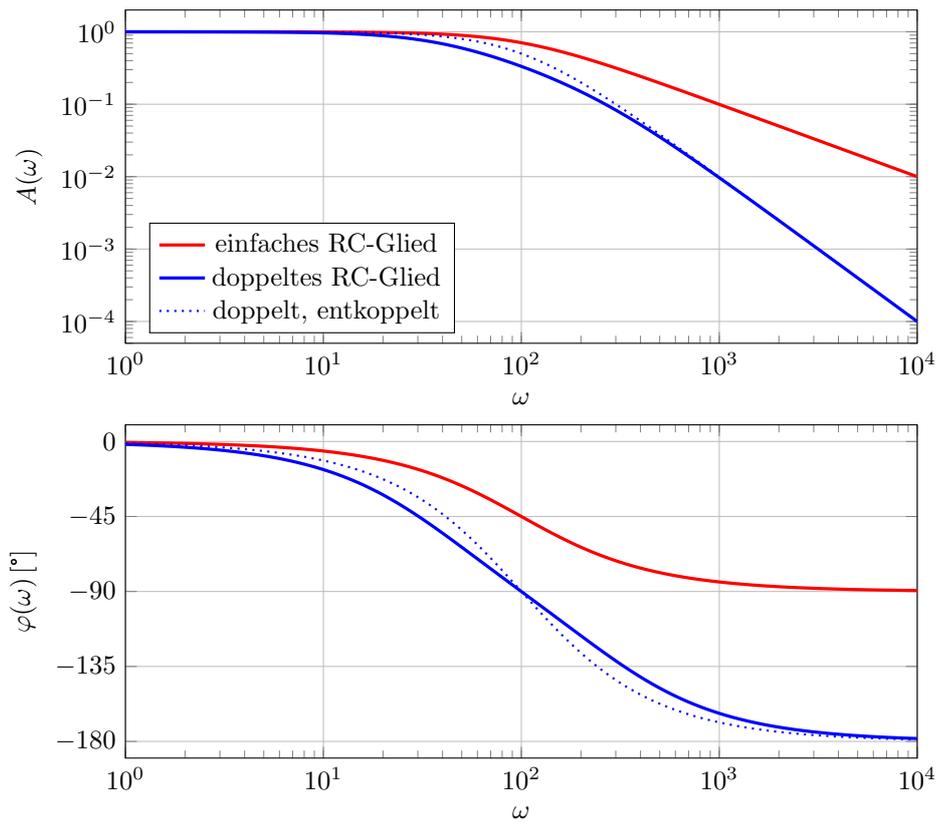
$$\begin{aligned}
 \underline{F}(j\omega) &= \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{U_m} \cdot \frac{U_m}{U_1} \\
 \frac{U_m}{U_1} &= \frac{Z_{\text{ers}}}{R + Z_{\text{ers}}} = \frac{1}{\frac{R}{Z_{\text{ers}}} + 1} \\
 Z_{\text{ers}} &= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \parallel \frac{1}{j\omega C} = \left(\frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega C \right)^{-1} \\
 \frac{U_m}{U_1} &= \frac{1}{R \cdot \left(\frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega C \right) + 1} \\
 &= \frac{1}{\frac{R \cdot j\omega C}{R \cdot j\omega C + 1} + R \cdot j\omega C + 1} \\
 &= \frac{R \cdot j\omega C + 1}{R \cdot j\omega C + (R \cdot j\omega C + 1)^2} \\
 &= \frac{R \cdot j\omega C + 1}{R \cdot j\omega C - R^2 \omega^2 C^2 + 2 \cdot j\omega C R + 1} \\
 &= \frac{1}{1 - \omega^2 C^2 R^2 + j3\omega C R} \\
 &= \frac{1 + j\Omega}{1 - \Omega^2 + j3\Omega} \quad \text{mit} \quad \Omega = \omega C R \\
 \frac{U_2}{U_m} &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega C R} = \frac{1}{1 + j\Omega} \\
 \frac{U_2}{U_1} &= \frac{U_2}{U_m} \cdot \frac{U_m}{U_1} = \frac{1}{1 + j\omega C R} = \frac{1}{1 + j\Omega} \cdot \frac{1 + j\Omega}{1 - \Omega^2 + j3\Omega} \\
 &= \frac{1}{1 - \Omega^2 + j3\Omega} = \frac{1}{1 - (\omega C R)^2 + j3\omega C R}
 \end{aligned}$$

Vergleich einfacher Tiefpass:

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega C R} = \frac{1}{1 + j\Omega}$$

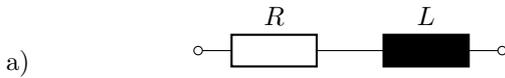
Wegen Kopplungseffekten kann der Frequenzgang des einfachen Tiefpasses bei Serienschaltung nicht einfach multipliziert werden.

b) Bode-Diagramm (Amplituden- und Phasengang) für RC-Tiefpassfilter 1. und 2. Ordnung:



Die Dämpfung im Sperrbereich beträgt bei 2. Ordnung (blau) das doppelte (40 dB/Dek) im Vergleich zur 1. Ordnung (rot) (20 dB/Dek). Die Phasenverschiebung reicht von 0° bis -180° bei 2. Ordnung, im Gegensatz zur 1. Ordnung, die nur von 0° bis -90° reicht. Die Grenzfrequenz verschiebt sich durch die höhere Dämpfung nach links (kleiner für 2. Ordnung).

B.7 Impedanz- und Admittanzortskurve eines RL-Gliedes



$$\begin{aligned}
 f &= 5 \text{ kHz} \dots 50 \text{ kHz} & \underline{Z} &= R + j\omega L \\
 f_1 &= 5 \text{ kHz} & \underline{Z}_1 &= 5 \text{ k}\Omega + j314,16 \Omega \\
 f_2 &= 25 \text{ kHz} & \underline{Z}_2 &= 5 \text{ k}\Omega + j1570,8 \Omega \\
 f_3 &= 50 \text{ kHz} & \underline{Z}_3 &= 5 \text{ k}\Omega + j3141,6 \Omega
 \end{aligned}$$

\underline{Z} -Ortskurve: $\text{Re}\{\underline{Z}\} = \text{konst.}$, $\text{Im}\{\underline{Z}\} = \text{var.}$
 \Rightarrow Gerade parallel zur Imaginärachse im I. Quadranten.

b) Inversion von Geraden im I. Quadranten:
 Halbkreis im IV. Quadranten.

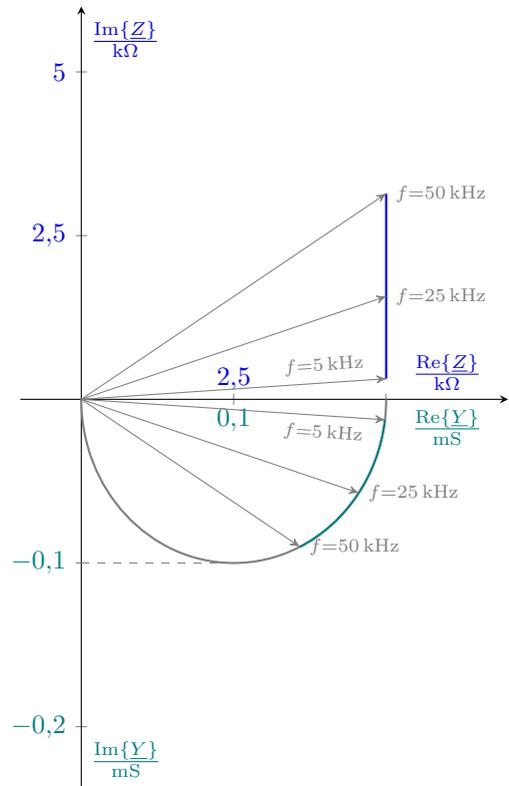
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad \underline{Y} = \frac{1}{|\underline{Z}|} \cdot e^{-j\varphi_Z}$$

Maßstab so gewählt, dass $\underline{Z}(0) = 5 \text{ k}\Omega \hat{=} \underline{Y}(0) = 0,2 \text{ mS}$.

Start des Halbkreises bei $0,2 \text{ mS}$ ($\omega = 0$), Ende bei 0 mS ($\omega \rightarrow \infty$) und Mittelpunkt bei $0,1 \text{ mS}$.

Die Admittanzen sind abzulesen am jeweiligen Schnittpunkt des gespiegelten Impedanzzeiger mit dem Halbkreis (Winkel negiert, Spiegelung an x-Achse).

Die Admittanzkurve entspricht dem Kreisabschnitt zwischen $\underline{Y}(f = 5 \text{ kHz})$ und $\underline{Y}(f = 50 \text{ kHz})$.

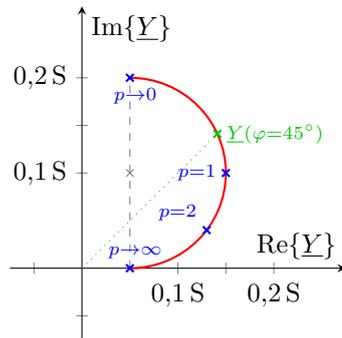


B.8 Admittanzortskurve gemischter Reihen-/Parallelschaltung

a) Admittanz \underline{Y} für $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$ und $p \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \underline{Y} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} & \underline{Y}(p) &= \left(0,05 + \frac{p+j}{p^2+1} \cdot 0,2 \right) \text{ S} \\
 &= \frac{1}{R_2} + \frac{R_1 - \frac{1}{j\omega C}}{R_1^2 - \left(\frac{1}{j\omega C}\right)^2} & \underline{Y}(p \rightarrow 0) &= \left(0,05 + \frac{0+j}{0+1} \cdot 0,2 \right) \text{ S} = (0,05 + j \cdot 0,2) \text{ S} \\
 &= \frac{1}{R_2} + \frac{p \cdot R_0 + j \frac{1}{\omega C}}{p^2 \cdot R_0^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} & \underline{Y}(p = 1) &= \left(0,05 + \frac{1+j}{2} \cdot 0,2 \right) \text{ S} = (0,15 + j \cdot 0,1) \text{ S} \\
 &= \frac{1}{20 \Omega} + \frac{p \cdot 5 \Omega + j \cdot 5 \Omega}{p^2 \cdot 25 \Omega^2 + 25 \Omega^2} & \underline{Y}(p = 2) &= \left(0,05 + \frac{2+j}{5} \cdot 0,2 \right) \text{ S} = (0,13 + j \cdot 0,04) \text{ S} \\
 &= 0,05 \text{ S} + \frac{p+j}{p^2+1} \cdot 0,2 \text{ S} & \underline{Y}(p \rightarrow \infty) &= \left(0,05 + \frac{\infty+j}{\infty^2+1} \cdot 0,2 \right) \text{ S} = (0,05 + j \cdot 0) \text{ S}
 \end{aligned}$$

b) Skizze der Admittanzortskurve:



c) Strom eilt um 45° voraus für $\varphi = 45^\circ$. Schnittpunkt aus Gerade und Ortskurve.

d) Mit $\arctan(45^\circ) = \frac{\text{Im}\{Y\}}{\text{Re}\{Y\}} = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} \text{Re}\{Y\} &\stackrel{!}{=} \text{Im}\{Y\} \\ 0,05 + 0,2 \cdot \frac{p}{p^2 + 1} &\stackrel{!}{=} 0,2 \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \\ 0,05 \cdot p^2 + 0,2 \cdot p - 0,15 &= 0 \\ p_{1/2} &= -2 \pm \sqrt{4 + 3} \\ \text{mit } R_1 > 0: \quad p_{45^\circ} &= -2 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(\varphi = 45^\circ) &= 0,05 + 0,2 \cdot \frac{-2 + \sqrt{7} + j}{(-2 + \sqrt{7})^2 + 1} \\ &= (0,14114 + j \cdot 0,14114) \text{ S} \end{aligned}$$

B.9 Wechselstrommessbrücke

a) Messspannung aus Potentialdifferenz von Spannungsteilern:

$$\begin{aligned} \underline{U}_B &= U_0 \cdot \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} \right) \\ &= U_0 \cdot \left(\frac{Z_2 \cdot Z_3 + \cancel{Z_2 \cdot Z_4} - Z_1 \cdot Z_4 - \cancel{Z_2 \cdot Z_4}}{(Z_1 + Z_2) \cdot (Z_3 + Z_4)} \right) \\ &= U_0 \cdot \left(\frac{Z_2 \cdot Z_3 - Z_1 \cdot Z_4}{(Z_1 + Z_2) \cdot (Z_3 + Z_4)} \right) \end{aligned}$$

b) wie a) nur mit $Z_1 = jX_1$, $Z_2 = jX_2$, $Z_3 = Z_4 = R$.

$$\begin{aligned} \underline{U}_B &= U_0 \cdot \left(\frac{X_2 - X_1}{(X_1 + X_2) \cdot (1 + 1)} \right) \\ \underline{U}_B &= U_0 \cdot \left(\frac{\cancel{jR} \cdot \cancel{jR} \cdot jX_2 \cdot R - jX_1 \cdot R}{jR \cdot (jX_1 + jX_2) \cdot (R + R)} \right) \\ &= \frac{U_0}{2} \cdot \frac{X_2 - X_1}{X_2 + X_1} \end{aligned}$$

- c) Die Messspannung \underline{U}_B ist unabhängig von der Frequenz, vorausgesetzt es handelt sich um zwei kapazitive ($X_C \sim \frac{1}{\omega}$) oder um zwei induktive Blindwiderstände ($X_L \sim \omega$). Dann heben sich die frequenzabhängigen Terme der Reaktanzen X_1 und X_2 gegenseitig auf.
- d) Für $X_1 = X_2$ ist $\underline{U}_B = 0$. Beide Spannungsteiler (für \underline{U}_B^+ und \underline{U}_B^-) ergeben $U_0/2$.
- e) Für $X_1 = -X_2$ ist die Resonanzbedingung erfüllt (des idealen LC-Reihenschwingkreises aus X_1 und X_2). Die Messspannung \underline{U}_B geht gegen unendlich (, da ungedämpft).

Literatur

- [1] xkcd. *Webcomic*. URL: <https://xkcd.com/> (besucht am 25.02.2025).
- [2] Wilfried Weißgerber. *Elektrotechnik für Ingenieure 2*. dt. 10. Auflage. Springer Vieweg, 2018. ISBN: 978-3-658-21822-2.
- [3] Ehrhard Behrends. *Parkettierungen der Ebene - von Escher über Möbius zu Penrose*. dt. Springer Spektrum, 2019. ISBN: 978-3-658-23269-6.
- [4] Hans Hagemann. *Grundlagen der Elektrotechnik*. dt. 18. Auflage. AULA-Verlag, 2020. ISBN: 978-3-89104-830-6.

Index

	A	
Amplitudengang	4	LC-Reihenschwingkreis
		36
	B	RLC-Parallelschwingkreis
Bandbreite	23	48
Bode-Diagramm	20	RLC-Reihenschwingkreis
		37
	D	Schwingung
Dezibel	17	erzwungene Schwingung
		33
	E	freie Schwingung
Eigenfrequenz	34	33
	F	
Filter		U
Bandpass	23	Überspannung
Bandsperre	23	36
Hochpass	9, 20	Überstrom
Tiefpass	5, 19, 20	36
Frequenzgang	4	
	G	V
Grenzfrequenz	19	Verstärkung
Güte	35, 42, 54	18
	K	Z
Kennleitwert	35	Zeigerdiagramm
Kennwiderstand	35	28
	L	
lineares zeitinvariantes System	4	
logarithmische Darstellung	14	
	M	
Mittenfrequenz	23	
	O	
Ordnung, (Filter-)	25	
Ortskurve	27	
	P	
Phasengang	4	
	R	
relative Verstimmung	42	
Resonanz,		
Spannungs- (spannungsbezogen)	36, 43	
Strom- (strombezogen)	36, 52	
Resonanzbedingung	35	
Resonanzerscheinung	33	
Resonanzfrequenz	35	
Resonanzkreis	33	
	S	
Schwingkreis	33	
LC-Parallelschwingkreis	36	